

УДК 539.3

О НЕКОТОРЫХ ТИПАХ МАТЕРИАЛОВ¹*Бабешко В. А.², Бабешко О. М.³, Евдокимова О. В.⁴*

ABOUT SOME TYPES OF MATERIALS

Babeshko V. A., Babeshko O. M., Evdokimova O. V.

The work considers constructional materials with coatings aimed to increase mechanical properties of a structure, filter external fields, and protect materials from external actions. To calculate their condition, approximated formulas are developed.

Ряд конструкционных материалов имеют покрытия, предназначенные для многоцелевого использования. Такие покрытия применяются для повышения прочностных свойств материала, защиты материалов от внешних воздействий, обеспечения технических требований, связанных с функциональным назначением материалов. Материалы могут пребывать не только под действием полей напряжений, вызывающих напряженно-деформированное состояние, но также под действием температурных, электромагнитных и иных внешних воздействий, описываемых соответствующими краевыми задачами. В зависимости от технических требований, материалы могут иметь разнотипные покрытия, контактирующие между собой, полностью покрывающие тело, называемое подложкой. Описанные покрытия отличаются от стрингеров или накладок, теория которых с исчерпывающей полнотой развита в работах В. М. Александрова и его учеников [1]. Отличие рассматриваемых покрытий от стрингеров состоит в необходимости учета нескольких компонент воздействия в зоне контакта покрытия с подложкой.

К описанным проблемам также примыкает задача оценки состояния покрытий мате-

риалов в условиях старения покрытий, изменения их свойств и последующей возможности использования таких материалов в соответствии с их техническим назначением. Другая область, где могут быть использованы материалы такого рода — это фильтрация материалами полей различной природы — электромагнитных, тепловых, радиационных, регулирование их интенсивности в планируемых зонах.

1. Рассматривается краевая задача, описывающая поведение материалов с покрытиями в статическом случае или в условиях вибрации, гармонических воздействий. Считается, что покрытия являются контактирующими между собой двумерными деформируемыми объектами с разнотипными свойствами, с усредненными по толщине параметрами, в частности, тонкостенными пластинами. Они находятся на трехмерной деформируемой подложке в виде слоя. Предполагается, что подложка представляет собой трехмерный слой Ω : $-\infty \leq x_1, x_2 \leq \infty$, $-H \leq x_3 \leq 0$, описываемый в декартовой системе координат соотношениями [2].

Считаем, что на нижней границе слоя, которую будем обозначать $\partial\Omega^-$, задаются однородные и однотипные граничные условия,

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ, РФФИ р2006юг (06-01-96802, 06-01-96803, 06-01-96804, 06-01-96805, 06-05-96806), гранта Президента РФ НШ-2107.2003, программ отделения ЭМПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН.

²Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, директор НИИ проблем механики и геоэкологии, ректор Кубанского государственного университета.

³Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат. наук, заведующая отделом Государственного научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф при Кубанском государственном университете.

⁴Евдокимова Ольга Владимировна, канд. физ.-мат. наук, заведующая кафедрой художественного проектирования костюма Кубанского государственного университета.

явное описание которых несущественно, а на верхней границе $\partial\Omega^+$ — разнотипные, описываемые в каждой из областей $\omega_p \cup \omega_p = \partial\Omega^+$ своими граничными условиями.

Считаем, что краевая задача для вектор-функции $\varphi = \{\varphi_r\}$ из некоторого пространства $\mathbf{H}_s$ описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами вида [3–5]

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\varphi &= 0, \\ \mathbf{x} &= \{x_1, x_2, x_3\} \in \Omega, \\ \varphi &= \{\varphi_r\}, \quad r = 1, 2, \dots, M, \\ \varphi(\mathbf{x}) &= \varphi(x_1, x_2, x_3). \end{aligned} \quad (1)$$

Оговоренное выше граничное условие на верхней границе слоя имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_p(\partial x_1, \partial x_2)\varphi_p &= \mathbf{b}_p, \quad p = 1, 2, \dots, N, \\ \cup \omega_p &= \partial\Omega^+, \quad x_3 = 0, \\ \varphi_p(x_1, x_2) &= \{\varphi_{pr}(x_1, x_2)\} = \varphi(x_1, x_2, 0), \\ (x_1, x_2) &\in \omega_p. \end{aligned} \quad (2)$$

Операторы $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}_p$ представимы в матричном виде

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3) &= \|a_{mr}(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\|, \\ \mathbf{R}_p(\partial x_1, \partial x_2) &= \|b_{pmr}(\partial x_1, \partial x_2)\|, \\ \partial^k x &= \partial^k / \partial x^k. \end{aligned}$$

Здесь a_{mr} , b_{pmr} линейные дифференциальные выражения с постоянными коэффициентами, для которых $a_{mr}(-i\alpha_1, -i\alpha_2, -i\alpha_3)$ являются полиномами переменных $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, а $b_{pmr}(-i\alpha_1, -i\alpha_2)$ — полиномами α_1, α_2 при заменах $\partial^k x_m \rightarrow (-i\alpha_m)^k$. Из сказанного следует, что, в свою очередь, для каждого дифференциального оператора $\mathbf{R}_p(\partial x_1, \partial x_2)$ в области ω_p с границей $\partial\omega_p$ в общем случае должна быть сформулирована краевая задача, т.е. на границе должны быть заданы граничные условия. Заметим, что операторы $\mathbf{R}_p(\partial x_1, \partial x_2)$ содержат в качестве свободных членов выражения вида $\partial^k x_3 \varphi(x_1, x_2, 0)$, понимаемые как

$$\partial^k x_3 \varphi(x_1, x_2, x_3), \quad x_3 \rightarrow 0. \quad (3)$$

Поэтому неизвестными в областях ω_p являются вектор-функции $\varphi_p^{S_p}$

$$\begin{aligned} \varphi_p^{S_p} &= \left\{ \partial^k x_3 \varphi_r(x_1, x_2, 0) \right\}, \\ r &= 1, 2, \dots, M, \quad k = 0, 1, \dots, S_p, \\ (x_1, x_2) &\in \omega_p, \end{aligned} \quad (4)$$

или вектор-функции, компонентами которых являются комбинации функций

$$\partial^k x_3 \varphi_r(x_1, x_2, 0), \quad (x_1, x_2) \in \omega_p.$$

Здесь S_p — некоторые числа, определяемые порядком производных операторов $\mathbf{Q}(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)$, $\mathbf{R}_p(\partial x_1, \partial x_2)$.

С учетом того, что объединение областей ω_p полностью покрывает границу $\partial\Omega^+$, заключаем, что покрытия любых соседних областей ω_p , ω_g контактируют между собой по границам, на которых в общем случае выполняются граничные условия сопряжения вида

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}_p \varphi_p^{S_p} + \mathbf{\Gamma}_g \varphi_g^{S_g} &= 0, \\ (x_1, x_2) &\in \partial\omega_r, \quad r = p, g. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь $\mathbf{\Gamma}_p$, $\mathbf{\Gamma}_g$ — матрицы-функции сопряжения граничных условий краевых задач для $\mathbf{R}_p(\partial x_1, \partial x_2)$, $\mathbf{R}_g(\partial x_1, \partial x_2)$ в областях ω_p , ω_g соответственно.

Заметим, что в частном случае сформулированные граничные условия описывают краевые задачи для произвольных систем разобщенно действующих на границу $\partial\Omega^+$ слоя жестких штампов [6]. В этом случае граничные условия сопряжения (5) упрощаются. Жесткие штампы могут без свободных зон, покрывать всю плоскость $\partial\Omega^+$, контактируя между собой по границам $\partial\omega_p$. В последнем случае вся поверхность $\partial\Omega^+$ покрыта жесткими разнотипными штампами произвольной формы, взаимодействующими между собой не только посредством подложки, но и по границам взаимных контактов. Граничные условия (4) описывают взаимодействия штампов по границам $\partial\omega_p$, выражаемые, в зависимости от условий контакта (жесткий контакт, без или с трением и т.д.), некоторыми соотношениями между напряжениями, смещениями и физическими полями на границах. С учетом того, что материалы являются термоэлектродупругими, покрытия могут быть как проводниками температурных и электромагнитных полей, так и изоляторами.

2. Для исследования и решения краевой задачи (1), (2) введем в рассмотрение вспомогательную краевую задачу, решаемую методом преобразования Фурье [2, 6]. С этой целью, сохранив граничное условие на границе $\partial\Omega^+$, заменим в исходной краевой задаче граничное условие (2) следующим

$$\mathbf{R}_\lambda(\partial x_1, \partial x_2)\varphi = \mathbf{g}(x_1, x_2),$$

$$(x_1, x_2) \in \partial\Omega^+, \quad x_3 = 0.$$

Здесь $\mathbf{R}_\lambda(\partial x_1, \partial x_2)$ — дифференциальное выражение граничного условия (однотипное на $\partial\Omega^+$), а $\mathbf{g}(x_1, x_2)$ — новая неизвестная вектор-функция, заданная на $\partial\Omega^+$. В частности, λ может совпадать с любым из p формулы (2), распространенным на все $\partial\Omega^+$. Однако граничные условия можно сформулировать и по-другому, задав в качестве неизвестных однотипные значения на $\partial\Omega^+$ вектор-функций (4).

Обозначив через φ_λ решение вспомогательной задачи, его можно представить в форме

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(x_1, x_2, x_3) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) \times \\ &\quad \times \mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\langle \alpha, \mathbf{x} \rangle} d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (6) \end{aligned}$$

$$\mathbf{G}(\alpha_1, \alpha_2) = F\mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \langle \alpha, \mathbf{x} \rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2.$$

Здесь для двумерного преобразования Фурье приняты обозначения

$$F\varphi_r = \iint_{-\infty}^{\infty} \varphi_r(\mathbf{x}) e^{i\langle \alpha, \mathbf{x} \rangle} dx_1 dx_2,$$

$$\begin{aligned} \varphi_r &= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} F\varphi_r(\mathbf{x}) e^{-i\langle \alpha, \mathbf{x} \rangle} d\alpha_1 d\alpha_2 \equiv \\ &\equiv F^{-1}(F\varphi_r). \end{aligned}$$

Обозначив проектор на область ω_p через $\mathbf{P}_p$ и положив

$$\mathbf{g}_p(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_p \mathbf{g}(\mathbf{x}),$$

приходим к системе псевдодифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_{p1}(\alpha_1, \alpha_2) \times \\ &\quad \times \sum_{n=1}^N \mathbf{G}_n(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\langle \alpha, \mathbf{x} \rangle} d\alpha_1 d\alpha_2 = \\ &\quad = \mathbf{b}_p(x_1, x_2), \quad (7) \end{aligned}$$

$$p = 1, 2, \dots, N, \quad (x_1, x_2) \in \omega_p,$$

$$\mathbf{G}_n(\alpha_1, \alpha_2) = F\mathbf{g}_n(\mathbf{x}).$$

В правой части соотношения (7)

$$\mathbf{K}_{p1}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{R}_p(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, 0),$$

могут присутствовать операции (3), совершаемые над элементами $\mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2, x_3)$.

Построенная система псевдодифференциальных уравнений имеет символ $\mathbf{K}_{p1}(\alpha_1, \alpha_2)$ с тождественно равным нулю определителем.

В общем случае элементы матриц-функций $\mathbf{K}_{p1}(\alpha_1, \alpha_2)$ являются степенным образом растущими функциями аргумента $A = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$.

Преобразуем систему таким образом, чтобы элементы символа были бы убывающими на бесконечности функциями.

Введем в рассмотрение дифференциальные выражения и порождаемые ими полиномы вида

$$\mathbf{V}_+(\partial x_1, \partial x_2) = \partial x_1 + i\partial x_2,$$

$$\mathbf{V}_-(\partial x_1, \partial x_2) = \partial x_1 - i\partial x_2,$$

$$\mathbf{V}_+(-i\alpha_1, -i\alpha_2) = -i\alpha_1 + \alpha_2,$$

$$\mathbf{V}_-(-i\alpha_1, -i\alpha_2) = -i\alpha_1 - \alpha_2,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_+(\partial x_1, \partial x_2) \mathbf{V}_-(\partial x_1, \partial x_2) - c^2 &\equiv \\ &\equiv \partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 - c^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_+(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \mathbf{V}_-(-i\alpha_1, -i\alpha_2) - c^2 &= \\ &= -(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - c^2. \end{aligned}$$

Комбинацией этих дифференциальных выражений можно всегда добиться необходимого степенного поведения полиномов $\mathbf{V}(-i\alpha_1, -i\alpha_2)$ параметров α_1, α_2 , порождаемых дифференциальными выражениями $\mathbf{V}(\partial x_1, \partial x_2)$.

Построим для каждого p эллиптические дифференциальные формы $\mathbf{V}_p(\partial x_1, \partial x_2)$ таким образом, чтобы имело место асимптотическое поведение вида

$$\mathbf{V}_p^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \mathbf{K}_{p1}(\alpha_1, \alpha_2) = O(A^{-1}).$$

Для эллиптических дифференциальных форм $\mathbf{V}_p(\partial x_1, \partial x_2)$ поставим краевые задачи в ω_p , положив

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_p(\partial x_1, \partial x_2) \psi_p &= \mathbf{b}_p, \quad \partial^q n \psi_p = \mathbf{f}_p, \quad (8) \\ (x_1, x_2) &\in \partial\omega_p, \quad q = 0, 1, \dots, q_p. \end{aligned}$$

Здесь гладкие вектор-функции $\mathbf{f}_p$ временно считаются произвольными. Значения ψ_p определяются из однозначно разрешимой краевой

задачи в некотором $\mathbf{H}_s(\omega_p)$, n -внешняя нормаль к границе $\partial\omega_p$.

Обратный оператор $\mathbf{V}_p^{-1}$ краевой задачи (8), линейный по каждому аргументу, можно построить методом факторизации [3–5]. Решение краевой задачи представимо в виде

$$\psi_p(x_1, x_2) = \mathbf{V}_p^{-1}[\mathbf{b}_p, \mathbf{f}_p], \quad (x_1, x_2) \in \omega_p. \quad (9)$$

Применим к системе псевдодифференциальных уравнений (7) обратные операторы $\mathbf{V}_p^{-1}$ с граничными условиями (8), взяв для представления решения гладкие значения вектор-функций $\mathbf{f}_p$. Запишем систему в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_{p2}(\alpha_1, \alpha_2) \times \\ & \times \sum_{n=1}^N \mathbf{G}_n(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i\langle \alpha, \mathbf{x} \rangle} d\alpha_1 d\alpha_2 = \\ & = \mathbf{V}_p^{-1}[\mathbf{b}_p, \mathbf{f}_p], \quad (10) \end{aligned}$$

$$p = 1, 2, \dots, N, \quad (x_1, x_2) \in \omega_p,$$

$$\mathbf{G}_n(\alpha_1, \alpha_2) = F \mathbf{g}_n(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{K}_{p2}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{V}_p^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) \mathbf{K}_{p1}(\alpha_1, \alpha_2).$$

Справедлива

ТЕОРЕМА. Система интегральных уравнений (10) имеет приближенное решение вида

$$\begin{aligned} & \mathbf{g}_m(x_1, x_2) = \\ & = F^{-1} \sum_{p=1}^N \mathbf{K}_{p2}^{-1}(\alpha_1, \alpha_2) F \mathbf{V}_p^{-1}(\mathbf{b}_p, \mathbf{f}_p) + \\ & + O(e^{-\xi|\mathbf{x}-\tau|}), \quad (11) \end{aligned}$$

$$(x_1, x_2) \in \omega_m, \quad \tau \in \partial\omega_m, \quad \xi > 0.$$

Определив вектор-функции $\mathbf{g}_m(x_1, x_2)$, найдем φ_λ по формуле (6). Заметим, что через посредство формул (6), (9) решение краевой задачи $\varphi_p(x_1, x_2, x_3)$ зависит от пока не определенных функций $\mathbf{f}_p$. В формуле (6) принято $\lambda = p$, $p = 1, 2, \dots, N$. Внося найденные решения краевых задач в граничные условия (5), получаем одномерные интегральные уравнения для определения этих функций. В частности, эта система может вырождаться в алгебраическую. В том случае, если граничные условия (5) на $\partial\omega_p$ окажутся смешанными, возникнет дополнительное исследование одномерных интегральных уравнений. Изложенный алгоритм позволяет строить приближенное решение широкого спектра постановок краевых задач, а также позволяет реализовывать различные стратегии управления свойствами материала.

Литература

1. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
2. Ворович И. И., Бабешко В. А., Прякина О. Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 248 с.
3. Бабешко В. А., Бабешко О. М. Метод факторизации в теории вирусов вибропрочности // ДАН. 2003. Т. 393. № 4. С. 473–477.
4. Бабешко В. А., Бабешко О. М. О методе факторизации в краевых задачах для сплошных сред // ДАН. 2004. Т. 399. № 3. С. 315–318.
5. Бабешко В. А., Бабешко О. М. К исследованию связанных краевых задач механики сплошных сред и математической физики // ДАН. 2005. Т. 400. № 2. С. 192–196.
6. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.

Статья поступила 20 февраля 2006 г.

Кубанский государственный университет

© Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В., 2006