УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЕКТРОУПРУГОГО СЛОЯ

Ворович Е. И.[1]***, Тукодова О. М.***[2]

AXIALLY SYMMETRIC DYNAMIC CONTACT PROBLEM FOR AN ELECTROELASTIC LAYER

Vorovich E. I., Tudokova O. M.

The work studies an axially symmetric problem about generating waves with a single electrode contacting with a $6mm$ piezo-crystal.

Рассматривается осесимметричная задача о колебаниях электрода на поверхности пьезоэлектрического слоя. Трение в области контакта электрода со средой отсутствует. Предполагается, что нижняя граница слоя жестко защемлена, металлизирована и закорочена. Поверхность среды свободна от механических напряжений. В области контакта задан электрический потенциал, вне этой области нормальная компонента электрической индукции равна нулю. В качестве электроупругого материала рассматривается поляризованная пьезокерамика и пьезокристаллы класса $6mm$ гексагональной сингонии.

Указанная динамическая смешанная задача электроупругости сводится к решению интегрального уравнения первого рода [1]. Построенные методом фиктивного поглощения эффективные приближенные решения интегрального уравнения позволили провести достаточно подробный численный анализ поведения электрической индукции в области контакта и электроупругого волнового поля вне этой области.

Интегральное уравнение (ИУ) в цилиндрических координатах имеет вид [1, 2]

$$\int_0^a k(r,\rho)\, d(\rho)\rho\, d\rho = f(r), \qquad (1)$$

$$0 \leqslant r \leqslant a, \quad r^2 = x_1^2 + x_2^2,$$

$$k(r,\rho) = \int_{\sigma_0} K(\alpha) J_0(\alpha r) J_0(\alpha\rho)\alpha\, d\alpha.$$

Здесь $d(r)$ — неизвестная электрическая индукция, a — радиус электрода, $J_0(r)$ — функция Бесселя нулевого порядка, $f(r)$ — известное значение электрического потенциала φ в области контакта, ω — круговая частота колебаний, $Ox_1x_2x_3$ — декартовая система координат.

Расположение контура σ_0 диктуется принципом предельного поглощения и определяется согласно правилам, установленным в работе [3].

Свойства функции $K(\alpha)$ описаны в [1, 2]. В соответствии с методом фиктивного поглощения функцию $K(\alpha)$ представим в виде произведения двух функций $K(\alpha) = S(\alpha)\Pi(\alpha)$ так, чтобы $S(\alpha)$ была регулярна на вещественной оси и имела асимптотическое поведение на бесконечности, совпадающее с аналогичным для $K(\alpha)$. Тогда функция $\Pi(\alpha)$ — регулярна всюду на вещественной оси, кроме конечного числа особых точек, совпадающих с особыми точками $K(\alpha)$ на вещественной оси, и обладает свойством $\Pi(\alpha) = 1 + O(|\alpha|^{-1})$, $|\alpha| \to \infty$. В качестве функции $S(\alpha)$ выберем $S = (\alpha^2 + \beta^2)^{-1/2}$, $B = \text{const}$.

Приближенное решение уравнения (1) для правой части $f(r) = J_0(\eta r)$ получено методом

[1]Ворович Елена Иосифовна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Донского государственного технического университета.

[2]Тукодова Ольга Мардиросовна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Донского государственного технического университета.

фиктивного поглощения и имеет вид

$$d(r,\eta) = J_0(\eta r)K^{-1}(\eta) + \frac{1}{2}\pi i a S^{-1}(\eta)\sum_{j=1}^{n}\beta_j J_n(z_j r)G_1(\eta,z_j) - \frac{1}{4}\pi^2 a\sum_{k=1}^{n}c_k\sum_{j=1}^{n}\beta_j J_0(z_j r)\times \times\sum_{l=1}^{n}\alpha_l J_0(p_l r_k)G_2(z_j,p_l) + e^{-B(a-r)}b(\eta)(a^2-r^2)^{-1/2} + \pi i\sqrt{\frac{1}{2}a\varepsilon}\,b(\eta)S_1(r) - \left[ie^{-B(a-r)}\sqrt{\frac{1}{2}\pi a}(a^2-r^2)^{-1/2} - \frac{1}{2}\pi a\sqrt{\varepsilon\pi}S_1(r)\right]\sum_{k=1}^{n}c_k S_2(r_k), \quad (2)$$

где

$$G_1(\eta,z) = \Big[\eta J_1(\eta a)H_0^{(1)}(za) - z J_0(\eta a)H_1^{(1)}(za)\Big](\eta^2-z^2)^{-1},$$

$$G_2(z,p) = \Big[pH_1^{(1)}(ap)H_0^{(1)}(az) - zH_0^{(1)}(ap)H_1^{(1)}(az)\Big](z^2-p^2)^{-1},$$

$$S_1(r) = \sum_{j=1}^{n}\beta_j H_0^{(1)}(z_j a)J_0(z_j r),$$

$$S_2(r_k) = \sum_{l=1}^{n}\alpha_l H_0^{(1)}(ap_l)J_0(p_l r_k)(B-ip_l)^{-1/2}.$$

Коэффициенты c_k определяются из следующей линейной алгебраической системы порядка n:

$$\sum_{k=1}^{n}c_k\sum_{l=1}^{n}\alpha_l J_0(p_l r_k)\Big\{G_1(z_m,p_l) + 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi(B-ip_l)}}J_0(z_m a)H_0^{(1)}(p_l a)\Big\} = \frac{2}{\pi i}\sqrt{\eta^2+B^2}\,G_0(z_m,\eta) + \frac{2}{\pi i}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{a}}J_0(z_m a)b(\eta), \quad (3)$$

$$m = 1,\dots,n,$$

$$G_0(\alpha,\eta) = \Big[\eta J_0(\alpha a)J_1(\eta a) - \alpha J_1(\alpha a)J_0(\eta a)\Big](\eta^2-\alpha^2)^{-1},$$

$$\alpha_j = \prod_{k=1}^{n}(p_j^2-z_k^2)\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}(p_j^2-p_k^2)^{-1},$$

$$\beta_i = \prod_{k=1}^{n}(z_i^2-p_k^2)\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}(z_i^2-z_k^2)^{-1}.$$

Здесь z_m, p_l — соответственно нули и полюсы функции $\Pi(\alpha)$, лежащие выше контура σ_0, r_k — точки, делящие интервал $(0,a)$ на равные отрезки. $J_n(\alpha)$, $H_n^{(1,2)}(\alpha)$ $(n=1,2)$ — функции Бесселя и Ханкеля 1 и 2 рода соответственно, η — параметр, характеризующий форму электрода.

При построении приближенного решения ИУ (1) используется аппроксимация функции $\Pi(\alpha) = S^{-1}(\alpha)K(\alpha)$. С этой целью предварительно рассчитываются вещественные и комплексные нули и полюсы $\Pi(\alpha)$, затем строится аппроксимирующая функция

$$K_*(\alpha) = S(\alpha)\Pi_*(\alpha)$$

так, чтобы $|K(\alpha)-K_*(\alpha)| < \varepsilon$ для любого наперед заданного ε. Этим, согласно [3], обеспечивается близость решений интегрального уравнения исходной задачи и задачи с подынтегральной функцией $K_*(\alpha)$. При этом функция $\Pi(\alpha)$ приближается рациональной функцией $\Pi_*(\alpha)$ вида

$$\Pi_*(\alpha) = \prod_{k=1}^{n}\frac{\alpha^2-z_k^2}{\alpha^2-p_k^2}.$$

Интегральное представление решения для электрического потенциала вне области контакта электрода со средой имеет вид

$$\varphi(r) = \int_0^\infty K(\alpha)D(\alpha)J_0(\alpha r)\alpha\,d\alpha, \quad (4)$$

$$D(\alpha) = \int_0^a d(\rho,\eta)J_0(\alpha\rho)\rho\,d\rho,$$

где $d(\rho,\eta)$ определяется выражением (2).

Из соотношений (4) с помощью теории вычетов получены приближенные формулы для

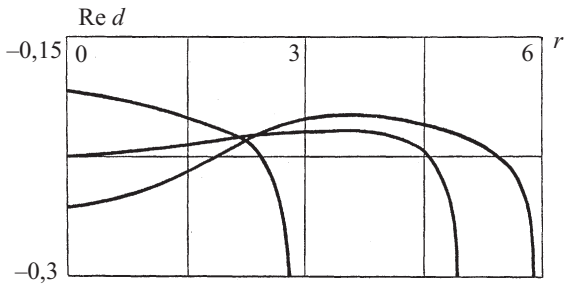

Рис. 1

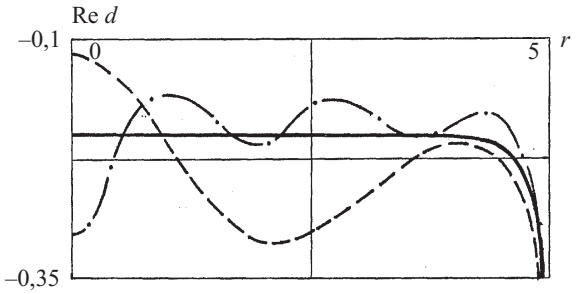

Рис. 2

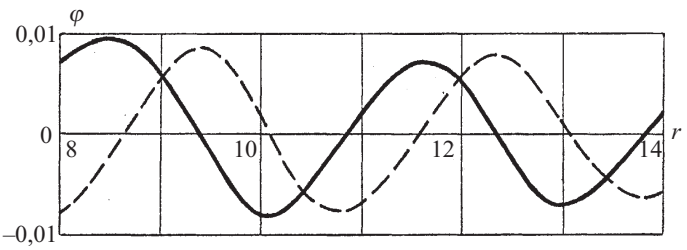

Рис. 3

определения амплитуд электрического потенциала

$$\varphi(r) = -i\pi \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} c_k \operatorname*{Res}_{\alpha=-p_j} Z(\alpha, r_k),$$

$$Z(\alpha, r_k) = K(\alpha) J_0(\alpha r_k) H_0^2(\alpha r)\alpha, \qquad (5)$$

$$r > a,$$

p_j — полюсы аппроксимирующей функции $K_*(\alpha)$, расположенные в верхней полуплоскости (выше контура σ_0).

На рис. 1 приведены зависимости $\operatorname{Re} d(r)$ для ZnO, $\omega = 2,6$ для различных размеров электрода $a = 3, 5, 6$ при заданном единичном потенциале в области контакта. На рис. 2 даны графики $\operatorname{Re} d(r)$ при различной частоте колебаний для слоя ZnO. Сплошной линии соответствует $\omega = 1,0$, штриховой — $\omega = 3,2$, штрих-пунктирной — $\omega = 7,0$. На основании приведенных результатов можно сделать вывод, что осцилляция электрической индукции увеличивается с ростом частоты и размеров электрода.

По формуле (5) был произведен расчет электрического потенциала при различных сочетаниях геометрических и электроупругих параметров задачи. Рис. 3 иллюстрируют поведение потенциала φ на поверхности слоя ZnO для частоты $\omega = 2,2$; 4,6 соответственно ($a = 5$). Сплошной линией нанесена реальная часть φ, штриховой — мнимая часть φ. С ростом частоты осцилляция потенциала увеличивается.

Литература

1. *Ворович И. И., Бабешко В. А., Пряхина О. Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
2. *Бабешко В. А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 254 с.
3. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 310 с.

Статья поступила 2 октября 2005 г.
Донской государственный технический университет
© Ворович Е. И., Тукодова О. М., 2006