УДК 539.3

КОНТАКТ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ С УПРУГИМ ПРЕПЯТСТВИЕМ ТИПА ВИНКЛЕРА

Л. П. Лебедев[1], ***А. Б. Неймарк***[2]

CONTACT PROBLEM FOR NONLINEAR SHALLOW SHELL AND AN ELASTIC OBSTACLE OF WINKLER'S TYPE

Lebedev L.P., Neymark A.B.

The existence of generalized solution for the equilibrium problem of the nonlinear Marguerre-Vlasov model of a shallow shell is proved. Displacements of points on the shell are restricted by the presence of an elastic obstacle of Winkler's type. The contact of the shell and the obstacle is supposed to be without friction. The solution of the problem under consideration is a minimizer of the total energy of the shell-obstacle system.

1. Постановка задачи

Рассматривается тонкая пологая оболочка модели Власова [1] постоянной толщины $2h$. Ее срединная поверхность σ задается радиус-вектором $\rho(x_1,x_2) = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + z(x_1,x_2)\mathbf{k}$, $z\colon \Omega \to R$, $z \in C^{(2)}(\Omega)$ ($\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — орты декартовой системы координат Ox_1, x_2, x_3. Множество Ω является открытой связной ограниченной областью и вместе со своей границей Γ удовлетворяет условиям теорем вложения Соболева. Энергия деформации оболочки в зависимости от перемещения срединной поверхности $\mathbf{u} = (u_1, u_2, w)$ имеет вид

$$E(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\iint\limits_{\Omega} (M_1\kappa_1 + M_2\kappa_2 + 2M_{12}\kappa_{12} + $$

$$+ T_1\varepsilon_1 + T_2\varepsilon_2 + T_{12}\varepsilon_{12})\, dx_1\, dx_2,$$

$$M_1 = D(\kappa_1 + \nu\kappa_2), \quad M_2 = D(\kappa_2 + \nu\kappa_1),$$
$$M_{12} = D(1-\nu)\kappa_{12},$$

$$T_1 = B(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2), \quad T_2 = B(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1),$$
$$T_{12} = \frac{1}{2}B(1-\nu)\varepsilon_{12},$$

$$\kappa_1 = -\partial_{11}w, \quad \kappa_2 = -\partial_{22}w, \quad \kappa_{12} = -\partial_{12}w,$$

$$\varepsilon_1 = \partial_1 u_1 + k_1 w + \frac{1}{2}(\partial_1 w)^2,$$

$$\varepsilon_2 = \partial_2 u_2 + k_2 w + \frac{1}{2}(\partial_2 w)^2,$$

$$\varepsilon_{12} = \partial_2 u_1 + \partial_1 u_2 + \partial_1 w \partial_2 w,$$

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2.$$

Здесь M_1, M_2, M_{12} — изгибающие моменты; κ_1, κ_2, κ_{12} — изменения кривизны срединной поверхности; k_1, k_2 — главные кривизны; T_1, T_2, T_{12} — растягивающие усилия; ε_1, ε_2, ε_{12} — деформации; B, D — жесткости на растяжение и изгиб; ν — коэффициент Пуассона; w — нормальное, а u_1, u_2 — тангенциальные перемещения срединной поверхности.

Действующие на оболочку внешняя распределенная нагрузка $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$, отнесенная к срединной поверхности оболочки, и граничная нагрузка $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$ совершают на смещении $\mathbf{u}$ работу

$$A(\mathbf{u}) = \iint\limits_{\Omega} (f_1 u_1 + f_2 u_2 + f_3 w) dx_1 dx_2 +$$

$$+ \oint\limits_{\Gamma} (q_1 u_1 + q_2 u_2 + q_3 w) ds.$$

Оболочка закреплена так, что справедливы условия

$$w|_{\Gamma_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_{\Gamma_2} = 0, \tag{1.1}$$

[1]Лебедев Леонид Петрович, д-р физ.-мат. наук, профессор отделения математики Национального университета Колумбии. E-mail: `lebedev@cable.net.co`

[2]Неймарк Алексей Борисович, аспирант механико-математического факультета РГУ. E-mail: `lyops@fromru.com`

$$u_1|_{\Gamma_3} = u_2|_{\Gamma_3} = 0, \tag{1.2}$$

где длины участков Γ_1, Γ_2, Γ_3 границы Γ не равны нулю. Для полноты постановки задачи краевые условия (1.1), (1.2) дополняются естественными граничными условиями таким образом, чтобы в каждой граничной точке было задано четыре краевых условия. Явный вид естественных граничных условий, которые связывают растягивающие усилия и изгибающие моменты срединной поверхности на границе Γ с действующей там нагрузкой $\mathbf{q}$, не приводится, так как он не влияет на ход рассуждений.

Для рассматриваемой модели оболочки (1.1) не является обязательным условием закрепления в нормальном направлении, при котором доказана теорема существования. Оно может быть заменено менее жестким условием $w(x_1^i, x_2^i) = 0$, $i = 1, 2, 3$, где точки $(x_1^i, x_2^i) \in \Omega$ не лежат на одной прямой [2,3].

Для тангенциальных перемещений u_1, u_2 условие (1.2) выбиралось так, чтобы было справедливо неравенство Корна для плоской задачи теории упругости:

$$\iint\limits_{\Omega} (u_1^2 + u_2^2 + (\partial_1 u_1)^2 + (\partial_2 u_1)^2 + \\ + (\partial_1 u_2)^2 + (\partial_2 u_2)^2)\, dx_1\, dx_2 \leqslant \\ \leqslant M \iint\limits_{\Omega} ((\partial_1 u_1)^2 + (\partial_2 u_2)^2 + \\ + (\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2)^2)\, dx_1\, dx_2. \tag{1.3}$$

Поэтому вместо условия (1.2) можно использовать любые другие граничные условия для тангенциальных смещений, гарантирующие выполнение неравенства (1.3).

Соотношения (1.1), (1.2) определяют для оболочки множество возможных перемещений $\mathbf{V} = \mathbf{C}_1 \times C_2$. Множество $\mathbf{C}_1$ состоит из вектор-функций $\tilde{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$, $u_1, u_2 \in C^{(1)}(\Omega)$, таких, что выполнено условие (1.2). Множество C_2 состоит из функций $w \in C^{(2)}(\Omega)$, для которых справедливо условие (1.1).

Перемещения точек оболочки ограничены наличием упругого препятствия типа Винклера, поверхность которого предполагается пологой и задается на множестве $\Omega_0 \subset \Omega$ радиус-вектором $x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + g(x_1, x_2)\mathbf{k}$, $g : \Omega_0 \to R$. Упругость препятствия заключается в следующем: на точку с актуальными координатами X_1, X_2, X_3 деформированной поверхности препятствия действует сила упругости $c(g(X_1, X_2) - X_3)\mathbf{k}$, где константа c означает коэффициент упругости препятствия.

Будем считать, что оболочка может контактировать без трения с препятствием посредством лицевой поверхности, радиус-вектор которой в силу пологости оболочки будем представлять в виде $x_1\mathbf{i}+x_2\mathbf{j}+(z-h)\mathbf{k}$. Тогда при деформации оболочки в препятствии накапливается энергия

$$E_g(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \iint\limits_{\Omega_0} c\chi^2(g - z + h - w)\, dx_1\, dx_2,$$

$$\chi(t) = \begin{cases} t, & \text{если } t \geqslant 0; \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

Так как контакт оболочки с препятствием происходит без трения, то решение задачи о равновесии оболочки, контактирующей с упругим препятствием, можно искать как вектор-функцию $\mathbf{u}$, минимизирующую на $\mathbf{V}$ функционал полной энергии деформированной системы оболочка–препятствие $I(\mathbf{u}) = E(\mathbf{u}) + E_g(\mathbf{u}) - A(\mathbf{u})$.

2. Разрешимость

Введем энергетические пространства для оболочки. Пусть пространство $\mathbf{H}_1$ — пополнение множества $\mathbf{C}_1$ по метрике пространства $W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$, а пространство H_2 — пополнение множества C_2 по метрике пространства $W^{2,2}(\Omega)$. В силу неравенства Корна для плоской задачи теории упругости и [2] справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. *На $\mathbf{H}_1$ норма $\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{W^{1,2}(\Omega)\times W^{1,2}(\Omega)}$ эквивалентна норме*

$$\|\tilde{\mathbf{u}}\|^2_{\mathbf{H}_1} = \frac{1}{2} B \iint\limits_{\Omega} \Big\{ (\partial_1 u_1)^2 + (\partial_2 u_2)^2 + \\ + 2\nu \partial_1 u_1 \partial_2 u_2 + \frac{1}{2}(1-\nu)(\partial_2 u_1 + \partial_1 u_2) \Big\}\, dx_1\, dx_2.$$

Лемма 2. *На H_2 норма $\|w\|_{W^{2,2}(\Omega)}$ эквивалентна норме*

$$\|w\|^2_{H_2} = \frac{1}{2} \{ (\nabla^2 w)^2 + 2(1 - \nu)((\partial_{12} w)^2 - \\ - \partial_{11} w \partial_{22} w) \}\, dx_1\, dx_2.$$

Нормы в пространствах $\mathbf{H}_1, H_2$ индуцируют соответственно скалярные произведения $(\cdot,\cdot)_{\mathbf{H}_1}, (\cdot,\cdot)_{H_2}$. Через $\mathbf{H}$ обозначается пространство $\mathbf{H}_1 \times H_2$ с нормой $\|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}} = \|\tilde{\mathbf{u}}\|^2_{\mathbf{H}_1} + \|w\|^2_{H_2}$ и скалярным произведением $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)_{\mathbf{H}} = (\tilde{\mathbf{u}}_1, \tilde{\mathbf{u}}_2)_{\mathbf{H}_1} + (w_1, w_2)_{H_2}$.

О п р е д е л е н и е. *Обобщенным решением задачи равновесия пологой оболочки с упругим препятствием называется вектор-функция* $\mathbf{u}$, *минимизирующая функционал* $I(\mathbf{u})$ *на элементах пространства* $\mathbf{H}$.

Для корректности введенного определения достаточно выполнения следующих условий:

$$
\begin{gathered}
z \in W^{2,2}(\Omega) \bigcap C^1(\Omega), g \in C(\Omega_0),\\
f_1, f_2 \in L^p(\Omega), \quad q_1, q_2 \in L^p(\Gamma), \quad p > 1, \\
f_3 = \bar{f}_3 + \bar{\bar{f}}_3, \quad q_3 = \bar{q}_3 + \bar{\bar{q}}_3,
\end{gathered} \tag{2.1}
$$

$$
\begin{gathered}
\bar{f}_3 \in L(\Omega), \quad \bar{q}_3 \in L(\Gamma),\\
\bar{\bar{f}}_3 = \sum_{k=1}^{n} F_k \delta(x_1 - x_1^k, x_2 - x_2^k),\\
\bar{\bar{q}}_3 = \sum_{k=1}^{n} Q_k \delta(s - s^k),
\end{gathered} \tag{2.2}
$$

где $n \in \mathsf{N}$; $F_k, Q_k \in \mathsf{R}$; $(x_1^k, x_2^k) \in \Omega$; $s^k \in \Gamma$; $k = 1, \ldots, n$; $\delta(x_1, x_2)$; $\delta(s)$ — дельта-функции Дирака. Условие (2.1) гарантирует конечность значений функционалов $E(\mathbf{u})$ и $E_g(\mathbf{u})$ на элементах пространства $\mathbf{H}$ в силу неравенства Гёльдера и следующего частного факта теории Соболевских пространств [4].

Лемма 3. *Пространство* $W^{2,2}(\Omega)$ *вложено в* $W^{1,4}(\Omega)$ *и в* $C(\Omega)$, *причем операторы вложения усиленно непрерывны.*

Вследствие условия (2.2) и леммы 3 функционал $A(\mathbf{u})$ является непрерывным в пространстве $\mathbf{H}$. Тогда по теореме Рисса о непрерывном линейном функционале в гильбертовом пространстве существуют однозначно определенные элементы $\tilde{\mathbf{r}} \in \mathbf{H}_1$, $r_3 \in H_2$, такие, что для любого $\mathbf{u} \in \mathbf{H}$

$$A(\mathbf{u}) = (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{r}})_{\mathbf{H}_1} + (w, r_3)_{H_2}.$$

Доказательство теоремы существования [3] для пологой нелинейной оболочки без препятствия требует дополнительного ограничения на значения внешних тангенциальных сил, имеющего вид $\|\tilde{\mathbf{r}}\|_{\mathbf{H}_1} < m$. Константа m определяется согласно [3].

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (2.1), (2.2), а тангенциальные нагрузки удовлетворяют ограничению* $\|\tilde{\mathbf{r}}\|_{\mathbf{H}_1} < m$. *Тогда существует по крайней мере одно обобщенное решение задачи равновесия оболочки с упругим препятствием.*

Доказательство теоремы существования основывается на теореме Цитланадзе [4].

Теорема 2. *Пусть на гильбертовом пространстве* Y *задан растущий функционал* $\Psi(y) = \|y\|^2_Y + \Theta(y)$, *такой, что* $\Theta(y)$ *является слабо непрерывным функционалом на* Y. *Тогда существует такой элемент* $y_0 \in Y$, *на котором функционал* $\Psi(y)$ *принимает свое минимальное значение.*

Выполнение условий теоремы 2 для функционала $I(\mathbf{u})$ на пространстве $\mathbf{H}$ подтверждается следующими тремя леммами, утверждения которых формулируются при выполнении условий теоремы 1.

Лемма 4. *В представлении* $I(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}} + \Phi(\mathbf{u}) + E_g(\mathbf{u})$ *функционал* $\Phi(\mathbf{u})$ *является слабо непрерывным.*

Доказательство леммы 4 повторяет рассуждения из [5].

Лемма 5. *Функционал* $E_g(\mathbf{u})$ *является слабо непрерывным.*

Доказательство. Пусть последовательность $\mathbf{u}_n = (u_{1n}, u_{2n}, w_n)$ слабо сходится к $\mathbf{u} = (u_1, u_2, w)$ в $\mathbf{H}$. Покажем, что тогда $E_g(\mathbf{u}_n) \to E_g(\mathbf{u})$ при $n \to \infty$. Из леммы 3 следует, что w_n сильно сходится к w в $L^2(\Omega)$. Поэтому лемма справедлива в силу оценки

$$
\begin{aligned}
&|E_g(\mathbf{u}_n) - E_g(\mathbf{u})| \leqslant \\
&\leqslant d\big\|\chi(g-z+h-w_n) - \chi(g-z+h-w)\big\|_{L^2(\Omega)} \leqslant \\
&\qquad \leqslant d\big\|w - w_n\big\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}
$$

где положительная константа d не зависит от номера n. Последнее неравенство верно, так как для функций a и b, определенных на Ω, выполняется соотношение

$$
\begin{aligned}
&|\chi(a(x_1, x_2)) - \chi(b(x_1, x_2))| \leqslant \\
&\qquad \leqslant |a(x_1, x_2) - b(x_1, x_2)|
\end{aligned}
$$

для любых $(x_1, x_2) \in \Omega$.

Лемма 6. *Функционал* $I(\mathbf{u})$ *является растущим на* $\mathbf{H}$, *т.е.*

$$I(\mathbf{u}) \to +\infty, \text{ если } \quad \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}} \to +\infty.$$

Доказательство. В условиях теоремы 1 функционал $Z(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{H}} + \Phi(\mathbf{u})$ является растущим [4]. Но $I(\mathbf{u}) \geqslant Z(\mathbf{u})$ для любого $\mathbf{u} \in \mathbf{H}$.

Таким образом, в силу лемм 4–6 и теоремы 2 существует элемент пространства $\mathbf{H}$, на котором функционал $I(\mathbf{u})$ принимает свое минимальное значение, а значит, теорема 1 доказана.

Литература

1. *Власов В.З.* Общая теория оболочек и ее приложение в технике. М.; Л.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
2. *Лебедев Л.П.* О равновесии свободной нелинейной пластины // ПММ. 1980. Т. 44. Вып. 1. С. 161165.
3. *Ворович И.И., Лебедев Л.П.* О разрешимости нелинейной задачи равновесия пологой оболочки // ПММ. 1988. Т. 52. Вып. 5. С. 814–820.
4. *Ворович И.И., Лебедев Л.П.* Функциональный анализ. М.: Вуз. книга, 2000. 320 с.
5. *Ворович И.И.* Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М.: Наука, 1989. 373 с.

Статья поступила 18 января 2003 г.
National University of Colombia (Bogotá), Ростовский государственный университет