

УДК 539.3

ОБ ИТЕРАЦИОННОМ ПОДХОДЕ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ¹

Ватульян А. О.², Соловьев А. Н.³

ABOUT INTEGRATION APPROACH IN INVERSE PROBLEMS OF THE ELASTICITY THEORY

Vatulyan A. O., Solovyev A. N.

Based on the application of the reciprocal theory to the two conditions differing in elastic modules, the linear integral equation has been formulated, which has been used to reconstruct elastic modulus on the basis of the information about displacement fields on the boundary of an elastic body. This equation has been applied to develop an integration process. An example about reconstructing a transverse modulus has been considered while analyzing anti-plane vibrations of a bar. The results of computation experiments have been adduced.

Введение

Модель однородной изотропной теории упругости, сформировавшаяся достаточно давно и играющая огромную роль в современной практике расчетов прочности конструкций и природных объектов, в ряде случаев требует уточнения и отказа от гипотезы однородности (например, в геофизике при моделировании литосферных плит, в горной механике при анализе напряженного состояния в окрестности выработок, при изучении наноразмерных объектов, в биомеханике при исследовании различных тканей и вибрационных воздействий на них с целью идентификации). При этом определение модулей упругости как функций координат на основе данных об измеренных полях смещений или ускорений на границе тела в установившемся режиме колебаний требует решения обратных задач.

Методы определения модулей упругости, формы полостей и включений в упругом теле по измеренным на его границе полям смещений при частотном зондировании играют большую роль в процедуре идентификации объектов в различных областях естествознания. Задачи такого типа относятся к обратным [1, 2], причем, хотя и принадлежат к различным типам (согласно классификации [3]),

могут быть изучены с единых позиций концепции неоднородной среды и теории обратных коэффициентных задач теории упругости. Главная проблема при исследовании задач подобного типа — это формулировка операторной связи между искомыми коэффициентами дифференциальных операторов упругости и граничными полями перемещений. Поскольку соответствующие дифференциальные операторы имеют переменные коэффициенты, построить фундаментальные решения для такого оператора и использовать аналоги представлений Соммильяны не представляется возможным. В этой ситуации, пожалуй, единственным эффективным средством анализа прямых задач для неоднородных сред в настоящее время являются вычислительные технологии, основанные на идеологии метода конечных элементов. К сожалению, этот подход не позволяет формулировать искомые операторные соотношения. В работе [4] предложен способ, позволяющий сводить проблему идентификации коэффициентов оператора теории упругости к итерационному процессу, на каждом шаге которого необходимо решать операторное уравнение Фредгольма первого рода с непрерывным ядром, причем для построения ядер соответствующих операторов уже возможно использование конечноэлементных

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (05-01-00734, 05-01-00690) и гранта Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (НШ-2113.2003).

²Ватульян Александр Ованесович, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости механико-математического факультета Ростовского государственного университета.

³Соловьев Аркадий Николаевич, д-р физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Ростовского государственного университета.

технологий. В настоящей работе представлено обобщение предложенного подхода [4] на случай не только переменных модулей упругости, но и переменной плотности среды. При этом к задаче идентификации полостей, включений или переменных модулей упругости (слоистость, результат технологической обработки и другие факторы) возможно подойти с единых позиций. Представлены новые интегральные уравнения (ИУ), к которым сводятся обратные задачи для конечных тел в случае установившихся колебаний на основе процедуры линеаризации, предложен итерационный подход решения таких задач, рассмотрены примеры.

1. Обобщенное соотношение взаимности

Рассмотрим задачу об установившихся колебаниях с частотой ω односвязной ограниченной области V с границей $S = S_u \cup S_\sigma$. При этом будем различать два состояния: первое соответствует тензору модулей упругости $C_{ijkl}^{(1)}(x)$, плотности $\rho^{(1)}(x)$, компонентам вектора смещений $u_i^{(1)}$ и тензора напряжений $\sigma_{ij}^{(1)}$; второе — соответственно $C_{ijkl}^{(2)}(x)$, $\rho^{(2)}(x)$, $u_i^{(2)}$, $\sigma_{ij}^{(2)}$. В области V для каждого состояния выполнены уравнения движения и закон Гука

$$\begin{aligned} \sigma_{ij,j}^{(m)} + \rho^{(m)} \omega^2 u_i^{(m)} &= 0 \quad (i = 1, 2, 3), \\ \sigma_{ij}^{(m)} &= C_{ijkl}^{(m)} u_{k,l}^{(m)} \quad (m = 1, 2). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Граничные условия, одинаковые для обоих состояний, имеют вид

$$u_i^{(m)} \Big|_{S_u} = 0, \quad \sigma_{ij}^{(m)} n_j \Big|_{S_\sigma} = p_i. \quad (1.2)$$

В рамках такого подхода анализируются колебания сплошных тел с упругими модулями и плотностью, меняющимися некоторым непрерывным образом, и колебания тел с включениями (полостями), что можно рассматривать как кусочно-непрерывные зависимости тензора упругих постоянных и плотности. В качестве замечания отметим, что часть границы S_u , где задаются компоненты смещений, может отсутствовать вообще. Имеет место следующий результат, получающийся стандартным образом при рассмотрении двух состояний.

ТЕОРЕМА. Для состояний, удовлетворяющих (1.1)–(1.2), имеет место соотношение

$$\begin{aligned} \int_V (C_{ijkl}^{(2)} - C_{ijkl}^{(1)}) u_{k,l}^{(2)} u_{i,j}^{(1)} dV + \\ + \int_{S_\sigma} p_i (u_i^{(2)} - u_i^{(1)}) dS + \\ + \omega^2 \int_V (\rho^{(1)} - \rho^{(2)}) u_i^{(2)} u_i^{(1)} dV = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

В случае, когда $\rho^{(1)} = \rho^{(2)}$, получается соотношение, установленное в [4], а если $C_{ijkl}^{(1)}(x) = C_{ijkl}^{(2)}(x)$, $\rho^{(1)} = \rho^{(2)}$, то объемные интегралы в (1.3) равны нулю, и получается известное соотношение Бетти в случае отсутствия массовых сил [5].

Полученное соотношение (1.3) позволяет формулировать операторные уравнения, связывающие упругие характеристики области V и граничные поля смещений и напряжений на S .

2. Постановка обратной коэффициентной задачи и построение разрешающего соотношения

Сформулируем задачу об определении неоднородностей в упругом теле как задачу определения коэффициентов дифференциального оператора теории упругости по информации

$$u_i \Big|_{S_\sigma} = f_i(x, \omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2], \quad (2.1)$$

соответствующей измерению поля перемещений на части границы S_σ , где осуществляется нагружение, и моделирующей эхо-режим в акустических методах неразрушающего контроля. Вместе с тем, если носитель нагрузки занимает часть S_σ , то на этой части и необходимо измерять смещения в соответствии с (2.1). Отметим, что часто в постановке различных типов обратных задач считается известным поле смещений на части границы, свободной от нагрузок, однако в этом случае соответствующий интеграл будет равен нулю в соответствии с (1.3), и это соотношение нельзя использовать для процедуры идентификации упругих модулей. При этом система разрешающих уравнений содержит промежуточные неизвестные граничные функции перемещений.

Задача об определении модулей упругости является нелинейной [2, 3] и может быть решена на основе некоторого итерационного процесса, на каждом этапе которого осуществляется решение линейной краевой задачи с известными (возможно переменными) модулями упругости и плотностью. При этом можно избежать утомительных построений по решению прямых задач и формулировки операторных соотношений связи, если использовать представленное выше обобщение теоремы взаимности. Полагая в (1.3)

$$\begin{aligned} u_i^{(1)} &= u_i^{(n-1)}, & u_i^{(2)} &= u_i^{(n-1)} + u_i^{(n)}, \\ C_{ijkl}^{(1)} &= C_{ijkl}^{(n-1)}, & C_{ijkl}^{(2)} &= C_{ijkl}^{(n-1)} + C_{ijkl}^{(n)}, \\ \rho^{(1)} &= \rho^{(n-1)}, & \rho^{(2)} &= \rho^{(n-1)} + \rho^{(n)}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

сохраняя в (1.3) линейные по величинам n -го приближения слагаемые, с учетом дополнительного условия (2.1) получим

$$\begin{aligned} &\int_V C_{ijkl}^{(n)} u_{k,l}^{(n-1)} u_{i,j}^{(n-1)} dV - \\ &- \omega^2 \int_V \rho^{(n)} u_i^{(n-1)} u_i^{(n-1)} dV + \\ &+ \int_{S_\sigma} p_i (f_i - u_i^{(n-1)}) dS = 0, \quad (2.3) \\ &\omega \in [\omega_1, \omega_2]. \end{aligned}$$

Соотношение (2.3) можно трактовать как интегральное уравнение относительно компонент $C_{ijkl}^{(n)}(x)$ и $\rho^{(n)}(x)$, если предварительно решена прямая задача о распределении поля смещений внутри области V и на ее границе S с упругими характеристиками $C_{ijkl}^{(n-1)}(x)$ и $\rho^{(n-1)}(x)$. Отметим, что подынтегральные выражения в объемных интегралах в (2.3) представляют собой по форме аналог удвоенной удельной потенциальной энергии деформаций и удельной кинетической энергии, в которой перемещения и деформации соответствуют $(n-1)$ -ой итерации (предыдущей), а модули — n -ой итерации (последующей). Метрой выхода из итерационной процедуры является функционал

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} \int_{S_\sigma} (f_i - u_i^{(n-1)})^2 dS d\omega,$$

и если его значение становится меньше погрешности входной информации, то процесс необходимо остановить.

Поскольку в изотропном случае тензор упругих постоянных выражается через две функции Ляме $\lambda(x)$ и $\mu(x)$, то уравнение (2.3) в первом приближении при условии постоянной плотности примет вид

$$\begin{aligned} &\int_V \left[\lambda^{(n)}(x) \left(u_{k,k}^{(n-1)} \right)^2 + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} \mu^{(n)}(x) \left(u_{i,j}^{(n-1)} + u_{j,i}^{(n-1)} \right) \times \right. \\ &\times \left. \left(u_{i,j}^{(n-1)} + u_{j,i}^{(n-1)} \right) \right] dV + \\ &+ \int_{S_\sigma} p_i \left[f_i - u_i^{(n-1)} \right] dS = 0, \quad (2.4) \end{aligned}$$

$$\omega \in [\omega_1, \omega_2].$$

Функции $\lambda^{(n)}(x)$, $\mu^{(n)}(x)$ удовлетворяют ИУ (2.4), которое имеет непрерывное ядро внутри области V . Поскольку одного ИУ недостаточно для определения двух функций, аналогичным образом можно построить подобное уравнение при изменении, допустим, нагрузки, или при изменении ее носителя. При этом изменятся как ядра самих операторов, так и правые части операторных уравнений. Выражения (2.4) представляют собой вполне непрерывные операторы, и их обращение производится лишь на основе процедуры регуляризации [5, 6] в той или иной форме при наличии априорной информации о том, что искомые функции неотрицательны. Множество поиска можно сузить также при наличии дополнительной информации о носителе неизвестных функций (полость, включение) или при предположении зависимости лишь от одной координаты, что часто встречается в приложениях. Поверхностный интеграл описывает работу заданной нагрузки на дополнительных полях перемещений, характеризующих разность между компонентами на границе S_σ эталонного поля перемещений и перемещениями, заданными в обратной задаче. Процедура дискретизации интегрального оператора на основе простейших квадратурных (кубатурных) формул приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно узловых значений функций $\lambda^{(n)}(x)$, $\mu^{(n)}(x)$, которая оказывается плохо обусловленной и требует применения регуляризирующих алгоритмов при обращении. Отметим также, что вопрос о выборе отрезка изменения частоты колебаний является весьма важным как с точки зрения обоснования единственности поставлен-

ных обратных задач, так и с точки зрения построения эффективных численных схем. Как правило, этот отрезок необходимо выбирать в нерезонансном диапазоне.

В качестве примера рассмотрим далее различные варианты восстановления модуля сдвига в модельной задаче об антиплоских колебаниях бруса.

3. Реконструкция модуля сдвига в антиплоской задаче

Антиплоские колебания бруса с поперечным сечением S , $\partial S = l = l_1 \cup l_2$, описываются следующей краевой задачей [8]

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + \rho \omega^2 u = 0; \quad (3.1)$$

$$u|_{l_1} = 0, \quad \mu \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{l_2} = p,$$

где $\mu = \mu(x_1, x_2)$, $\rho = \rho(x_1, x_2)$ — модуль сдвига и плотность в общем случае являются функциями двух координат. При дополнительном условии вида (2.1)

$$u|_{l_2} = f(x, \omega), \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]$$

в обратной задаче соответствующее ИУ n -го приближения имеет вид

$$\begin{aligned} & \int_S \mu^{(n)} \left[\left(\frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial x_2} \right)^2 \right] dS - \\ & - \omega^2 \int_S \rho^{(n)} (u^{(n-1)})^2 dS + \\ & + \int_{l_2} p (f - u^{(n-1)}) dl_x = 0, \quad (3.2) \end{aligned}$$

$$\omega \in [\omega_1, \omega_2].$$

В частности, при постоянной плотности уравнение (3.2) преобразуется к виду [4, 8]

$$\begin{aligned} & \int_S \mu^{(n)} \left[\left(\frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u^{(n-1)}}{\partial x_2} \right)^2 \right] dS + \\ & + \int_{l_2} p (f - u^{(n-1)}) dl_x = 0, \quad (3.3) \end{aligned}$$

$$\omega \in [\omega_1, \omega_2].$$

Перейдем к безразмерным координатам и величинам (опуская в дальнейшем знак «тильды»)

$$x = x_1/a, \quad y = x_2/a,$$

$$\tilde{u} = u/a, \quad \tilde{\mu} = \mu/\mu_*, \quad \tilde{p} = p/\mu_*, \quad \tilde{\omega} = \omega a/c,$$

где a — характерный размер области S ; μ_* — характерное значение модуля сдвига для рассматриваемого материала, например, его значение в некоторой точке границы ∂S , доступной для измерения; $c = \sqrt{\rho/\mu_*}$ — скорость поперечных волн.

Решение $u^{(n-1)}(x, y)$ на каждом шаге в общем случае можно построить только численно, например, методом конечных элементов. При этом

$$u^{(n-1)}(x, y) = \sum_{k=1}^M U_k^{(n-1)} g_k(x, y), \quad (3.4)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

(M — количество узлов, $g_k(x, y)$ — соответствующие функции формы). Функцию $\mu^{(n)}(x, y)$ будем разыскивать в виде, аналогичном (3.4)

$$\mu^{(n)}(x, y) = \sum_{k=1}^N V_k^{(n)} h_k(x, y), \quad (3.5)$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

где функции формы $h_k(x, y)$ и количество узлов N , в частности, могут соответствовать функциям формы и конечно-элементному разбиению, порожденному (3.4). После подстановки (3.4), (3.5) в (3.3) для нахождения неизвестных узловых значений $V_k^{(n)}$ получим функциональное уравнение

$$\sum_{k=1}^N W_k^{(n)}(\omega) V_k^{(n)} = B^{(n)}(\omega), \quad (3.6)$$

$$\omega \in [\omega_1, \omega_2],$$

$$W_k^{(n)} = \sum_{r=1}^L \int_{S_r} h_k(x, y) \sum_{i,j=1}^M U_i^{(n-1)} U_j^{(n-1)} \times$$

$$\times \left[\frac{\partial g_i(x, y)}{\partial x} \frac{\partial g_j(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial g_i(x, y)}{\partial y} \frac{\partial g_j(x, y)}{\partial y} \right] dS,$$

$$B^{(n)} = \int_{l_2} p \left(\sum_{k=1}^M U_k^{(n-1)} g_k(x, y) - f \right) dl_x$$

(L — число конечных элементов).

Один из способов формирования системы алгебраических уравнений для определения $V_k^{(n)}$ состоит в выполнении равенства (3.6) в некотором наборе частот

$$\sum_{k=1}^N W_k^{(n)(\omega_q)} V_k^{(n)} = B^{(n)}(\omega_q), \quad (3.7)$$

$$q = 1, 2, \dots, N, \quad \omega_q \in [\omega_1, \omega_2].$$

Построенная система линейных алгебраических уравнений (3.7) является плохо обусловленной, поскольку соответствует вполне непрерывному оператору, и при ее обращении необходимо использовать регуляризацию.

4. Численные эксперименты

Рассмотрим случай, когда имеется априорная информация о том, что модуль сдвига зависит от одной координаты $\mu = \mu(x)$. Изучим колебания прямоугольной области $S = \{x, y | 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ (рис. 1).

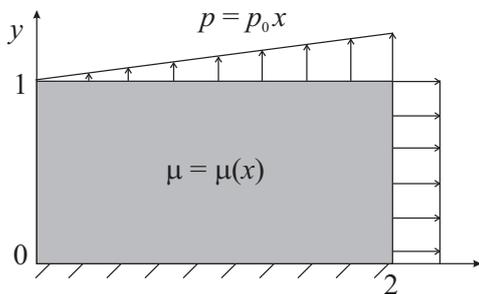


Рис. 1

Нижняя сторона прямоугольника закреплена, к части границы $y = 1$ приложены касательные напряжения, распределенные по линейному закону $p(x) = p_0 x$ (соответственно $p(y) = 0$ при $x = 0$, $p(y) = 2p_0$ при $x = 2$). В прямой задаче изучались две зависимости модуля сдвига от координаты x — линейная и квадратичная:

$$\mu(x) = m_1 + m_2 x, \quad \text{задача А}; \quad (4.1)$$

$$\mu(x) = m_1 - 2m_2 x(x - 2), \quad \text{задача В}; \quad (4.2)$$

причем обе задачи решались в конечноэлементном пакете FLEXPDE при значениях параметров $m_1 = 1$; $m_2 = 0, 1$; $p_0 = 0, 1$.

В качестве начального приближения $\mu^{(0)}(x)$ выбиралось либо постоянное значение, равное значению на торце

$$\mu^{(0)}(x) = \mu(0) = m_1, \quad (4.3)$$

либо среднее между минимальным и максимальными значениями $\mu(x)$

$$\mu^{(0)}(x) = m_1 + m_2. \quad (4.4)$$

Первым шагом на пути реконструкции зависимостей (4.1), (4.2) является исследование спектра собственных частот рассматриваемого тела, который определялся по АЧХ смещения на границе. На рис. 2 представлена частотная зависимость $u(0, 1)$ для задачи А (рис. 2а) и для задачи В (рис. 2б). Для выбора рабочего частотного интервала в задаче реконструкции нужно знать также частотный спектр в задачах нулевого приближения. Рис. 3 иллюстрирует аналогичные зависимости для приближений (4.3), (4.4) (рис. 3а, 3б, соответственно). Были выбраны два безразмерных частотных интервала $\Omega_1 = [2, 0; 3, 0]$ и $\Omega_2 = [4, 0; 5, 0]$.

Анализ этих зависимостей показывает, что в случае начального приближения вида (4.3) частотный спектр сдвигается, и использование интервала Ω_2 приведет к значительному различию порядков в коэффициентах линейной системы (3.7).

ЗАМЕЧАНИЕ. Информация о частотном спектре прямой задачи может быть использована для выбора начального приближения, которое обычно рекомендуется выбирать в виде линейной или квадратичной функции.

Если имеется априорная информация о степени изменяемости искомого модуля, то выбор частотного интервала может быть согласован с формой колебаний. Например, при малой изменяемости могут быть выбраны более низкие частоты. Для задачи А подходящими являются оба частотных интервала, а для задачи В — интервал Ω_2 . На рис. 4 представлены распределения $u(x, y)$ для частоты $\omega = 2, 9$ (рис. 4а, 4в, 4д) и $\omega = 4, 9$ (рис. 4б, 4г, 4е), причем зависимости (4.1) соответствуют рис. 4а, 4б, а (4.2), (4.4) отвечают рис. 4в, 4г и рис. 4д, 4е соответственно.

При формировании системы (3.7) область изменения координаты x (отрезок $[0; 2]$) разбивался на N равных частей точками x_k ($k = 1, 2, \dots, N + 1$), функции формы в представлении модуля (3.5) соответствовали кусочно-постоянному приближению (ступеньки), в численных экспериментах выбиралось $N = 10, 20$. Точки ω_q делили частотные интервалы Ω_1 и Ω_2 также на равные отрезки,

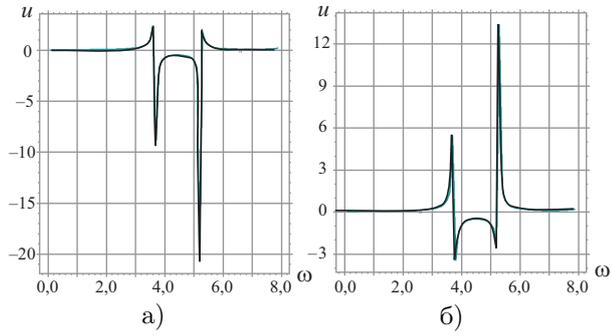


Рис. 2

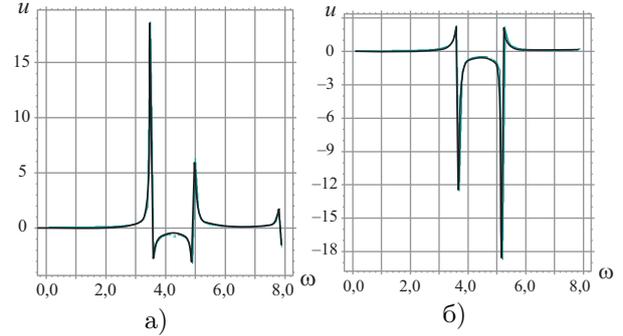


Рис. 3

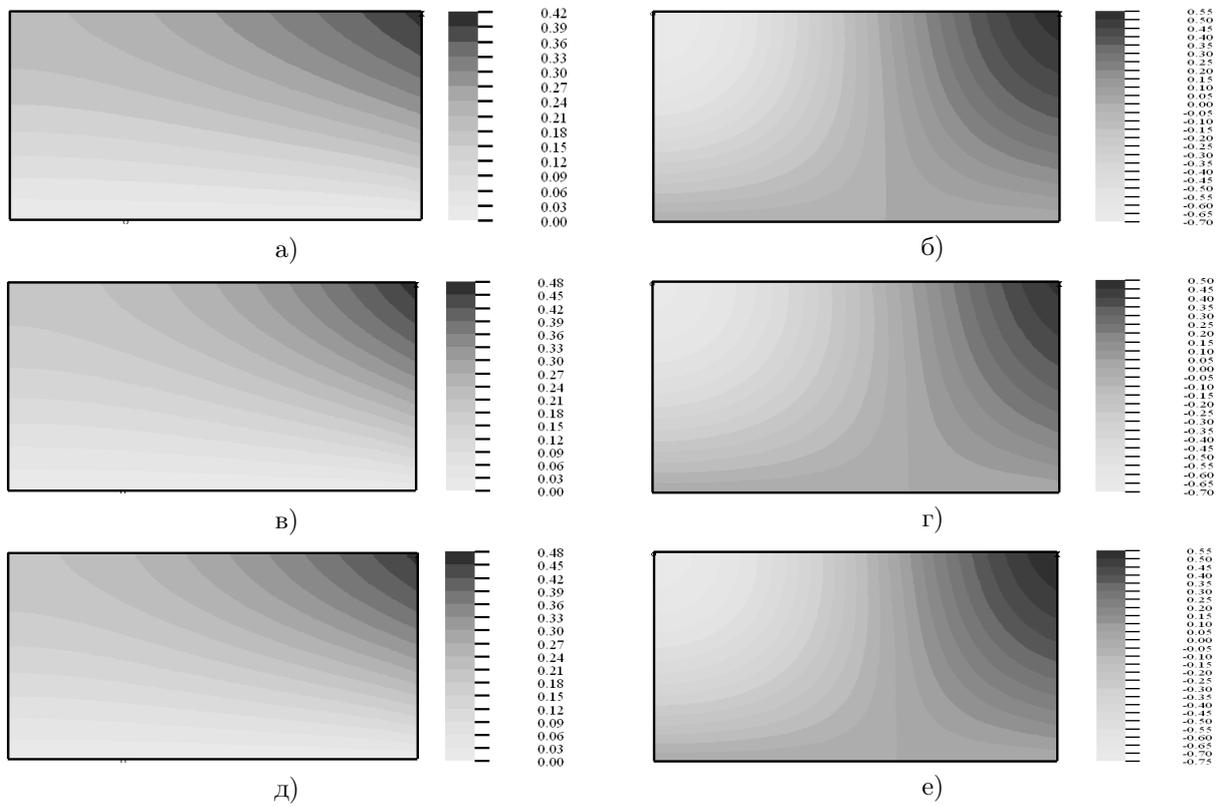


Рис. 4

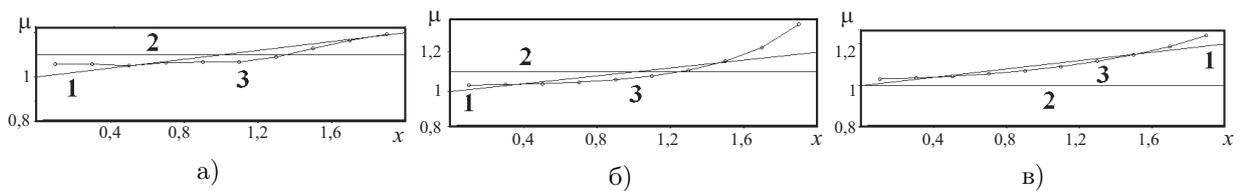


Рис. 5

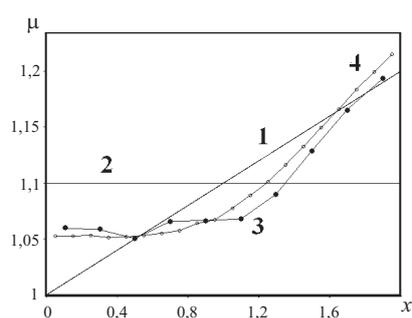


Рис. 6

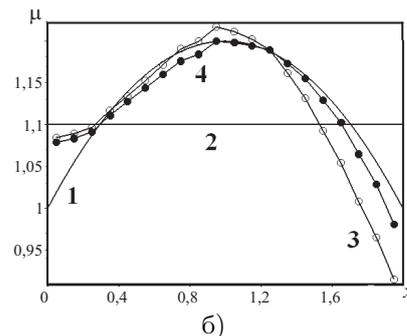
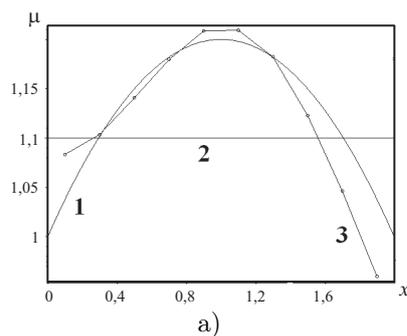


Рис. 7

причем частота ω_1 соответствовала началу интервала. Полученная таким способом система вида (3.7) решалась методом регуляризации А. Н. Тихонова [7]. Погрешность восстановления модуля для задачи **A** составила менее 7% для первого приближения и имела тенденцию к уменьшению (особенно во внутренних точках) при нахождении следующих приближений. На рис. 5 представлены результаты реконструкции модуля в задаче **A** ($N = 10$), причем цифрой 1 обозначено истинное распределение, цифрой 2 — начальное приближение и цифрой 3 — восстановленное значение (кривые со светлыми кружочками). Рис. 5а соответствует частотному интервалу Ω_2 , рис. 5б и 5в — интервалу Ω_1 при разных начальных приближениях.

Рис. 6 иллюстрирует результаты реконструкции модуля сдвига, соответствующие рис. 5а, а цифрой 4 отмечена кривая, отвечающая $N = 20$ (кривая со светлыми кружочками)

В случае задачи **B** удовлетворительные результаты реконструкции были получены при использовании частотного интервала Ω_2 и начального приближения (4.4). На рис. 7а представлены зависимости модуля $\mu(x)$ при $N = 10$ (обозначения такие, как на рис. 5), а на рис. 7б при $N = 20$. Увеличение числа базисных функций не привело к значительному уменьшению погрешности реконструкции, о чем свидетельствует кривая 3 на рис. 7б, однако использование следующего шага итерационного процесса (кривая — 4 с темными кружочками) улучшило точность реконструкции модуля, особенно во внутренних точках интервала.

Таким образом, результаты численных экспериментов показали принципиальную возможность реконструкции модуля сдвига по полю смещений на границе тела при априорной информации о его одномерности при помощи предлагаемой итерационной процедуры. Открытым остается вопрос об использовании предлагаемой схемы идентификации при диагностике модулей с сильной локализованной неоднородностью (полость, включение) и ее практической реализации.

Литература

1. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. М.: МГУ, 1994. 206 с.
2. Яхно В. Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. Новосибирск: Наука, 1990. 304 с.
3. Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В. Экстремальные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1988. 288 с.
4. Ватульян А. О. Интегральные уравнения в обратных задачах определения коэффициентов дифференциальных операторов теории упругости // ДАН. 2005. Т. 405. № 3. С. 343–345.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
6. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Едиториал УРСС, 2004. 480 с.
7. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 287 с.
8. Ватульян А. О., Соловьев А. Н. Идентификация неоднородностей в твердых телах // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Технические науки. Спецвыпуск «Проблемы машиностроения». 2005. С. 23–27.