УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С ВИНТОВОЙ АНИЗОТРОПИЕЙ[1]

Богаченко С. Е.[2], Устинов Ю. А.[3]

SOME CHARACTERISTICS OF WAVE PROCESSES IN A CYLINDRICAL SHELL WITH HELICAL ANISOTROPY

Bogachenko S. E., Ustinov Yu. A.

The work is aimed to develop basic relationships for a cylindrical shell with helical anisotropy based on the Kirchhoff-Love hypotheses and study the characteristics of wave processes. The proposed theory can be used to describe helical motion of blood in arterial vessels.

В [1–4] получены основные соотношения теории упругости для тел с винтовой анизотропией. Данная работа посвящена построению основных соотношений для цилиндрической оболочки с винтовой анизотропией на основе гипотез Кирхгоффа-Лява и исследованию на их основе особенностей волновых процессов. Предлагаемая теория может быть использована для описания винтового движения крови в артериальных сосудах — явления, которое было открыто новосибирскими учеными [5].

1. Основные соотношения теории упругости и постановка задачи для цилиндра с винтовой анизотропией

Для построения соотношений обобщенного закона Гука в случае винтовой анизотропии будем рассматривать кровеносный сосуд как полый упругий цилиндр [2].

Рассмотрим тело, занимающее объем $V = S \times [0, L]$, где S — поперечное сечение цилиндра, L — его длина. Боковую поверхность обозначим через $\Gamma = \partial S \times [0, L]$, где ∂S — граница S. Далее S — кольцо с внутренним и внешним радиусами r_1, r_2 соответственно.

Введем декартовую систему координат x_1, x_2, x_3, связав ее начало с одним из торцов цилиндра. Ось $x_3 = z$ направим по оси цилиндра. Эту систему координат будем называть основной. Для описания винтовой анизотропии введем винтовую систему координат r, θ, z, связанную с основной соотношениями

$$x_1 = r\cos(\theta+\tau z), \quad x_2 = r\sin(\theta+\tau z), \quad x_3 = z.$$

Здесь и ниже предполагается, что $\tau = \mathrm{const}$.

С винтовой линией $r = const$, $\theta = const$ свяжем естественный базис $e_1 = n$, $e_2 = b$, $e_3 = t$ (здесь n, b, t — орты главной нормали, бинормали и касательной соответственно).

Радиус-вектор точек винтовой линии представим в виде

$$R = re_1' + ze_3',$$

где

$$e_1' = e_r = i_1\cos(\theta+\tau z) + i_2\sin(\theta+\tau z),$$
$$e_2' = e_\theta = -i_1(\sin\theta+\tau z) + i_2(\cos\theta+\tau z),$$
$$e_3' = e_z.$$

Используя формулы

$$\frac{dR}{ds} = t, \quad \frac{dt}{ds} = k \times n, \quad ds = g\,dz,$$
$$g^2 = (1 + x^2), \quad x = r\tau,$$

где $k = \frac{r\tau^2}{g^2}$ — кривизна винтовой спирали, получаем ортогональную матрицу перехода от базиса e_j к базису e_j'

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/g & x/g \\ 0 & x/g & 1/g \end{pmatrix}.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (04-01-00069).

[2]Богаченко Сергей Евгеньевич, аспирант кафедры теории упругости Ростовского государственного университета.

[3]Устинов Юрий Анатольевич, заслуженный деятель науки РФ, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры теории упругости Ростовского государственного университета.

Будем считать материал цилиндра локально ортотропным, у которого главное направление осей тензора упругих свойств совпадает с направлением ортов естественного базиса. Для обобщенного закона Гука будем использовать матричную форму записи между напряжениями и деформациями

$$e_i = a_{ij}\sigma_j, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

$$\sigma_i = c_{ij}e_j, \quad c_{ij} = c_{ji}, \quad i,j = 1,\dots,6.$$

Здесь

$$e_1 = e_{11}, \quad e_2 = e_{22}, \quad e_3 = e_{33},$$

$$e_4 = e_{23}, \quad e_5 = e_{13}, \quad e_6 = e_{12},$$

$$\sigma_1 = \sigma_{11}, \quad \sigma_2 = \sigma_{22}, \quad \sigma_3 = \sigma_{33},$$

$$\sigma_4 = \sigma_{23}, \quad \sigma_5 = \sigma_{13}, \quad \sigma_6 = \sigma_{12},$$

e_{ij}, σ_{ij} — компоненты тензоров малых деформаций и напряжений соответственно.

Элементы матрицы A называются податливостями. В случае простой анизотропии (для ортотропных, трансверсально-изотропных материалов) a_{ij} выражаются через независимые технические постоянные: E_i, G_{ij}, ν_{ij} — модули Юнга, модули сдвига и коэффициенты Пуассона (которые определяются экспериментально) простыми формулами [6]

$$a_{11} = \frac{1}{E_1}, \quad a_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}, \quad a_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_1},$$

$$a_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad a_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_2}, \quad a_{33} = \frac{1}{E_3},$$

$$a_{44} = \frac{1}{G_{23}}, \quad a_{55} = \frac{1}{G_{13}}, \quad a_{66} = \frac{1}{G_{12}},$$

$$a_{15} = a_{16} = a_{14} = a_{24} = a_{25} = a_{26} = \\ = a_{34} = a_{35} = a_{36} = a_{45} = a_{46} = a_{56} = 0.$$

В результате перехода от основного базиса e_j к e'_j получаем соотношения обобщенного закона Гука в винтовой системе координат

$$\begin{aligned}
e_{rr} &= a'_{11}\sigma_{rr} + a'_{21}\sigma_{\theta\theta} + a'_{31}\sigma_{zz} + a'_{41}\sigma_{\theta z},\\
e_{\theta\theta} &= a'_{12}\sigma_{rr} + a'_{22}\sigma_{\theta\theta} + a'_{32}\sigma_{zz} + a'_{42}\sigma_{\theta z},\\
e_{zz} &= a'_{13}\sigma_{rr} + a'_{23}\sigma_{\theta\theta} + a'_{33}\sigma_{zz} + a'_{43}\sigma_{\theta z},\\
e_{\theta z} &= a'_{14}\sigma_{rr} + a'_{24}\sigma_{\theta\theta} + a'_{34}\sigma_{zz} + a'_{44}\sigma_{\theta z},\\
e_{rz} &= a'_{55}\sigma_{rz} + a'_{56}\sigma_{r\theta},\\
e_{r\theta} &= a'_{56}\sigma_{rz} + a'_{66}\sigma_{r\theta},
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где

$$a'_{11} = a_{11}, \quad a'_{12} = \frac{a_{12} + x^2 a_{13}}{g^2},$$

$$a'_{13} = \frac{a_{13} + x^2 a_{12}}{g^2}, \quad a'_{14} = \frac{-2x(a_{12} - x^2 a_{13})}{g^2},$$

$$a'_{22} = \frac{a_{22} + x^2 a_{23} + x^4 a_{33} + x^2 a_{44}}{g^2},$$

$$a'_{23} = \frac{x^2(a_{22} + a_{33} - a_{44}) + (1 + x^4)a_{23}}{g^4},$$

$$a'_{24} = \frac{x[2(a_{23} - a_{33}) + 2x^2(a_{33} - a_{23})]}{g^4} + \\ + \frac{(1 - x^2)a_{44}x}{g^4},$$

$$a'_{33} = \frac{a_{33} + 2x^2(a_{33} + x^4 a_{22} + x^2 a_{44})}{g^4},$$

$$a'_{34} = \frac{x[2(a_{33} - a_{23}) + 2x^2(a_{33} - a_{22})]}{g^4} - \\ - \frac{(1 - x^2)a_{44}x}{g^4},$$

$$a'_{44} = \frac{(1 - x^2)^2 a_{44} + 4x^2(a_{22} - 2a_{23} + a_{33})}{g^4},$$

$$a'_{55} = \frac{a_{55} + x^2 a_{56}}{g^2}, \quad a'_{56} = \frac{x(a_{55} - a_{66})}{g^2},$$

$$a'_{66} = \frac{(x^2 a_{55} + a_{66})}{g^2}, \quad a'_{ij} = a'_{ij}.$$

Компоненты тензора деформаций в базисе сопутствующей системы координат выражаются через смещения u_r, u_θ, u_z формулами

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad e_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta}, \quad e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} - \tau\frac{\partial u_z}{\partial\theta},$$

$$2e_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{r\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r},$$

$$2e_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} - \tau\frac{\partial u_r}{\partial\theta},$$

$$2e_{z\theta} = \frac{\partial u_z}{\partial\theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} - \tau\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}.$$

2. Цилиндрическая оболочка с винтовой анизотропией

Построение основных соотношений для цилиндрической оболочки осуществляются на основе гипотез Кирхгоффа–Лява. Будем использовать вариант лианеризованных уравнений, в которых учитывается, что стенка сосуда предварительно напряжена в продольном и окружном направлениях. Ограничимся осесимметричным случаем.

Обращаясь к соотношениям обобщенного закона Гука (1.1), преобразуем их с учетом того, что $\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0$ и $x = a\tau$, где a — радиус срединной поверхности рассматриваемой цилиндрической оболочки. Получим следующие соотношения:

$$\sigma_{\theta\theta} = g_{11}e_{\theta\theta} + g_{12}e_{zz} + g_{13}, \sigma_{\theta z},$$

$$\sigma_{zz} = g_{12}e_{\theta\theta} + g_{22}e_{zz} + g_{23}e_{\theta z},$$

$$\sigma_{\theta z} = g_{13}\sigma_{\theta\theta} + g_{23}\sigma_{zz} + g_{33}\sigma_{\theta z}.$$

Здесь

$$g_{11} = \frac{1}{g_0}[E_2 + x^2(\nu_{32}E_2 - 4G_{23} + 4G_{23}\nu_{23}\nu_{32}) + x^4E_3],$$

$$g_{12} = \frac{1}{g_0}[\nu_{32}E_2 + x^2(E_2 + E_3 + 4G_{23} + 4G_{23}\nu_{23}\nu_{32}) + x^4\nu_{23}E_3],$$

$$g_{22} = \frac{1}{g_0}[E_3 + x^2(E_2 + E_3 + 4G_{23} + 4G_{23}\nu_{23}\nu_{32}) + x^4E_2],$$

$$g_{13} = \frac{1}{g_0}x[2G_{23}(1 - \nu_{32}\nu_{23}) - E_2(1 - \nu_{32}) + x^2(E_3 - \nu_{23}E_2 - 2G_{23} + 2G_{23}\nu_{23}\nu_{32})],$$

$$g_{23} = \frac{1}{g_0}x[-2G_{23}(1 - \nu_{23}) - E_3(1 - \nu_{23}) + x^2(-E_2 - \nu_{23}E_3 - 2G_{23} + 2G_{23}\nu_{23}\nu_{32})],$$

$$g_{33} = \frac{1}{g_0}x[(1 - \nu_{32}\nu_{23})G_{32}(1 - x^2)^2 + x^2(E_2(1 - \nu_{23}) + E_3(1 - \nu_{23}) - 2G_{23}(1 - \nu_{23}\nu_{32})],$$

$$g_0 = (1 + x^2)^4(1 - \nu_{23}\nu_{32}).$$

Упрощения на основе гипотез единой нормали в осесимметричном случае приводят к соотношениям

$$e_{\theta\theta} = \frac{u_r^0}{a}, \quad e_{zz} = \frac{\partial u_z^0}{\partial z} - y\frac{\partial^2 u_z^0}{\partial z^2}, \quad 2e_{z\theta} = \frac{\partial u_\theta^0}{\partial z},$$

где u_r^0, u_θ^0, u_z^0 — смещения точек срединной поверхности; $-h/2 \leqslant y \leqslant h/2$, $h = (r_2 - r_1)/2$ — толщина оболочки.

В принятых выше обозначениях выражения для усилий и моментов можно записать в виде

$$T_i = hg_{ij}e_j^0, \quad M_i = h^3g_{ij}e_j^1/12,$$

причем

$$e_1^0 = \frac{u_r^0}{a}, \quad e_2^0 = \frac{\partial u_z^0}{\partial z}, \quad 2e_3^0 = \frac{\partial u_\theta^0}{\partial z},$$

$$e_1^1 = 0, \quad e_2^1 = \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial z^2},$$

$$2e_3^1 = -\frac{1}{a}\frac{\partial u_\theta^0}{\partial z},$$

$$T_1 = T_{\theta\theta}, \quad T_2 = T_{zz}, \quad T_3 = T_{\theta z},$$

$$M_1 = M_{\theta\theta}, \quad M_2 = M_{zz}, \quad M_3 = M_{\theta z}.$$

С учетом предварительных напряжений уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial^2 M_1}{\partial z^2} - \frac{T_1}{a} + T_\theta^0\frac{u_r^0}{a^2} + T_z^0\frac{\partial^2 u_r^0}{\partial z^2} - h\rho_0\frac{\partial^2 u_r^0}{\partial t^2} + q_r = 0,$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial z} - h\rho_0\frac{\partial^2 u_z^0}{\partial t^2} + q_z = 0, \qquad (2.1)$$

$$\frac{\partial^2 M_3}{\partial z^2} - \frac{\partial T_3}{\partial z} + \frac{T_{\theta z}^0}{a}\frac{\partial u_r^0}{\partial z} - h\rho_0\frac{\partial^2 u_\theta^0}{\partial t^2} + q_\theta = 0.$$

Здесь ρ_0 — плотность материала оболочки; T_r^0, T_θ^0, T_z^0 — усилия предварительно напряженного состояния.

3. Распространение гармонических волн в цилиндрической оболочке

Для исследования распространения гармонических волн решение будем отыскивать в виде

$$u_j^0 = U_j e^{i(k\varsigma - \omega t)}, \qquad (3.1)$$

$$\zeta = z/a,$$

(U_j произвольные постоянные, $j = 1, 2, 3$ отвечают r, θ, z).

Полагая $q_r = q_\theta = q_z = 0$ в (2.1) и подставляя в них (3.1), получим однородную алгебраическую систему

$$l_{uj} U_j = 0.$$

Обращение в нуль определителя этой системы

$$D(k, \omega) = 0$$

дает дисперсионное уравнение, корни которого $k(\omega)$ определяют множество нормальных волн (мод). При $T^0_{\theta\theta} = T^0_{\theta z} = T^0_{zz} = 0$ в низкочастотной области всегда существуют четыре вещественных корня $\pm k_1$, $\pm k_2$, которые для достаточно тонких оболочек можно найти на основе безмоментной теории. Этим корням соответствуют однородные незатухающие моды.

Чтобы получить представление об особенностях волновых процессов в низкочастотной области при винтовой анизотропии на основе безмоментной теории, была проведена серия расчетов для оболочки с фиксированными параметрами.

Часть из перечисленных параметров (E_2, a, h) были взяты для восходящей аорты [5], остальные выбирались из дополнительной информации о механической структуре артериальных сосудов.

В первой серии расчетов исследовалась зависимость фазовых скоростей $c_s = a\omega/k_s$ $(s = 1, 2)$ от параметра α ($\mathrm{tg}\,\alpha = x = \tau a$) при фиксированных значениях частоты $\omega_n = 4\pi n$, $n = 1, \ldots, 10$. Следует отметить, что «степень» винтовой анизотропии определяется величинами коэффициентов g_{13}, g_{23}, которые в свою очередь определяются геометрическим параметром $\alpha \in [0{,}90°]$ и локальной анизотропией материала (для изотропного материала $g_{13} = g_{23} = 0$ при любых значениях параметра $\alpha \in [0, 90°]$).

В качестве примера на рис. 1 приводятся зависимости фазовых скоростей c_{sq} $(q = 1, 2)$ при $\omega_1 = 4\pi$ для двух оболочек, у которых параметры $E_2 = 4{,}905 \cdot 10^5$ кН/м^2, $E_3 = 0{,}833 E_2$, $\nu_{32} = 0{,}45$, $a = 7{,}3 \cdot 10^{-3}$ одинаковые, а модуль сдвига $G_{32} = E_2/6$ для $q = 1$ и $G_{32} = E_2/4$ для $q = 2$.

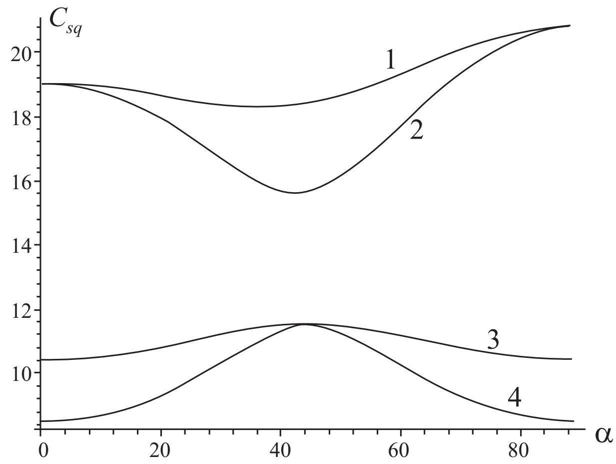

Рис. 1

Кривые 1, 2 отражают зависимости от α нормированных фазовых скоростей c^0_{11}, c^0_{12} «квазипродольных» мод, т. е таких, у которых при $\alpha = 0, \alpha = 90°$ отсутствует крутильная деформация. Кривые 3, 4 описывают поведение нормированных фазовых скоростей c^0_{21}, c^0_{22} «квазикрутильных мод», т. е. таких, у которых при $\alpha = 0, \alpha = 90°$ отсутствует продольная и радиальная деформации. Здесь и ниже $c^0_{sq} = c_{sq}/c_0$, где

$$c_0^2 = \frac{hE_2}{2a\rho_0}.$$

Для того, чтобы получить представление об эффекте кручения на «квазипродольной» моде и эффекте продольно-радиальных колебаний на «квазикрутильной» моде, численно исследовались зависимости от α амплитудных коэффициентов

$$u_{jsq} = U_{jsq}/U_{sq}, \quad U_{sq} = \sqrt{U^2_{1sq} + U^2_{2sq} + U^2_{3sq}}.$$

На рис. 2 представлены зависимости $u_{j1q}(\alpha)$, отвечающие фазовым скоростям c_{1q}. Кривые 1–4 отражают поведение $u_{z11}(\alpha)$, $u_{\theta 11}(\alpha)$, $u_{z12}(\alpha)$, $u_{\theta 12}(\alpha)$, соответственно. На рис. 3 отражены аналогичные зависимости $u_{j2q}(\alpha)$, отвечающие фазовым скоростям c_{2q}. Кривые 1–4 иллюстрируют поведение $u_{z21}(\alpha)$, $u_{\theta 21}(\alpha)$, $u_{z22}(\alpha)$, $u_{\theta 22}(\alpha)$ соответственно.

ω	c_{11}^0	c_{21}^0
4π	18,47	11,50
8π	18,63	11,25
12π, 16π, 20π, 24π, 28π	18,06	11,25

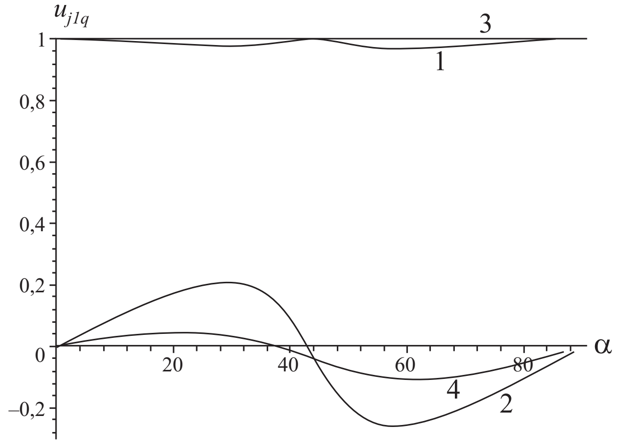

Рис. 2

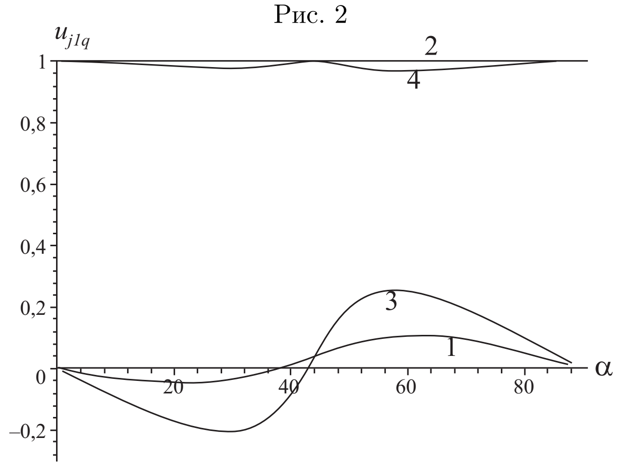

Рис. 3

Очевидно, что коэффициенты $u_{r11}(\alpha)$, $u_{r12}(\alpha)$ на два, три порядка меньше $u_{\theta 11}(\alpha)$, $u_{\theta 12}(\alpha)$, и имеет место смена знаков фаз амплитудных коэффициентов $u_{\theta 1q}(\alpha)$ и $u_{z2q}(\alpha)$. При $0 < \alpha < \alpha_0$ знаки фаз $u_{\theta 1q}(\alpha)$ и $u_{z1q}(\alpha)$ противоположны, что соответствует эффекту «раскручивания», при $\alpha_0 < \alpha < 90°$ знаки фаз $u_{\theta 1q}(\alpha)$ и $u_{z2q}(\alpha)$ совпадают, что соответствует эффекту «закручивания» при растяжении. В первом случае $\alpha_0 \approx 43°$, во втором $\alpha_0 \approx 37°$. Кроме того, сравнение кривых 2 и 4 на рис. 3 показывает, что максимальные значения $|u_{\theta 1}|$ существенно зависят от степени локальной анизотропии. Изменение частоты в диапазоне $\omega = 4\pi k$, $k = 1, \ldots, 8$ практически не влияет на поведение всех кривых.

Во второй серии расчетов исследовались зависимости фазовых скоростей c_{s1} от частоты ω при фиксированных значения параметра $\alpha = 45°$. Некоторые результаты этих расчетов приведены в таблице.

В выбранном диапазоне частот обе фазовые скорости остаются постоянными (таблица).

Из проведенного исследования вытекает, что основной особенностью волновых процессов в цилиндрической оболочке является взаимодействие продольных и крутильных колебаний, а качественный и количественный характер этого взаимодействия определяется, главным образом, степенью анизотропии механических свойств и углом наклона винтовых спиралей к оси цилиндра.

Литература

1. *Устинов Ю. А.* Задачи Сен-Венана для стержня с винтовой анизотропией // ДАН. 2001. Т. 380. С. 770–773.
2. *Устинов Ю. А.* Решение задачи Сен-Венана для цилиндра с винтовой анизотропией // ПММ. 2003. Т. 67. В. 1. С. 89–98.
3. *Устинов Ю. А.* Задачи Сен-Венана для псевдоцилиндров. М.: Наука, 2003. 128 с.
4. *Устинов Ю. А.* Некоторые задачи для упругих цилиндрических тел с винтовой анизотропией // Успехи механики. 2005. Т. 2. № 4. С. 37–65.
5. *Педли Т.* Гидродинамика крупных кровеносных сосудов М.: Мир, 1983. 400 с.
6. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1973. 300 с.

Статья поступила 21 декабря 2005 г.
Ростовский государственный университет