УДК 539.3

О ПОВЕДЕНИИ КОНТАКТНОГО ДАВЛЕНИЯ НА РЕБРЕ ТРЕХМЕРНОГО УПРУГОГО КЛИНА[1]

Пожарский Д. А.[2]

BEHAVIOUR OF CONTACT PRESSURE ON THE EDGE OF A THREE-DIMENSIONAL ELASTIC WEDGE

Pozharsky D. A.

The normal contact pressure asymptotics is investigated on the edge of a three-dimensional elastic wedge at the vertex of a polygonal punch, one side of which terminates at the edge. The Bubnov-Galerkin method is used together with the Mellin transform. The Jacobi polynomials are chosen as basic functions, which are orthogonal with the weight taking into account the contact pressure behaviour both on the wedge edge (the weight is taken from the corresponding two-dimensional problem) and outside the edge (square root singularity).

Исследуется асимптотика нормального контактного давления на ребре трехмерного упругого тела, когда одна сторона полигонального штампа выходит на это ребро (например, одна сторона прямоугольного штампа достигает ребра упругого куба вне вершины куба). Силы трения не учитываются. В качестве простейшей модели берется контактная задача о клиновидном штампе, одна сторона-луч которого совпадает с ребром трехмерного упругого клина. Другая грань упругого клина либо свободна от напряжений (задача А), либо находится в условиях скользящей или жесткой заделки (задачи Б и В соответственно). Вне кончика штампа на ребре асимптотика контактного давления определяется из решения плоской контактной задачи для клина. Ее определение сводится к поиску нулей некоторой трансцендентной функции. Эта асимптотика не совпадает с известным поведением [1, 2] нормального напряжения при стремлении к ребру (вершине) трехмерного (двумерного) упругого клина по биссектрисе, когда область контакта не выходит на ребро или вне ребра действует заданная нормальная нагрузка, поскольку это поведение определяется полюсами той же самой трансцендентной функции независимо от размерности задачи. Кончик штампа на ребре клина дает трехмерную сингулярную точку, исследование которой уже не сводится к решению трансцендентных уравнений. Для определения асимптотики контактного давления в этой точке к интегральному уравнению контактной задачи применяется преобразование Меллина. Затем для поиска спектра возникающего интегрального оператора применяется метод Бубнова–Галеркина. В качестве базисных функций используются полиномы Якоби, ортогональные с весом, который учитывает поведение контактного давления как на лучевой границе области контакта, идущей по ребру клина (показатель веса берется из плоской контактной задачи для клина), так и на лучевой границе вне ребра (корневая особенность). Задача сводится к поиску комплексных нулей детерминанта некоторой бесконечномерной матрицы, которую достаточно урезать до размерности 5–30. При аналитическом продолжении преобразования Меллина явно выделяются полюса элементов этой матрицы, связанные с полюсами указанной выше трансцендентной функции. Поэтому в общем случае можно утверждать, что множество комплексных показателей особенностей в кончике штампа на ребре также не совпадает с множеством показателей асимптотики нормального напряжения на ребре, когда область контакта не достигает ребра клина. Однако для частных значений углов раствора штампа

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (04-01-00119, 05-01-00002).

[2]Пожарский Дмитрий Александрович, д-р физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, заведующий кафедрой Ростовской-на-Дону государственной академии сельскохозяйственного машиностроения.

полюса элементов матрицы могут оказаться устранимыми. Приводятся примеры.

Используя известную связь контактных задач и задач о разрезах [3–6], аналитически установлено и численно проверено, что асимптотика нормального контактного давления в вершине штампа на ребре клина совпадает с асимптотикой нормального напряжения вне клиновидной трещины нормального отрыва в срединной полуплоскости трехмерного клина вдвое большего угла раствора, когда область трещины дополняет область контакта до срединной полуплоскости клина. При этом на гранях клина с трещиной ставятся те же граничные условия, что и на той грани клина из контактной задачи, где нет штампа. Для контактной задачи А для упругого четвертьпространства результаты согласуются с результатами для клиновидной трещины, выходящей по лучу на свободную границу полупространства [7, 8] (плоскость трещины ортогональна границе полупространства).

Для поиска трехмерных сингулярностей в задачах о трещинах проводилась дискретизация как по всему пространству [9] (возникают системы 10–20 тысяч алгебраических уравнений), так и по сферическим углам [7] после выделения фактора $\rho^{-\gamma}$ (ρ — расстояние до вершины, γ — искомый показатель особенности) с использованием более 500 уравнений. Преобразование Меллина и полиномы Якоби применялись для задачи о клиновидной трещине в полупространстве [8], однако точный вес (ортогональности полиномов) из решения плоской задачи о трещине приводит к расходящимся рядам, поэтому приходится брать следующий корень трансцендентного уравнения. При исследовании контактной задачи, когда только кончик клиновидного штампа достигает ребра клина [2], в качестве базисных функций брались полиномы Чебышева первого рода, являющиеся частным случаем полиномов Якоби [10].

Ядро интегрального уравнения контактных задач А, Б, В можно записать в виде ряда по степеням $(1-2\nu)^n$ ($n = 0, 1, \ldots$), где ν — коэффициент Пуассона [2]. Для главного члена ядра показатель степени $n = 0$. Для простоты, не ограничивая общность используемой методики, рассмотрим это интегральное уравнение при $\nu = 0{,}5$, когда оно принимает вид [2]

$$\int\limits_{\Omega} \frac{q(x,y)}{R_*}\,dx\,dy = 4\pi G f(r,z), \quad (r,z) \in \Omega, \quad (1)$$

где

$$\frac{1}{R_*} = \frac{4}{\pi^2}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \operatorname{sh}\pi u W(u,\alpha)\times \\ \times K_{iu}(tx)K_{iu}(tr)\cos t(y-z)\,dt\,du. \quad (2)$$

Здесь r, z — прямоугольные координаты на грани клина, ось z совпадает с ребром клина ($0 \le r < \infty$, $|z| < \infty$); $q(r,z) = -\sigma_\varphi(r, \alpha/2, z)$ — неизвестное нормальное контактное давление в клиновидной области Ω: $0 \le \rho < \infty$, $\pi/2 - 2\beta \le \psi \le \pi/2$ ($r = \rho\cos\psi$, $z = \rho\sin\psi$; $x = \xi\cos\eta$, $y = \xi\sin\eta$); G — модуль сдвига; функция $f(r,z)$ учитывает форму основания, осадку и перекос штампа; α — угол раствора упругого клина. Для задачи А

$$W(u,\alpha) = \frac{\operatorname{sh}2\alpha u + u\sin 2\alpha}{2(\operatorname{sh}^2\alpha u - u^2\sin^2\alpha)}; \quad (3)$$

для задачи Б

$$W(u,\alpha) = \frac{\operatorname{ch}2\alpha u - \cos 2\alpha}{\operatorname{sh}2\alpha u + u\sin 2\alpha}; \quad (4)$$

для задачи В в общем случае функция-символ ядра зависит от $\kappa = 3 - 4\nu$:

$$W(u,\alpha) = \frac{\kappa\operatorname{sh}2\alpha u - u\sin 2\alpha}{\kappa\operatorname{ch}2\alpha u + 2u^2\sin^2\alpha + 0{,}5(1+\kappa^2)}. \quad (5)$$

Отметим, что для задачи А при $W(u,\pi) = \operatorname{cth}\pi u$ ядро $R_*^{-1} = R^{-1} = [(x-r)^2 + (y-z)^2]^{-1/2}$ [10].

Показатели асимптотики нормального напряжения на ребре клина (кроме кончика клиновидного штампа) определяются полюсами или нулями функций (3)–(5) в комплексной u-плоскости независимо от отброшенных членов по степеням $(1-2\nu)^n$ ($n = 1, 2, \ldots$) в ядре уравнения (1).

Если произвольная область контакта не выходит на ребро клина, то после решения интегрального уравнения (1) имеем задачу о действии известной нормальной нагрузки на грани трехмерного клина. Как и в аналогичных плоских задачах для клина [1, 11], в которых функции-символы $W(u,\alpha)$ точно такие же, каждый их полюс $i\gamma_k$, $\operatorname{Re}\gamma_k > 0$ ($k = 1, 2, \ldots$) дает вклад $r^{\gamma_k - 1}$ в асимптотику $\sigma_\varphi(r, 0, z)$ при $r \to 0$. Первые несколько полюсов затабулированы [1], известно расположение и асимптотика бóльших полюсов [12]. При $\alpha < \alpha_*$ напряжение на ребре стремится к нулю, а при $\alpha > \alpha_*$ — к бесконечности, где

$\alpha_* = \pi$ для задачи А, $\alpha_* = \pi/2$ для задачи Б и $\alpha_* = \arcsin\sqrt{1-\nu}$ для задачи В [1, 11].

Если произвольная область контакта выходит на ребро клина по отрезку (лучу), то показатель особенности контактного давления на этом отрезке (луче) кроме его концов совпадает с показателем особенности контактного давления в вершине клина в соответствующей плоской контактной задаче. Этот показатель определяется нулями функций (3)–(5) или полюсами функций $W^{-1}(u,\alpha)$, возникающих после распространения уравнения (1) на всю грань клина и обращения интегральных преобразований Фурье–Конторовича–Лебедева (преобразования Меллина для плоских контактных задач). При этом возникают ядра соответствующих задач о трещине нормального отрыва в середине клина вдвое большего угла раствора [5–7, 13]. Каждый нуль $i\delta_k$, $\operatorname{Re}\delta_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ функции $W(u,\alpha)$ дает вклад $r^{\delta_k - 1}$ в асимптотику $q(r,z)$ при $r \to 0$. Главный член асимптотики определяется δ_1 с наименьшей действительной частью. Например, для задачи А при $\alpha = \pi$ значение $\delta_1 = 0{,}5$ дает известную корневую особенность. Отметим, что для задачи А при $\alpha < \pi/2$ число δ_1 комплексное, что приводит к осцилляции контактного давления в окрестности ребра и невозможности осуществления полного контакта. Частота осцилляции возрастает при уменьшении α. Для задачи А при $\alpha \geq \pi/2$ и для задач Б и В при всех значениях α число δ_1 вещественное (нет осцилляций давления). При $r \to 0$ в задаче А $q(r,z) \to 0$ при $\alpha \leq \pi/2$ и $q(r,z) \to \infty$ при $\alpha > \pi/2$. Для задачи Б нули функции (4) находятся в явном виде, давая асимптотику $q(r,z) \sim r^{\pi m/\alpha - 2}$ при $r \to 0$, где $m = 1$ при $\alpha < \pi$ и $m = 2$ при $\alpha \geq \pi$. Например, при $\alpha = \pi/2$ в задаче Б $q(0,z) \sim \text{const}$: это давление соответствует давлению в центре области контакта в симметричной задаче А для упругого полупространства. При $r \to 0$ в задаче В $q(r,z) \to 0$ при $\alpha < \alpha^*$, $q(r,z) \sim \text{const}$ при $\alpha = \alpha^*$ и $q(r,z) \to \infty$ при $\alpha > \alpha^*$, где $\alpha^* = \pi/2$ при $0 \leq \nu < 0{,}5$ и $\alpha^* = 128{,}5^\circ$ при $\nu = 0{,}5$ [1].

Разложим мероморфные функции (3)–(5) по их главным значениям [12]

$$W(u,\alpha) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s_k\,u}{u^2+\gamma_k^2}, \quad \gamma_0 = 0, \qquad s_0 = \frac{\pi}{2}\lim_{u\to 0} u\,W(u,\alpha), \tag{6}$$

$$\operatorname{Re}\gamma_k > 0, \quad s_k = \pi i\gamma_k\left\{\left[\frac{i\gamma_k}{W(i\gamma_k,\alpha)}\right]'\right\}^{-1} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Ряд в формуле (6) без нулевого члена сходится равномерно при $0 \leq u \leq \infty$, вместе с формулами 6.672.3, 7.213 [10] позволяет выполнить квадратуры в (2) и записать ядро в виде

$$\frac{1}{R_*} = \frac{2}{\pi\sqrt{xr}}\sum_{k=0}^{\infty} s_k\,Q_{\gamma_k - 1/2}\times \times\left(\frac{x^2+r^2+(y-z)^2}{2xr}\right). \tag{7}$$

В частном случае задачи А для полупространства ($R_* = R$; $\gamma_k = k$; $s_0 = 0{,}5$, $s_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots$) (7) совпадает с известной формулой 3.10.3 [14].

Для исследования асимптотики контактного давления в кончике клиновидного штампа на ребре упругого клина согласно методике [2,3] перейдем в (1), (7) к полярным координатам ρ, ψ и ξ, η, обозначая $f_*(\rho,\psi) = f(r,z)$, $q_*(\xi,\eta) = q(x,y)$ и налагая на эти функции ограничения [2, 8], обеспечивающие конечность потенциальной энергии деформации. Применим к обеим частям формул (1), (7) преобразование Меллина

$$\int_0^\infty \frac{\rho^{s-1/2}}{R_*}\,d\rho = \xi^{s-1/2}\,V_s(\eta,\psi),$$

$$V_s(\eta,\psi) = \frac{2}{\pi\sqrt{c_*}}\sum_{k=0}^{\infty} s_k\int_0^\infty t^{s-1}\,Q_{\gamma_k-1/2}(t_*)\,dt, \tag{8}$$

$$t_* = \frac{1+t^2-2ts_*}{2tc_*},$$

$$c_* = \cos\eta\cos\psi, \quad s_* = \sin\eta\sin\psi.$$

При $R_* = R$ известно [2], что

$$V_s(\eta,\psi) = \frac{\pi}{\cos\pi s}\,P_{s-1/2}(-\cos(\eta-\psi)) \quad (|s| < \infty). \tag{9}$$

В силу асимптотической формулы 8.776.2 [10]

$$Q_\mu(t_*) \sim \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu+1)}{2^{\mu+1}\,\Gamma(\mu+3/2)}\,\frac{1}{t_*^{\mu+1}}, \quad (t_* \to +\infty) \tag{10}$$

интегралы в (8) сходятся в полосе $|\operatorname{Im} s| < 1/2$. Для поиска особенностей контактного давления требуется аналитически продолжить преобразование Меллина (8) вне этой полосы. Аналитическое продолжение осуществляется методом Эйлера (как Г-функции) с использованием асимптотики (10) и, например, для случая $R_* = R$ и полосы $|\operatorname{Im} s| < 5/2$ имеет вид

$$V_s(\eta,\psi) = \frac{2}{\pi\sqrt{c_*}}\left\{\frac{1}{2}\int\limits_0^1 t^{s-1}\times\right.$$
$$\times\left[Q_{-1/2}(t_*) - \pi\sqrt{c_*}(t^{1/2}+s_*t^{3/2})\right]dt+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_1^\infty t^{s-1}\left[Q_{-1/2}(t_*)-\pi\sqrt{c_*}\left(\frac{1}{t^{1/2}}+\frac{s_*}{t^{3/2}}\right)\right]dt+$$
$$+\int\limits_0^1 t^{s-1}\left[Q_{-1/2}(t_*) - \frac{\pi}{2}\,c_*^{3/2}\,t^{3/2}\right]dt+$$
$$+\int\limits_1^\infty t^{s-1}\left[Q_{-1/2}(t_*) - \frac{\pi}{2}\,\frac{c_*^{3/2}}{t^{3/2}}\right]dt+$$
$$\left.+\sum_{k=2}^\infty s_k\int\limits_0^\infty t^{s-1}\,Q_{k-1/2}(t_*)\,dt\right\}-$$
$$-\frac{1}{s^2-1/4}-\frac{3\cos(\eta-\psi)}{s^2-9/4}. \quad (11)$$

Представления (9) и (11) совпадают в полосе $|\operatorname{Im} s| < 5/2$. В общем случае при аналитическом продолжении (8) во всю s-плоскость явно выделяются полюса $s = \pm(\gamma_k + 1/2 + n)$ $(k, n = 0, 1, \ldots)$ функции V_s.

К функции распределения контактного давления также применим преобразование Меллина

$$\int\limits_0^\infty q_*(\xi,\eta)\,\xi^{s+1/2}\,d\xi = q_s(\eta) \quad (12)$$

и введем новые переменные

$$\eta = \beta\eta_* + \beta_*,$$

$$\psi = \beta\psi_* + \beta_*,$$

$$\beta_* = \pi/2 - \beta.$$

Тогда интегральное уравнение (1) сводится к одномерному интегральному уравнению

$$\int\limits_{-1}^1 q_s^*(\eta_*)\,V_s(\beta\eta_*+\beta_*,\beta\psi_*+\beta_*)\,d\eta_* = \frac{4\pi G}{\beta}\,f_s^*(\psi_*) \quad (13)$$

$$(|\psi_*|\le 1),$$
$$q_s^*(\eta_*) = q_s(\eta),$$
$$f_s^*(\psi_*) = f_s(\psi) = \int\limits_0^\infty f_*(\rho,\psi)\,\rho^{s-1/2}\,d\rho.$$

Искомая функция контактного давления выражается на основании (12) интегралом Меллина

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma q_s^*(\psi_*)\,\rho^{-s-3/2}\,ds = q_*(\rho,\psi_*), \quad (14)$$

где Γ — прямая в комплексной s-плоскости параллельная мнимой оси и лежащая правее мнимой оси, но левее первого полюса функции q_s^* по переменной s в правой полуплоскости. Полюсами s_k функции q_s^* будут те значения параметра s, при которых могут существовать нетривиальные решения однородного уравнения (13), т.е. точки спектра интегрального оператора (13). При этом s_k не зависят от ψ_*.

Для нахождения s_k проводится дискретизация уравнения (13) по методу Бубнова–Галеркина: решение ищется в виде разложения по ортогональным полиномам Якоби с весом, учитывающим поведение контактного давления на границе области Ω

$$q_s^*(\eta_*) = \sum_{m=0}^\infty t_m(s)\,w_m(\eta_*),$$

$$w_m(\eta_*) = (1-\eta_*)^\varepsilon(1+\eta_*)^{-1/2}P_m^{(\varepsilon,-1/2)}(\eta_*). \quad (15)$$

На ребре клина ($\eta_* = 1$) показатель особенности контактного давления берется из решения плоской контактной задачи: $\varepsilon = \delta_1 - 1$, где δ_1 — такое число с наименьшей строго положительной действительной частью, что $W(i\delta_1,\alpha) = 0$. Число δ_1 является комплексным только для задачи А при $\alpha < \pi/2$. В этом случае в (15) надо учитывать также базисные функции, соответствующие $\varepsilon = \bar{\delta}_1 - 1$. Для определения $t_m(s)$ невязка, являющаяся непрерывной функцией

Показатели особенности γ

Задача	α	ν	ε	$2\beta/\pi$				
				0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
А	$\pi/2$	0,5	1	1,08	0,64	0,34	−0,20	−0,99
А	$\pi/2$	0,3	1	0,90	0,62	0,46	0,27	0,04
Б	$\pi/2$	$\forall$	0	0,81	0,67	0,50	0,26	0,03
Б	$3\pi/2$	$\forall$	$-2/3$	0,87	0,83	0,79	0,76	0,72
В	π	0,5	0	0,45	0,32	0,18	0,07	−0,01

на отрезке $|\eta_*| \leq 1$, раскладывается по второму базису из полной системы полиномов Лежандра $P_l(\psi_*)$ $(l = 0, 1, \ldots)$. В результате относительно неизвестных коэффициентов $t_m(s)$ возникает бесконечная система линейных алгебраических уравнений, матрица которой состоит из элементов

$$a_{lm}(s) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} V_s(\beta\eta_* + \beta_*, \beta\psi_* + \beta_*) \times \\ \times w_m(\eta_*)\, P_l(\psi_*)\, d\eta_* d\psi_*, \quad (16)$$

$$l, m = 0, 1, \ldots.$$

Если при $s = s_k$ детерминант $d(s)$ бесконечномерной матрицы с элементами (16) обращается в нуль, то в соответствии с (14) $q_*(\rho, \psi) \sim \rho^{-\gamma}$ $(\gamma = 3/2 + s_k)$ при $\rho \to 0$. Для определения показателей γ, допустимых с точки зрения конечности потенциальной энергии деформации, уравнение $d(s) = 0$ следует решать в полуплоскости $\operatorname{Re} s \leq 0$ ($\operatorname{Re} s < 0$ при $\operatorname{Im} s = 0$).

В таблице представлены результаты ряда расчетов при разных углах 2β раствора штампа. Для задачи А для упругого четвертьпространства полученные значения γ совпадают со значениями показателя особенности нормального напряжения вне клиновидной трещины, выходящей на границу упругого полупространства [7, 8] (область трещины дополняет область контакта до полуплоскости). Факт совпадения следует из связи интегральных уравнений контактной задачи и задачи о трещине и легко обобщается для контактной задачи для клина произвольного угла раствора и задачи о трещине в клине вдвое большего угла раствора [6] (для трещины в пространстве и контактной задачи для полупространства, когда клиновидная область контакта дополняет область трещины до плоскости доказательство см. [3, с. 146]).

В результате аналитического продолжения каждый элемент (16) имеет полюса в точках $s = -(\gamma_k + 1/2 + n)$ $(\operatorname{Re}\gamma_k \geqslant 0;\ k, n = 0, 1, \ldots)$, связанные с полюсами $\pm i\gamma_k$ функций (3)–(5) и с показателями особенности нормального напряжения на ребре клина, когда область контакта не выходит на ребро. Однако при каком-то значении 2β некоторый полюс может оказаться устранимым, давая нуль детерминанта $d(s)$. Это происходит, например, для задачи А при $\alpha = \pi/2$, $\nu = 0{,}5$ и $2\beta = 0{,}634$, когда $s = -3/2$ и $\gamma = 0$.

Возвращаясь к примеру о прямоугольном плоском штампе на грани упругого куба, когда одна сторона штампа достигает ребра куба (вне вершины куба), отметим следующие четыре особенности контактного давления. На трех сторонах прямоугольника контакта имеется корневая особенность с показателем $-0{,}5$. На четвертой стороне прямоугольника контакта, совпадающей с ребром куба, давление, как следует из решения плоской задачи, ведет себя как r^{ε} ($\varepsilon = 1$, r — расстояние до ребра) при $r \to 0$. В двух вершинах прямоугольника, не выходящих на ребро куба, имеется локальная особенность вида $\rho_*^{-0{,}70}$ [2, 3] (ρ_* — расстояние до вершины). Наконец, в двух вершинах прямоугольника на ребре куба показатель γ зависит от коэффициента Пуассона и при $\nu = 0{,}3$ дает особенность $\rho^{-0{,}46}$ (таблица).

Литература

1. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.-Л.: АН СССР, 1963. 367 с.
2. *Александров В. М., Пожарский Д. А.* Неклассические пространственные задачи механики контактных взаимодействий упругих тел. М.: Факториал, 1998. 288 с.
3. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
4. *Пожарский Д. А.* Об эллиптической трещине в упругом пространственном клине // Изв. АН. МТТ. 1993. Т. 28. № 6. С. 105–112.

5. *Пожарский Д. А.* О пространственной задаче для упругого клина, имеющего полосовой разрез // ПММ. 1994. Т. 58. В. 5. С. 148–153.
6. *Пожарский Д. А.* О клиновидном разрезе в трехмерном упругом клине // Прикл. механика. 1999. Т. 35. № 3. С. 27–32.
7. *Ghahremani F., Shih C. F.* Corner singularities of three-dimensional planar interface cracks // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1992. V. 59. No. 3. P. 61–68.
8. *Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Лапина О. Н.* Показатели сингулярности упругих напряжений в точке выхода трещины на поверхность // Изв. АН. МТТ. 1998. № 5. С. 146–153.
9. *Becker I., Schnack E.* Numerical calculation of singularities at reentrant edges and corners for three dimensional crack problems // ZAMM. 1990. Bd. 70. No. 11. P. 529–530.
10. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
11. *Александров В. М., Ромалис Б. Л.* Контактные задачи в машиностроении. М.: Машиностроение, 1986. 174 с.
12. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
13. *Александров В. М., Сметанин Б. И., Соболь Б. В.* Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 222 с.
14. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрические функции. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965. 294 с.

Статья поступила 15 августа 2005 г.
Ростовская-на-Дону государственная академия сельскохозяйственного машиностроения
© Пожарский Д. А., 2006