

УДК 539.3

**МЕТОД СВЕДЕНИЯ К ПАРНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ
КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫХ ОБЛАСТЕЙ¹***Трубчик И. С.², Айзикович С. М.³***METHOD OF REDUCING TO PAIRED INTEGRAL EQUATIONS OF CONTACT PROBLEMS
FOR HALF-INFINITE DOMAINS**

Trubchik I. S., Aizikovich S. M.

The work resulted in the development and implementation of the method of modulating functions aimed to develop transformants of the kernels of integral equations of stationary contact problems for continuously heterogeneous media under the general law of heterogeneity. The method has been modified for coordinate systems, other than the Cartesian ones. Practical application of the method has shown its high efficiency and made it possible to investigate more thoroughly stationary contact problems for continuously heterogeneous media.

Введение

Непрерывное изменение механических свойств по одной из координат характерно для многих тел, что связано с условиями их создания и эксплуатации. В конце 80-х годов прошлого века интерес к контактными задачам для непрерывно-неоднородных тел резко возрос в связи с развитием современных технологий, которые позволили получать покрытия материалов с непрерывно изменяющимися механическими свойствами по глубине, радиусу или угловой координате (в зависимости от геометрии подложки). Развитие трибологии [1] способствовало расширению теоретических исследований неклассических контактных задач теории упругости. В частности, одна из основных задач трибологии — контактная задача для тел с покрытиями.

Особенность неоднородных материалов — наличие дополнительных источников концентрации напряжений. В однородных телах концентрация напряжений возникает в местах резких изменений геометрии тела и нагрузки. В неоднородных материалах возникает дополнительная концентрация напряжений в местах резкого изменения физико-механических характеристик материала (модуля упругости, коэффициента Пуассона и др.), т. е. по по-

верхностям сопряжения однородных элементов. Подробный обзор основных результатов для многослойных сред в задачах статики дан в [2]. При рассмотрении модели с учетом неоднородности среды сведение контактных задач к интегральному уравнению (ИУ) осложняется необходимостью при построении трансформанты ядра решать краевую задачу для системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Простейшая модель основания — однородный слой или клин, сцепленный с недеформируемой подложкой. Было установлено, что в окрестности общей вершины двух сцепленных клиньев могут возникать интегрируемые особенности, причем их тип зависит от характеристик материалов и локальной геометрии соединения. Кроме того, в отличие от однородных сред (полупространство, слой) трансформанты ядер ИУ для неоднородных сред в общем случае строятся численными методами [3].

**1. Схема метода сведения контактных
задач для неоднородных областей к
парным ИУ**

Для сведения смешанной задачи к парным ИУ используются уравнения пространственной теории упругости в декартовой, цилиндри-

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ р2003юг (03-01-96551).

²Трубчик Ирина Степановна, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича Ростовского государственного университета.

³Айзикович Сергей Михайлович, д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича Ростовского государственного университета.

дрической или сферической системе координат [4]. Подставляя в них соотношения закона Гука, получаем систему дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами относительно перемещений — трансформант Фурье, Ханкеля или Мелина (в зависимости от геометрии среды). Эту систему можно представить в векторном виде

$$\frac{d\tilde{\mathbf{Y}}}{dx} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{Y}}. \quad (1.1)$$

Причем размерность введенной вектор-функции $\tilde{\mathbf{Y}}$ вдвое больше по сравнению с рангом вектор-функции трансформанты перемещений, вследствие необходимости учета первых производных от данных функций в граничных условиях. Вид и ранг матрицы $\mathbf{A}$ обусловлен геометрией неоднородной среды и был приведен в работах [5–7].

Решение уравнения (1.1) строится на основе метода, предложенного в работе [3]. Метод опирается на выделение экспоненциальных составляющих при построении матрицы Грина, что позволяет получить устойчивый численный алгоритм.

Решение уравнения (1.1) представляется в виде линейной комбинации векторов фундаментальной системы решений

$$\tilde{\mathbf{Y}}(\alpha, x) = \sum_{i=1}^r a_i(\alpha) \tilde{\Psi}_i^F(\alpha, x), \quad (1.2)$$

r — ранг вектор-функции $\tilde{\mathbf{Y}}$.

Фундаментальная система решений в (1.2) представима в виде

$$\tilde{\Psi}_i^F(\alpha, x) = \mathbf{T}_i(\alpha, x) \tilde{\Psi}_i(\alpha, x),$$

где $\mathbf{T}_i$ — диагональные матрицы, элементами которых являются компоненты векторов $\tilde{\mathbf{t}}_i(\alpha, x)$; $\tilde{\Psi}_i$ — собственные векторы матрицы $\mathbf{A}$ для случая однородной среды; $\tilde{\mathbf{t}}_i$ — векторы модулирующих функций, связанные с неоднородностью среды; $a_i(\alpha)$ — некоторые коэффициенты, которые определяются из краевых условий. Этот прием позволяет в явном виде выделить в выражении (1.2) составляющие $\tilde{\Psi}_i$, быстрый рост или осцилляция которых затрудняет процесс численной реализации решения. Компоненты векторов $\tilde{\Psi}_i$ могут быть экспоненциальными или тригонометрическими функциями, а также гипергеометрическими и цилиндрическими функциями в зависимости от геометрии среды. Векторы модулирующих функций $\tilde{\mathbf{t}}_i(\alpha, x)$ определяются из на-

бора задач Коши при фиксированных значениях α

$$\frac{d\tilde{\mathbf{t}}_i}{dr} = \mathbf{B}_i \tilde{\mathbf{t}}_i, \quad (i = 1, \dots, r), \quad x_1 \leq x \leq x_2.$$

Элементы матриц $\mathbf{B}_i$ имеют вид

$$B_{ij} = \left(\Psi_i^j \right)^{-1} \left[\sum_{k=1}^6 A_{jk} t_i^k \Psi_i^k - \frac{d\Psi_i^j}{dr} \right].$$

Начальные условия для $\tilde{\mathbf{t}}_i$ определяются видом решения векторного уравнения (1.1) для случая однородной среды.

Компонентами вектора решений $\tilde{\mathbf{Y}}(\alpha x)$ являются [3]

$$Y^k = \sum_{i=1}^r a_i t_i^k \Psi_i^k. \quad (1.3)$$

Применяя обратное интегральное преобразование к (1.3), получим значения искомых величин перемещений и напряжений.

Проиллюстрируем эффективность данного метода на примере задачи о чистом сдвиге полосовым штампом неоднородного пространственного клина.

2. Свойства трансформант ядер ИУ для неоднородного клина, цилиндра и их аппроксимация

В работах [5–7] было показано, что для неоднородных областей типа полосы, клина, цилиндра, построенная подынтегральная функция ядра ИУ $L(\alpha)$ обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} L(\alpha) &= A\alpha + O(\alpha^3), \quad \alpha \rightarrow 0, \\ L(\alpha) &= 1 + B\alpha^{-1} + C\alpha^{-2} + O(\alpha^{-3}), \\ &\quad \alpha \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.1)$$

$A, B, C = \text{const}$, $A = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{L(\alpha)}{\alpha}$.

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} L_{\Pi}^N(\alpha) &= \prod_{n=1}^N \frac{\alpha^2 + \delta_n^2 \lambda^{-2}}{\alpha^2 + \gamma_n^2 \lambda^{-2}}, \\ L_{\Sigma}^M(\alpha) &= \sum_{k=1}^M \frac{c_k |\alpha|}{\alpha^2 + \eta_k^2}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $\delta_n, \gamma_n, \eta_k$ — коэффициенты аппроксимации, λ — безразмерный параметр, связанный с геометрией среды.

Покажем, что функцию $L(\alpha)$, обладающую свойствами (2.1), можно аппроксимировать выражениями вида

$$L(\alpha) = \text{th}(A\alpha)(L_{\Pi}^N(\alpha) + L_{\Sigma}^M(\alpha)). \quad (2.3)$$

Для этого используем лемму [10, 11].

ЛЕММА 2.1. Пусть четная, вещественная, непрерывная на всей действительной оси функция $\phi(u)$ обращается в нуль на бесконечности, тогда она допускает приближение в $C(-\infty, \infty)$ рядами из функций вида

$$\phi_k = (u^2 + \eta_k^2)^{-1}. \quad (2.4)$$

Эту лемму применим для доказательства следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 2.2. Функция $L(\alpha)$, обладающая свойствами (2.1), допускает аппроксимацию выражениями вида (2.3).

Доказательство. Выберем постоянные δ_n, γ_n ($n = 1, \dots, N$) в (2.2) так, чтобы $\prod_{n=1}^N \delta_n^2 \gamma_n^{-2} = A$.

Рассмотрим функцию

$$L_\Sigma(\alpha) = \frac{L(\alpha)}{|\alpha| \operatorname{th}(A\alpha)} - \frac{L_\Pi^N(\alpha)}{|\alpha| \operatorname{th}(A\alpha)}. \quad (2.5)$$

Из условий (2.1) следует, что функция $F(\alpha) = \frac{L(\alpha)}{|\alpha| \operatorname{th}(A\alpha)}$ обладает свойством

$$F(\alpha) = |\alpha|^{-1} + (\alpha^{-2}), \quad \alpha \rightarrow \infty.$$

Но тогда $L_\Sigma(\alpha)$ удовлетворяет условию леммы 2.1, т. е. имеет место представление

$$L_\Sigma(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\alpha^2 + \eta_k^2} \quad (2.6)$$

или из условий (2.5), (2.6)

$$L(\alpha) = \operatorname{th}(A\alpha) \left[L_\Pi^N(\alpha) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k |\alpha|}{\alpha^2 + \eta_k^2} \right]. \quad (2.7)$$

Теорема доказана. $\square$

При построении аппроксимации главной части $L(\alpha)$ выражением вида (2.2) для нахождения коэффициентов аппроксимации δ_n, γ_n ($n = 1, \dots, N$) используем алгоритм, описанный в [8].

Преобразуем функцию $L(\alpha)$ с помощью отображения $\gamma = \alpha^2/(\alpha^2 + c^2)$ с интервала $(0; \infty)$ на отрезок $(0; 1)$ ($\alpha = c\sqrt{\gamma/(\gamma - 1)}$). Здесь c — положительная константа, значение

которой выбирается так, чтобы оптимизировать аппроксимацию функции $L(\alpha)$. Аппроксимируем функции $\sqrt{L(\gamma)}$ и $\sqrt{L^{-1}(\gamma)}$ на отрезке $(0; 1)$ полиномами Бернштейна N -го порядка (или по чебышевским узлам), получим

$$\begin{aligned} \sqrt{L_N(\gamma)} &= \sum_{i=0}^N a_i \alpha^i, \\ \sqrt{L_N^{-1}(\gamma)} &= \sum_{i=0}^N b_i \alpha^i, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где a_i, b_i — коэффициенты полинома Бернштейна.

Если $f(x)$ непрерывная функция на отрезке $(0; 1)$, то аппроксимация $B_N(x)$ этой функции имеет вид

$$B_N(x) = \sum_{m=0}^N f\left(\frac{m}{N}\right) C_N^m x^m (1-x)^{N-m}.$$

Здесь C_N^m — биномиальные коэффициенты. Тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{L_N(\gamma)} &= \left(\sum_{i=0}^N a_i^* \gamma^{2i} \right) (\gamma^2 + c^2)^{-N}, \\ \sqrt{L_N^{-1}(\gamma)} &= \left(\sum_{i=0}^N b_i^* \gamma^{2i} \right) (\gamma^2 + c^2)^{-N}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Коэффициенты a_i^*, b_i^* определяются из (2.9) после замены переменной $\alpha = \gamma^2/(\gamma^2 + c^2)$.

$$\begin{aligned} L_N(\gamma) &= \frac{\sqrt{L_N(\gamma)}}{\sqrt{L_N^{-1}(\gamma)}} = \\ &= \left(\sum_{i=0}^N a_i^* \gamma^{2i} \right) \left(\sum_{i=0}^N b_i^* \gamma^{2i} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Определяя корни числителя и знаменателя в (2.10), находим значения δ_n, γ_n ($n = 1, 2, \dots, N$).

Такая модификация приема, описанного в работе [9], позволяет избежать наличия N -кратного корня в знаменателе найденной аппроксимации, что используется в дальнейшем при построении приближенных аналитических решений парных ИУ рассматриваемых задач.

Норму ошибки аппроксимации определим как максимум разности между точным и приближенным значением, деленным на точное и будем измерять ее в процентах. Для выбора

параметра аппроксимации s и порядка N можно применить метод перебора. Меняя значение N от 2 до 28 и параметр s от 0 до 100 определим значения, при которых достигается минимальная ошибка.

Постоянную A в (2.7) можно определить с достаточной степенью точности, вычислив значение трансформанты $K(u) = L(u)/|u|$ при малых значениях аргумента (порядка 10^{-3}).

Рассматриваемые контактные задачи можно свести к решению ИУ Фредгольма с логарифмическим ядром

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) k\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right) d\xi = \pi g(x) \quad (x \leq 1),$$

$$k(t) = \int_0^\infty \frac{L(s)}{s} \cos st ds, \quad (2.11)$$

где в случае контактной задачи для клина

$$\varphi(x) = \frac{rq(r)}{a\theta}, \quad x = \lambda \ln \frac{r}{a} - 1,$$

$$\lambda = 2 \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{-1}, \quad g(x) = \frac{\lambda \delta(r)}{a};$$

для цилиндра

$$\varphi(x) = q(z)\theta^{-1}, \quad x = za^{-1},$$

$$\lambda = Ra^{-1}, \quad g(x) = \delta(z)2a^{-1}.$$

В случае однородной среды для клина

$$L(s) = \frac{2\kappa \operatorname{sh} 2s\alpha - 2s \sin 2\alpha}{2\kappa \operatorname{ch} 2s\alpha - 2s^2 \cos 2\alpha + 2s^2 + \kappa^2};$$

для цилиндра

$$L(s) = s^3 (\omega_0^2 - \Omega_0^2) \Delta^{-1},$$

$$\Delta = 2 [2(1-\nu) - s^2 (\Omega_0^2 - 1)] \times \\ \times [s^2 (\omega_0^2 - 1) - 2(1-\nu)],$$

$$\omega_0(s) = I_0(s) I_1^{-1}(s); \quad \Omega_0(s) = -K_0(s) K_1^{-1}(s).$$

Для всех задач при $s \rightarrow 0$

$$L(s) = As + O(s^3). \quad (2.12)$$

Для клина $A = \frac{2(2\kappa\alpha - \sin 2\alpha)}{(\kappa+1)^2}$, для цилиндра $A = 0,5(1-\nu^2)^{-1}$.

При $s \rightarrow \infty$ для клина

$$L(s) = 1 - O(e^{-\mu s}), \quad \mu = 2\alpha; \quad (2.13)$$

для цилиндра

$$L(s) = 1 + c_1 s^{-2} + c_2 s^{-4} + O(s^{-6}), \quad (2.14)$$

где $c_1 = -0,965$, $c_2 = -2,91$ при $\nu = 0,3$.

В случае многослойных сред свойства функций податливости, аналогичные (2.12), (2.13), установлены в работах [12–15].

Смешанная задача сводится к парному ИУ, решение которого для функции вида (2.1) найдено в аналитическом виде [6] и является асимптотически точным при $0 < \lambda < \lambda^*$ и $\lambda > \lambda^0$, где λ^* , λ^0 — некоторые фиксированные значения параметра λ .

3. Сдвиг полосовым штампом неоднородного пространственного клина

3.1. Постановка задачи

Пусть недеформируемый полосовой штамп взаимодействует с упругой клиновидной областью с углом раствора α ($0 < \alpha < 2\pi$). Введем цилиндрическую систему координат (r, φ, z) . Считаем, что грань клина $\varphi = 0$ жестко закреплена, а на грани $\varphi = \alpha$ расположен полосовой штамп ширины $a \leq r \leq b$. На единицу длины штампа воздействует сдвигающее усилие P , вследствие чего штамп переместится в направлении оси z на величину ε , вызвав в клине деформацию чистого сдвига.

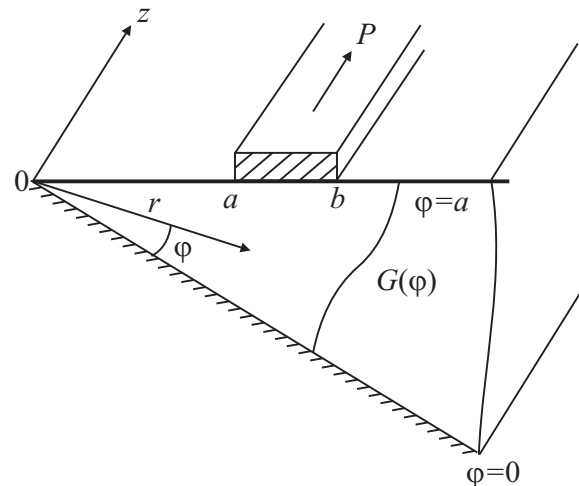


Рис. 1

Предполагается, что силы трения между штампом и поверхностью клина отсутствуют, и вне штампа поверхность клина $\varphi = \alpha$ не нагружена (рис. 1). Модуль сдвига клина изменяется по закону

$$G = G(\varphi), \quad 0 < \varphi < \alpha,$$

где $G(\varphi)$ — произвольная гладкая функция, $G(\varphi) > 0$ всюду в области ее определения.

Граничные условия при сделанных предположениях имеют вид

$$w(r, 0) = 0, \quad (3.1)$$

$$\tau_{\varphi z}(r, \alpha) = 0, \quad 0 < r < a, \quad r > b,$$

$$w(r, \alpha) = \varepsilon, \quad a \leq r \leq b. \quad (3.2)$$

Здесь $w(r, \varphi)$ — перемещение по оси z ; $\tau_{\varphi z}$, $\tau_{\varphi r}$ — касательные напряжения.

Необходимо определить распределение касательных напряжений под штампом

$$\tau_{\varphi z}(r, \alpha) = \tau(r), \quad a \leq r \leq b, \quad (3.3)$$

а также связь между сдвиговым усилием P и перемещением штампа ε .

3.2. Построение ИУ

Используем уравнения пространственной задачи теории упругости в цилиндрической системе координат [4]

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0, \quad (3.4)$$

$$\tau_{rz} = G(\varphi) \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \tau_{\varphi z} = G(\varphi) \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi}. \quad (3.5)$$

Перемещения $w(r, \varphi)$ представим в форме интеграла Меллина

$$w(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} W(s, \varphi) r^{-s} ds. \quad (3.6)$$

Уравнение (3.4) с учетом (3.5), (3.6) относительно $W(s, \varphi)$ можно представить в виде

$$W'' + \frac{G'(\varphi)}{G(\varphi)} W' + s^2 W = 0. \quad (3.7)$$

Здесь штрих означает дифференцирование по φ .

Граничное условие (3.1) примет вид

$$W(s, 0) = 0. \quad (3.8)$$

Представим функцию $\tau(r)$ интегралом Меллина (специального вида)

$$\tau(r) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \bar{\tau}(s+1) r^{-(s+1)} ds, \quad (3.9)$$

$$\bar{\tau}(s+1) = Q(s) = \int_0^\infty \tau(\rho) \rho^s d\rho. \quad (3.10)$$

Из условия (3.3), с учетом (3.5), (3.6), (3.9), получим

$$W'(s, \alpha) = \frac{Q(s)}{G(\alpha)}. \quad (3.11)$$

Введем вспомогательную функцию

$$W^*(s, \varphi) = W(s, \varphi) \frac{G(\alpha)}{Q(s)}.$$

Из условия (3.2) следует

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} W^*(s, \alpha) \frac{Q(s)}{G(\alpha)} r^{-s} ds = \varepsilon, \quad a \leq r \leq b.$$

Учитывая (3.10), придем к ИУ вида

$$\int_a^b \tau(\rho) k(t) d\rho = 2\pi i G(\alpha) \varepsilon, \quad a \leq r \leq b, \quad (3.12)$$

$$k(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L^*(s) e^{st} ds,$$

$$t = \ln \frac{\rho}{r}, \quad L^*(s) = W^*(s, \alpha).$$

Для решения задачи необходимо построить функцию $L^*(s)$. Пределы интегрирования в зависимостях (3.6) и (3.9) определяются аналогично [16].

Уравнение (3.12) преобразуется к виду

$$\int_a^b \tau(\rho) k_1(t) d\rho = \pi G(\alpha) \varepsilon, \quad a \leq r \leq b, \quad (3.13)$$

$$k_1(t) = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{L_1(s, \alpha)}{s} \cos st ds,$$

$$t = \ln \frac{\rho}{r}, \quad L_1(s, \alpha) = L^*(is, \alpha).$$

Для завершения постановки задачи к ИУ (3.13) следует добавить условие равновесия штампа

$$P = \int_a^b \tau(r) dr,$$

которое (при $\alpha = \pi$ и $\alpha = 2\pi$) позволяет определить связь между сдвигающим усилием P и перемещением штампа ε . При корректной постановке должно выполняться условие $\tau(r) \geq 0$ при $a \leq r \leq b$.

Для однородного клина задача также сводится к ИУ вида (3.13), где функция $L_1(s, \alpha)$ имеет следующий вид

$$L_1(s, \alpha) = \operatorname{th} s\alpha. \quad (3.14)$$

Изложим метод построения функции $L^*(s)$ в общем случае произвольной гладкой неоднородности.

3.3. Построение трансформанты ядра ИУ

Рассмотрим вспомогательную задачу со следующими граничными условиями

$$\begin{aligned} w(r, 0) &= 0, \\ \tau_{\varphi z}(r, \alpha) &= \begin{cases} \tau(r) & a \leq r \leq b, \\ 0, & 0 < r < a, \quad r > b. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.15)$$

При $\varphi = 0$ выполнено условие (3.1).

Введем обозначения

$$\begin{aligned} z_1 &= W^*(s, \varphi), \quad z_2 = W^{*'}(s, \varphi), \\ \tilde{\mathbf{z}} &= (z_1, z_2). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Уравнение (3.7) перепишем в матричном виде

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\mathbf{z}}}{d\varphi} &= \mathbf{A}\tilde{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ s^2 & -\kappa(\varphi) \end{pmatrix}, \\ \kappa(\varphi) &= \frac{G'(\varphi)}{G(\varphi)}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Краевые условия

$$z_1(s, 0) = 0, \quad z_2(s, \alpha) = 1. \quad (3.18)$$

Как видно, коэффициенты матрицы $\mathbf{A}$ являются переменными. В общем случае построить решение уравнения (3.17) в аналитической форме не удастся. Решение уравнения (3.17) будем строить методом, описанным выше.

Известно, что решение системы дифференциальных уравнений можно представить в виде линейной комбинации фундаментальных решений. Фундаментальные векторы представим в виде

$$\tilde{\Psi}_i^F(s, \varphi) = (t_i^1(s, \varphi)\Psi_i^1(s, \varphi), t_i^2(s, \varphi)\Psi_i^2(s, \varphi)),$$

где $\tilde{\Psi}_1(s, \varphi) = (\sin s\varphi, s \cos s\varphi)$, $\tilde{\Psi}_2(s, \varphi) = (\cos s\varphi, -s \sin s\varphi)$ — собственные векторы

матрицы $\mathbf{A}$ при $\kappa(\varphi) = 0$, т. е. их вид обусловлен видом решения системы для однородного клина

$$W(s, \varphi) = B_1(s) \cos s\varphi + B_2(s) \sin s\varphi.$$

В этом случае решение системы (3.17) имеет вид

$$\tilde{\mathbf{z}}(s, \varphi) = a_1 \tilde{\Psi}_1^F(s, \varphi) + a_2 \tilde{\Psi}_2^F(s, \varphi). \quad (3.19)$$

Подставляя решение (3.19) в систему (3.17), сведем исходную задачу к решению набора задач Коши для векторов $\tilde{\mathbf{t}}_i(s, \varphi)$ при фиксированных значениях s

$$\frac{d\tilde{\mathbf{t}}_i}{d\varphi} = \mathbf{B}_i \tilde{\mathbf{t}}_i, \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha \quad (i = 1, 2),$$

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} -s \operatorname{ctg} s\varphi & s \operatorname{ctg} s\varphi \\ -s \operatorname{tg} s\varphi & -\kappa(\varphi) + s \operatorname{tg} s\varphi \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} -s \operatorname{tg} s\varphi & -s \operatorname{tg} s\varphi \\ -s \operatorname{ctg} s\varphi & -\kappa(\varphi) - s \operatorname{tg} s\varphi \end{pmatrix}$$

с начальными условиями

$$\tilde{\mathbf{t}}_1(s, 0) = (1, 1),$$

$$\tilde{\mathbf{t}}_2(s, 0) = (1, 1).$$

Определив $\tilde{\mathbf{t}}_i(s, \alpha)$, $i = 1, 2$, получим из (3.19), (3.16)

$$\begin{aligned} W^*(s, \varphi) &= a_1 t_1^1(s, \varphi) \sin s\varphi + \\ &\quad + a_2 t_2^1(s, \varphi) \cos s\varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W^{*'}(s, \varphi) &= a_1 t_1^2(s, \varphi) s \cos s\varphi + \\ &\quad + a_2 t_2^2(s, \varphi) s \sin s\varphi. \end{aligned}$$

Величины $a_1(s)$, $a_2(s)$ определяются из краевых условий (3.18). В частности, $a_1 = [t_1^2(s, \alpha) s \cos s\alpha]^{-1}$, $a_2 = 0$ и

$$W^*(s, \alpha) = \frac{t_1^1(s, \alpha) \operatorname{tg}(s\alpha)}{t_1^2(s, \alpha) s}. \quad (3.20)$$

Окончательно получим

$$L_1(s, \alpha) = L^*(is) = \frac{t_1^1(is, \alpha)}{t_1^2(is, \alpha)} \operatorname{th}(s\alpha). \quad (3.21)$$

Таким образом, задача сведена к решению парного ИУ, принадлежащего классу парных ИУ, подробно исследованных в работе [6].

3.4. Частный случай

Рассмотрим случай, когда

$$G(\varphi) = G_0 \exp^{p\varphi}, \quad 0 \leq \varphi \leq \alpha. \quad (3.22)$$

Тогда уравнение (3.7) становится уравнением с постоянными коэффициентами

$$W'' + pW' + s^2W = 0. \quad (3.23)$$

Общее решение (3.23) имеет вид

$$W(s, \varphi) = c_1(s) \exp^{\kappa_+\varphi} + c_2(s) \exp^{\kappa_-\varphi}, \quad (3.24)$$

где $\kappa_{\pm}$ — собственные числа уравнения (3.23), определяемые из характеристического уравнения

$$\kappa^2 + p\kappa + s^2 = 0, \quad (3.25)$$

$$\kappa_{\pm} = -p/2 \pm Q, \quad Q = \sqrt{p^2/4 - s^2}. \quad (3.26)$$

Из условий (3.8), (3.11) получим систему

$$c_1(s) + c_2(s) = 0,$$

$$c_1(s)\kappa_+ \exp^{\kappa_+\alpha} + c_2(s)\kappa_- \exp^{\kappa_-\alpha} = Q(s)/G(\alpha).$$

для определения коэффициентов $c_1(s)$, $c_2(s)$. В результате находим

$$W(s, \varphi) = \frac{Q(s)}{G_0} \frac{\exp^{-\frac{p}{2}(\alpha+\varphi)} \operatorname{sh} Q\varphi}{Q \operatorname{ch} Q\alpha - \frac{p}{2} \operatorname{sh} Q\alpha}.$$

В частности,

$$W^*(s, \alpha) = (Q \operatorname{cth} Q\alpha - \frac{p}{2})^{-1}. \quad (3.27)$$

Очевидно, свойства трансформанты ядра (3.27) аналогичны свойствам трансформанты (3.20). Покажем, что на мнимой оси плоскости комплексного переменного s знаменатель подынтегрального выражения $W^*(s, \alpha)$ ядра ИУ (3.12) не имеет нулей.

Рассмотрим уравнение $Q \operatorname{cth} Q\alpha = p/2$, определяющее полюса функции $W^*(s, \alpha)$. Учитывая свойства гиперболических функций, получим $p/2 > Q$, т. е. из (3.26) $s^2 > 0$. Другими словами, функция $W^*(s, \alpha)$ не имеет полюсов на мнимой оси, следовательно, можно выполнить замену переменной s на is . Тогда функция L_1 в (3.13) будет иметь вид

$$L_1(s, \alpha) = \frac{1}{\tilde{Q} \operatorname{cth} \tilde{Q}\alpha - \frac{p}{2}}, \quad (3.28)$$

$$\tilde{Q} = \sqrt{p^2/4 + s^2}.$$

При корректной постановке задачи должно выполняться неравенство $\tilde{Q} \operatorname{cth} \tilde{Q}\alpha > p/2$. Исследование данного неравенства, обуславливающего взаимосвязь градиента изменения закона неоднородности (3.22) и угла раствора клина α проводится численно.

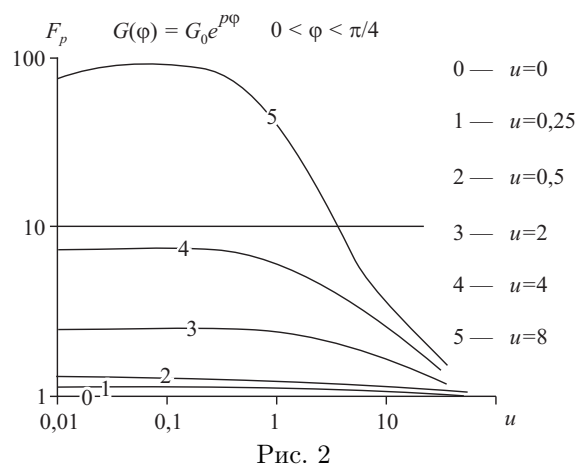


Рис. 2

На рис. 2 приведены кривые $F_p = L_p(u)/L_0(u)$, характеризующие вид трансформант $L_p(u)$, ($p = 0,125; 0,25; 0,5; 2; 4; 8; 0$), где p — показатель степени экспоненты в законе неоднородности (3.22)). Значения $L_p(u)$, вычисленные по формуле (3.21), сравнивались с аналогичными по формуле (3.28). При $p = 8$ максимальная погрешность составила 0,14 %.

Авторы благодарят проф. В. М. Александрова за постоянное внимание к работе.

Литература

1. Горячева И. Г., Добычин М. Н. Контактные задачи в трибологии. М.: Машиностроение, 1988. 256 с.
2. Никитин В. С. Статические контактные задачи для многослойных оснований // Механика контактных взаимодействий. М.: Физматлит, 2001. С. 199—213.
3. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Глушкова Н. В. Методы построения матриц Грина для стратифицированного упругого полупространства // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1987. Т. 27. № 1. С. 93—101.
4. Лурье А. И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 824 с.
5. Трубчик И. С. Внедрение штампа в неоднородный клин // Современные проблемы механики сплошной среды: Труды VI Международной конференции. Ростов-на-Дону. 2001. Т. 1. С. 216—220.
6. Айзикович С. М., Трубчик И. С., Шклярова Е. В. Внедрение штампа в неоднородную по глубине полосу // Изв. АН СССР. МТТ. 1991. № 1. С. 61—71.
7. Айзикович С. М., Трубчик И. С. Контактная задача для упругого цилиндра, неоднородного по радиусу // Современные проблемы механики сплошной среды: Труды VII Международной конференции, Ростов-на-Дону. 2002. С. 8—13.

8. *Aizikovich S.M., Alexandrov V.M., Kalker J.J., Krenev L.I., Trubchik I.S.* Analytical solution of the spherical indentation problem for a half-space with gradients with the depth elastic properties // *Int. Journal of Solids and Structures*. 2002. V. 39. No. 10. P. 2745–2772.
9. *Бабешко В. А.* Новый эффективный метод решения динамических контактных задач // *ДАН СССР*. 1974. Т. 217. № 4. С. 777–780.
10. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимаций. М.: Наука, 1965.
11. *Бабешко В. А.* Асимптотические свойства решений некоторых двумерных интегральных уравнений // *ДАН СССР*. 1972. Т. 206. № 5. С. 1074–1077.
12. *Ламзюк В. Д., Приварников А. К.* Упругая деформация неоднородного многослойного пакета при неполном контакте его слоев // *ДАН УССР*. Сер. А. 1977. № 7. С. 618–622.
13. *Ламзюк В. Д., Приварников А. К.* Решение граничных задач теории упругости для многослойных оснований / В сб.: *Устойчивость и прочность элементов конструкций*. Днепропетровск, 1978. Вып. 1. 64 с., Вып. 2. 68 с.
14. *Приварников А. К.* Пространственная деформация многослойного основания // В сб.: *Устойчивость и прочность элементов конструкций*. Днепропетровск. 1973. С. 27–45.
15. *Приварников А. К., Ламзюк В. Д.* Упругие многослойные основания. Ч. 1 / *Днепропетровский ун-т*. Днепропетровск, 1985. 162 с. Деп. в ВИНТИ 23.12.85, № 8789-В.
16. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1967. 404 с.

Статья поступила 21 декабря 2005 г.

НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича Ростовского государственного университета

© Трубочик И. С., Айзикович С. М., 2006