

УДК 539.3

**ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ШТАМПА И ДВУХСЛОЙНОГО ОСНОВАНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ СИЛ ТРЕНИЯ В ОБЛАСТИ КОНТАКТА<sup>1</sup>***Чебаков М. И.<sup>2</sup>***INTERACTION OF A STAMP AND TWO-LAYER BASE IN THE PRESENCE OF FRICTION FORCES IN THE CONTACT AREA**

Chebakov M. I.

Two flat problems of the elasticity theory about interaction of stamp with the base, which consists of two elastic layers with various mechanical properties, are investigated. Layers are jointed rigidly among themselves and with no deformable base, the stamp has the form of a parabola (contact area is variable) or form of a rectangle (contact area is fixed). Normal and tangential forces act on the stamp, normal and tangential stresses of contact area are connected by Coulomb law. System of stamp – layer are in conditions of a limiting equilibrium, the stamp does not turn during a deformation of the base. The integral equations are constructed, for which solution the method large  $\lambda$  is used. The influence of geometric and mechanical parameters of the problems to a position of contact area, form of the deformed surface of the base outside of area contact, diagram of contact stresses and their moment is investigated.

В 1970 году В. М. Александров опубликовал фундаментальную статью [1], посвященную контактными задачам теории упругости для однородного слоя при наличии сил трения и сцепления, где был предложен и обоснован широкий спектр эффективных аналитических методов их решения. Ниже дается развитие и реализация одного из них с приложением к решению контактных задач для кусочно-неоднородного слоя с учетом сил трения.

Исследуются две плоские задачи теории упругости о взаимодействии штампа, соответственно имеющего форму параболы (переменная область контакта) и форму прямоугольника (фиксированная область контакта) с основанием, образованным двумя упругими слоями с различными механическими свойствами, жестко соединенными между собой и с недеформируемой подложкой. Предполагается, что в зоне контакта нормальные и касательные напряжения связаны между собой законом Кулона, а на штамп действуют нормальные и касательные усилия, при этом система штамп-слой находится в условиях предельного равновесия, и штамп в процессе де-

формации слоя не поворачивается. Построены интегральные уравнения, для решения которых используется метод больших  $\lambda$  [1–4].

Для поставленных задач исследовано влияние геометрических и механических параметров на положение области контакта, форму деформированной поверхности слоя вне области контакта, эпюру контактных напряжений и их момента при учете сил трения в области контакта. Ранее эти зависимости были исследованы для пространственной контактной задачи о взаимодействии штампа в форме эллиптического параболоида с аналогичным упругим основанием [5, 6] и плоских контактных задач для однородного слоя [2–4].

Плоские контактные задачи для слоя с учетом сил трения в зоне контакта ставились и исследовались также в [7–9] и др.

**1. Постановка задачи**

В декартовых координатах  $(x, y)$  рассмотрим область  $-h_2 \leq y \leq h_1$ ,  $-\infty < x < \infty$ , состоящую из двух слоев  $0 \leq y \leq h_1$ ,  $-\infty < x < \infty$  (слой 1) и  $-h_2 \leq y \leq 0$ ,  $-\infty < x < \infty$  (слой 2) соответственно (рис.

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (05-01-00002, 05-01-00306).

<sup>2</sup>Чебаков Михаил Иванович, д-р физ.-мат. наук, заведующий отделом «Механика контактных взаимодействий» НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича Ростовского государственного университета.

1). Пусть слой 1 и слой 2, имеющие разные упругие постоянные, жестко соединены между собой по границе  $y = 0$ , граница  $y = -h_2$  слоя 2 жестко соединена с недеформируемым основанием, а грань  $y = h_1$  слоя 1 взаимодействует со штампом, находящимся под действием нормальной силы  $P$  и горизонтальной силы  $T = \mu P$ . Пусть в зоне контакта нормальные и касательные напряжения связаны законом Кулона  $\tau_{xy} = \mu\sigma_y$  ( $\mu$  — коэффициент трения). Будем рассматривать два случая: штамп имеет подошву в виде параболы с радиусом кривизны  $R$  в вершине — задача 1, и штамп имеет форму прямоугольника — задача 2. В задаче 1 зона контакта переменна, а в задаче 2 — фиксированна. Рассматривается случай предельного равновесия, сила  $P$  приложена к штампу с некоторым эксцентриситетом таким образом, что он не поворачивается в процессе деформирования слоя.

В случае плоской деформации задачи сводятся к соответствующим уравнениям Ляме при следующих граничных условиях

$$\sigma_y^1 = \tau_{xy}^1 = 0 \quad (y = h_1, \quad x < -a, x > b),$$

$$\tau_{xy}^1 = \mu\sigma_y^1, \quad v^1 = \delta - f(x)$$

$$(y = h_1, \quad -a \leq x \leq b),$$

$$v^1 = v^2, \quad u^1 = u^2,$$

$$\sigma_y^1 = \sigma_y^2, \quad \tau_{xy}^1 = \tau_{xy}^2 \quad (y = 0),$$

$$u^2 = v^2 = 0 \quad (y = -h_2).$$

Здесь  $u^i, v^i$  — перемещения в упругих слоях ( $i = 1, 2$ ) соответственно вдоль осей  $x, y$ ;  $\sigma_y^i, \tau_{xy}^i$  — нормальные и касательные напряжения;  $f(x) = x^2/(2R)$  (для задачи 1),  $f(x) = 0$  (для задачи 2).

С помощью преобразования Фурье поставленные контактные задачи сводятся к интегральному уравнению (ИУ) относительно неизвестных нормальных контактных напряжений под штампом  $q(x)$

$$\int_{-a}^b q(\xi) k \left( \frac{\xi - x}{h} \right) d\xi = \pi\theta\delta(x), \quad (1.1)$$

$$-a \leq x \leq b,$$

ядро которого представимо в виде двух слагаемых

$$k(t) = k_1(t) - \varepsilon k_2(t),$$

$$k_1(t) = \int_0^\infty \frac{L_1(u)}{u} \cos ut \, du, \quad (1.2)$$

$$k_2(t) = \int_0^\infty \frac{L_2(u)}{u} \sin ut \, du,$$

$$\theta = \frac{G_1}{1 - \nu_1}, \quad \varepsilon = \frac{(1 - 2\nu_1)\mu}{2(1 - \nu_1)},$$

Здесь  $\delta(x) = \delta - \beta x^2$ ,  $\beta = \frac{1}{2R}$  (задача 1),  $\delta(x) = \delta$  (задача 2);  $G = G_2/G_1$ ,  $H = h_2/h_1$ ,  $G_i, \nu_i$  — модули сдвига и коэффициенты Пуассона  $i$ -го слоя ( $i = 1, 2$ ),  $\delta$  — перемещение штампа в вертикальном направлении. Отметим, что для задачи 2 естественно считать, что  $b = a$ .

Функции  $L_1, L_2$  описываются выражениями

$$L_1(u) = -\frac{n_{01}(u)G^2 + n_{11}G + n_{21}}{d_0(u)G^2 + d_1G + d_2}, \quad (1.3)$$

$$L_2(u) = \frac{n_{02}(u)G^2 + n_{12}G + n_{22}}{d_0(u)G^2 + d_1G + d_2},$$

где

$$d_0(u) = 2\kappa_1(\kappa_2^2 + 1 + 4H^2u^2) \operatorname{ch}(2u) + 4\kappa_1\kappa_2 \operatorname{ch}(2u) \operatorname{ch}(2uH) + 2\kappa_2(\kappa_1^2 + 1 + 4u^2) \operatorname{ch}(2uH) + 16H^2u^4 + 4(1 + \kappa_2^2 + H^2(1 + \kappa_1^2))u^2 + (1 + \kappa_1^2)(1 + \kappa_2^2),$$

$$d_1(u) = 2(-4H^2u^2 + (1 - \kappa_2)\kappa_2)(\kappa_1 - 1) \operatorname{ch}(2u) - 2\kappa_2(\kappa_1 + \kappa_2) \operatorname{ch}(2u(H - 1)) + 2\kappa_2(4(\kappa_2 - 1)u^2 + (\kappa_1 - 1)(1 - \kappa_2)) \operatorname{ch}(2uH) + 2\kappa_2(\kappa_1\kappa_2 + 1) \operatorname{ch}(2u(1 + H)) - 32u^4H^2 + 8(H^2(\kappa_1 - 1) + H(1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2) + \kappa_2(1 - \kappa_2))u^2 - 2\kappa_2(\kappa_1 - 1)(1 - \kappa_2),$$

$$d_2(u) = -4(2u^2H^2 + \kappa_2^2) \operatorname{ch}(2u) + 4\kappa_2^2 - 4\kappa_2^2(1 + 2u^2) \operatorname{ch}(2uH) + 16u^4H^2 + 8(H^2 + \kappa_2^2)u^2 + 4\kappa_2^2,$$

$$n_{01}(u) = -2\kappa_1(4H^2u^2 + 1 + \kappa_2^2) \operatorname{sh}(2u) + 8\kappa_2u \operatorname{ch}(2uH) - 4\kappa_1\kappa_2 \operatorname{ch}(2uH) \operatorname{sh}(2u) + 16H^2u^3 + 4(1 + \kappa_2^2)u,$$

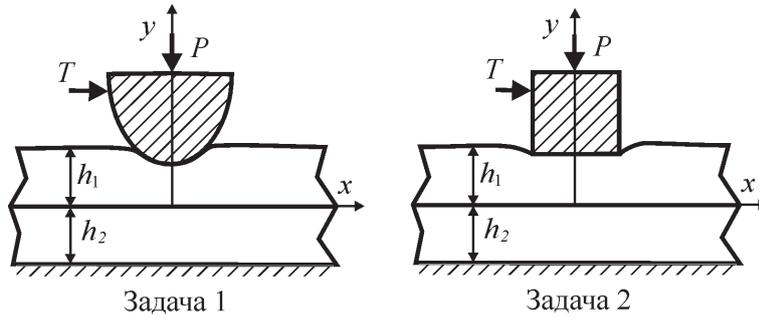


Рис. 1

$$n_{11}(u) = 2(-4(1 - \kappa_1)H^2u^2 + \kappa_2(1 - \kappa_2)(1 - \kappa_1)) \operatorname{sh}(2u) - 8\kappa_2(1 - \kappa_2)u \operatorname{ch}(2uH) - 2\kappa_2(1 + \kappa_1\kappa_2) \operatorname{sh}(2u(1 + H)) - 2\kappa_2(\kappa_2 + \kappa_1) \operatorname{sh}(2u(H - 1)) - 32H^2u^3 + 4(2\kappa_2(1 - \kappa_2) + (1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2)H)u,$$

$$n_{21}(u) = 4(2H^2u^2 + \kappa_2^2) \operatorname{sh}(2u) - 8\kappa_2^2u \operatorname{ch}(2uH) - 4\kappa_2^2 16H^2u^3 + 4(1 + \kappa_2^2)u + 16H^2u^3 + 8\kappa_2^2u,$$

$$n_{02}(u) = -2\kappa_2(\kappa_1(\kappa_1 - 1) + 4u^2) \operatorname{ch}(2uH) + 2\kappa_1\kappa_2(\kappa_1 - 1) \operatorname{ch}(2u) \operatorname{ch}(2uH) + (4\kappa_1(\kappa_1 - 1)H^2u^2 + \kappa_1(\kappa_1 - 1)(1 + \kappa_2^2)) \operatorname{ch}(2u) - 16H^2u^4 - 4(1 + \kappa_2^2 + \kappa_1(\kappa_1 - 1)H^2)u^2 - \kappa_1(\kappa_1 - 1)(1 + \kappa_2^2),$$

$$n_{12}(u) = 4\kappa_2(-2u^2 + \kappa_1)(\kappa_2 - 1) \operatorname{ch}(2uH) + \kappa_2(\kappa_1 - 1)(1 + \kappa_1\kappa_2) \operatorname{ch}(2u(1 + H)) - \kappa_2(\kappa_1 - 1)(\kappa_1 + \kappa_2) \operatorname{ch}(2u(H - 1)) - (4H^2u^2 + \kappa_2(\kappa_2 - 1))(\kappa_1 - 1)^2 \operatorname{ch}(2u) + 32H^2u^4 + 8(-2\kappa_1H^2 - (1 + \kappa_1)(1 + \kappa_2)H + \kappa_2(\kappa_2 - 1))u^2 - 4\kappa_1\kappa_2(\kappa_2 - 1),$$

$$n_{22}(u) = 2\kappa_2^2(1 - \kappa_1 + 4u^2) \operatorname{ch}(2uH) + 2\kappa_2^2(\kappa_1 - 1) \operatorname{ch}(2u) \operatorname{ch}(2uH) + 2(1 - \kappa_1)(2H^2u^2 + \kappa_2^2) \operatorname{ch}(2u) - 16H^2u^4 + 4(-2\kappa_2^2 + H^2(\kappa_1 - 1))u^2 + 2\kappa_2^2(\kappa_1 - 1).$$

Заменой переменных

$$x = \eta(t), \quad \xi = \eta(\tau),$$

$$\eta(t) = \frac{a+b}{2}t - \frac{a-b}{2}.$$

уравнение (1.1) преобразуется к виду

$$\int_{-1}^1 \varphi(\tau)k\left(\frac{\tau-t}{\lambda}\right) d\tau = \pi g(t), \quad |x| \leq 1, \quad (1.4)$$

где введены обозначения

$$\varphi(t) = q(\eta(t)), \quad g(t) = \frac{2\theta}{a+b} \delta(\eta(t)),$$

$$\lambda = \frac{2h}{a+b}.$$

## 2. Асимптотическое решение интегрального уравнения

Решение ИУ (1.4) с ядрами (1.2), (1.3) получим асимптотическим методом больших  $\lambda$ , воспользовавшись результатами работ [3, 4], в виде разложения

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n} \varphi_n(x); \quad (2.1)$$

$$\varphi_0(x) = X^{-1}(x)(\beta_{00} + \beta_{01}x + \beta_{02}x^2),$$

$$\beta_{02} = -\theta\beta\varepsilon_1(a+b),$$

$$\beta_{01} = \theta\beta\varepsilon_1(a-b-2\gamma(a+b)),$$

$$\beta_{00} = \frac{2\varepsilon_1 P}{\pi(a+b)} +$$

$$+ \theta\beta\varepsilon_1 \left[ 2\gamma(a-b) + (1-4\gamma^2)\frac{a+b}{2} \right];$$

$$\varphi_n(x) = X^{-1}(x) \sum_{k=0}^n \beta_{nk} x^k \quad (n \geq 1), \quad (2.2)$$

$$X(x) = (1+x)^{1/2+\gamma}(1-x)^{1/2-\gamma},$$

$$\gamma = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \varepsilon, \quad \varepsilon_1 = 1/\sqrt{1+\varepsilon^2},$$

коэффициенты  $\beta_{nk}$  находятся из следующих рекуррентных соотношений:

$$\beta_{n,n} = \frac{2}{(a+b)\pi} (-1)^n \varepsilon_1 c_n P \quad (n \geq 1),$$

$$\begin{aligned} \beta_{n,n-1} = & -\frac{2\gamma\varepsilon_1}{\pi} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} r_{n,n-1} + \\ & + \frac{\varepsilon_1}{\pi} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-2)!} r_{n,n-2} \quad (2.3) \\ & (n \geq 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_{n,k} = & \frac{\varepsilon_1^2}{\pi^2} \sum_{m=k+1}^{n-1} \frac{(-1)^m}{m!} Q_{m-k-1}^* r_{n,m} - \\ & - \frac{2\gamma\varepsilon_1}{\pi} \frac{(-1)^k}{k!} r_{n,k} + \frac{\varepsilon_1}{\pi} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} r_{n,k-1} \\ & (0 \leq k \leq n-2, \quad n \geq 2). \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно решение ИУ (1.4) представляется в виде (2.1), (2.2) с учетом рекуррентных соотношений (2.3).

Зависимость перемещения штампа  $\delta$  от действующей на него вертикальной силы  $P$  может выражена соотношением

$$\begin{aligned} \delta = & \frac{a+b}{2\theta Q_0} \left\{ (\ln \lambda + D) \frac{2P}{(a+b)\varepsilon_1} + \right. \\ & \left. + \theta\beta \left[ \frac{(a-b)^2}{2(a+b)} Q_0 + (a-b)Q_1 + \frac{a+b}{2} Q_2 \right] - \Psi \right\}, \end{aligned}$$

$$\Psi = \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^{-m} \sum_{p=0}^m \frac{Q_p}{p!} S_{mp},$$

$$\begin{aligned} S_{mp} = & \sum_{n=0}^{m-p} \frac{(m-n)! c_{m-n}}{(m-n-p)!} \sum_{k=0}^n \beta_{nk} Q_{m-n-p+k} + \\ & + \frac{m! c_m}{(m-p)!} \sum_{k=1}^2 \beta_{0k} Q_{m-p+k}. \end{aligned}$$

Величину момента контактных напряжений найдем с помощью следующего выражения:

$$\begin{aligned} M = & \frac{(a+b)^2}{4} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} \sum_{k=0}^n \beta_{nk} Q_{k+1} + \right. \\ & \left. + \sum_{k=0}^2 \beta_{0k} Q_{k+1} \right] - \frac{a-b}{2} P. \end{aligned}$$

Здесь и выше использованы обозначения

$$\begin{aligned} r_{n,m} = & \sum_{i=m+1}^{n-1} \frac{i! c_i}{(i-m-1)!} \times \\ & \times \sum_{p=0}^{n-i} \beta_{n-i,p} Q_{p+i-m-1} + \\ & + \frac{n! c_n}{(n-m-1)!} \sum_{p=0}^2 \beta_{0,p} Q_{p+n-m-1}. \end{aligned}$$

$$Q^* = \frac{\pi}{2} (-1)^k (1-4\gamma) \sqrt{1+\varepsilon^2} F(3/2+\gamma, -k; 3; 2),$$

$$Q_k = \pi (-1)^k \sqrt{1+\varepsilon^2} F(1/2-\gamma, -k; 1; 2),$$

$$F(\alpha, -k; n; 2) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(\alpha)_i (-k)_i}{i! (n)_i} 2^i,$$

$$(a)_i = a(a+1) \dots (a+i-1), \quad (a)_0 = 1,$$

$$D = -(\ln 2 + C + \frac{1}{2} \psi(1/2 + \gamma) + \frac{1}{2} \psi(1/2 - \gamma)),$$

где  $C$  — постоянная Эйлера,  $\psi(x)$  — пси-функция Эйлера,

$$c_0 = \int_0^{\infty} \frac{1 - L_1(u) - e^{-u}}{u} du,$$

$$c_{2i} = \frac{(-1)^i}{(2i)!} \int_0^{\infty} [1 - L_1(u)] u^{2i-1} du \quad (i \geq 1),$$

$$c_{2i-1} = \frac{(-1)^i}{(2i-1)!} \int_0^{\infty} [1 - L_2(u)] u^{2i-2} du \quad (i \geq 1).$$

Для случая  $n = 1$  и  $n = 2$  коэффициенты  $\beta_{n,k}$  имеют вид

$$\beta_{10} = -\gamma\varepsilon_1 b_1 \frac{4P}{\pi(a+b)},$$

$$\beta_{11} = -\varepsilon\varepsilon_1 b_1 \frac{2P}{\pi(a+b)},$$

$$\beta_{20} = -\frac{2P}{\pi(a+b)}d_1\varepsilon_1(1-12\gamma^2) + \theta\beta\varepsilon_1d_1\gamma(1-4\gamma^2) \left[ \frac{4}{3}\gamma(a+b) - 2(a-b) \right],$$

$$\beta_{21} = \frac{16P}{\pi(a+b)}\varepsilon_1d_1\gamma + \theta\beta\varepsilon_1(1-4\gamma^2) \left[ \frac{2}{3}(a+b) - 2(a-b) \right],$$

$$\beta_{22} = \frac{4Pd_1}{\pi(a+b)}.$$

Рекуррентные соотношения (2.3) содержат только арифметические операции, что позволяет с помощью программ, выполняющих аналитические преобразования (типа Maple), получать в аналитическом виде любое конечное число членов в разложениях (2.1), (2.2). Это дает возможность находить решение ИУ с любой степенью точности в области сходимости ряда (2.1).

Для задачи 2 во всех вышеприведенных формулах необходимо положить  $b = a$ , и контактные напряжения  $q(x) = \varphi(x/a)$  будут иметь особенность, соответствующую особенности функции  $X(x)$ . Для задачи 1 контактные напряжения под подошвой штампа найдем по формуле  $q(x) = \varphi((2x+a-b)/(a+b))$ , предварительно определив границы области контакта из условия равенства нулю контактных напряжений при  $x = -a$  и  $x = b$ . В результате получим систему двух нелинейных уравнений с двумя неизвестными  $a$  и  $b$

$$\varphi(-1) = 0, \quad \varphi(1) = 0. \quad (2.4)$$

Система (2.4) достаточно громоздка и выписать точное ее решение в общем виде не представляется возможным. Поэтому в каждом конкретном случае решение системы (2.4) будем находить численно с высокой точностью, что не вызывает больших затруднений в силу представления уравнений системы в виде равенства нулю двух многочленов относительно искомых величин.

Отметим, что с учетом (2.4) для задачи 1 функция  $\varphi(t)$  представима в виде

$$\varphi(t) = X(-t)\varphi_*(t),$$

где  $\varphi_*(t)$  — непрерывная и ограниченная при  $|t| \leq 1$  функция.

Если же решение ИУ (1.4) находить с точностью до членов порядка  $O(\lambda^{-2})$ , то решение системы (2.4) может быть выписано явно в виде несложных соотношений. При больших значениях  $h_1$  ( $h_1 \gg (a+b)/2$ ) асимптотические формулы для определения зоны контакта примут вид

$$\begin{aligned} a &= a_s - \frac{d}{h_1} + O\left(\frac{1}{h_1^2}\right), \\ b &= b_s + \frac{d}{h_1} + O\left(\frac{1}{h_1^2}\right), \quad d = -\frac{P\mu c_1(1-2\nu_1)}{4\pi\beta G_1}, \\ a_s &= \sqrt{\frac{P(1-\nu_1)(1+2\gamma)}{\pi G_1\beta(1-2\gamma)}}, \quad (2.5) \\ b_s &= \sqrt{\frac{P(1-\nu_1)(1-2\gamma)}{\pi G_1\beta(1+2\gamma)}}, \quad 0 \leq \gamma < \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

В формулах (2.5) интервал  $(-a_s, b_s)$  — зона контакта при взаимодействии штампа с полупространством [10], при этом всегда  $a_s > b_s$ , за исключением случая  $\nu = 0,5$  ( $\gamma = 0$ ), когда  $a_s = b_s$ .

### 3. Числовые расчеты и выводы

Величина  $c_1$  в формуле (2.5), так же как и величина  $d$ , может менять свой знак в зависимости от значения параметров  $G$  и  $H$  и коэффициентов Пуассона  $\nu_i$  ( $i = 1, 2$ ). В табл. 1 приведены значения величины  $d^* = G_1d/P$  при  $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$  и некоторых значениях параметров  $G$  и  $H$ . Из табл. 1 и формул (2.5) видно, что величина  $d$  возрастает с увеличением любого из параметров:  $G$  — относительной жесткости слоев,  $H$  — относительной толщины слоев,  $\nu_1$ ,  $\mu$  или  $h_1$ , что соответственно влияет на положение области контакта. В последней колонке табл. 1 указано значение  $G = G^*$ , когда  $d^* = 0$  при значении  $H$  из соответствующей строки.

На основе полученных выше формул для задачи 1 были проведены расчеты параметров зоны контакта  $a$  и  $b$ , распределения напряжений под штампом  $q(x) = G_1q^*(x)$ , перемещения штампа  $\delta$  и момента контактных напряжений  $M = G_1M^*$ . В табл. 2 даны результаты расчетов величин  $a$ ,  $b$ ,  $x_0 = (b-a)/2$  (координата середины зоны контакта),  $\delta$ ,  $x^*$  (координата максимальных напряжений),  $q^*(x^*)$  (приведенная величина максимальных напряжений) и  $M^*$  при  $P/G_1 = 0,001$ ,  $\mu = 0,5$ ,

Таблица 1

$G$	0,1	0,25	0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	$G^*$
$H = 0,25$	-0,00536	0,0138	0,0231	0,0290	0,0324	0,0336	0,0342	0,124
$H = 0,5$	-0,0250	0,00123	0,0150	0,0241	0,0297	0,0317	0,0328	0,237
$H = 1,0$	-0,0479	-0,0136	0,00514	0,0181	0,0262	0,0293	0,0309	0,404
$H = 2,0$	-0,0711	-0,0281	-0,0444	0,0121	0,0226	0,0267	0,0289	0,600
$H = 4,0$	-0,0902	-0,0395	-0,0120	0,00724	0,0197	0,0246	0,0272	0,745

Таблица 2

$G$	$h_1$	$a \cdot 10$	$b \cdot 10$	$x_0 \cdot 10^2$	$\delta \cdot 10^3$	$x^* \cdot 10^2$	$q^*(x^*)$	$M^* \cdot 10^5$
4	0,4	0,230	0,194	-0,177	0,848	-0,368	0,0301	-0,241
4	0,2	0,228	0,195	-0,164	0,694	-0,355	0,0302	-0,228
4	0,1	0,224	0,195	-0,145	0,542	-0,332	0,0305	-0,208
4	0,05	0,216	0,190	-0,129	0,397	-0,300	0,0315	-0,188
1	0,05	0,223	0,195	-0,139	0,502	-0,325	0,0306	-0,201
0,5	0,05	0,230	0,200	-0,149	0,627	-0,350	0,0297	-0,215
0,25	0,05	0,240	0,207	-0,164	0,848	-0,389	0,0284	-0,235

Таблица 3

$H$	$a$	$b$	$x_0 \cdot 10^2$	$\delta \cdot 10^3$	$x^* \cdot 10^2$	$q^*(x^*)$	$M^* \cdot 10^5$
1	0,0240	0,0207	-0,164	0,848	-0,389	0,0284	-0,235
2	0,0248	0,0210	-0,189	1,160	-0,426	0,0277	-0,263
4	0,0254	0,0211	-0,216	1,578	-0,459	0,0273	-0,291

$\nu_1 = \nu_2 = 0,3$ ;  $H = h_2/h_1 = 1$  и некоторых значениях параметров  $G = G_2/G_1$ ,  $h_1$ . В табл. 3 приведены те же величины при  $G = 0,25$ ,  $h_1 = 0,05$  и некоторых значениях  $H$ . На рис. 2 представлен график распределения приведенных контактных напряжений  $q^*(x)$  при  $h_1 = 0,05$ ,  $H = 1$ ,  $G = 4$  (пунктирная линия) и  $G = 0,25$  (сплошная линия). Рис. 3 иллюстрирует распределение  $q^*(x)$  при  $h_1 = 0,05$ ,  $G = 0,25$ ,  $H = 1$  (пунктирная линия) и  $H = 4$  (сплошная линия).

На основании формул (2.5), результатов многочисленных расчетов, в том числе приведенных в табл. 1, 2, 3 и изображенных на рис. 2, 3, а также результатов, полученных в [2,5,6], можно сделать ряд выводов о характере зависимости области контакта от некоторых параметров: 1) середина зоны контакта смещается вправо (по направлению действия сдвигающего усилия  $T$ ) при уменьшении толщины слоёв; при увеличении коэффициента Пуассона верхнего слоя, относительной жесткости  $G$  нижнего слоя, силы  $P$  и коэффициента трения  $\mu$ ; 2) возможно такое сочетание параметров, когда: а) положение зоны контакта будет такое же, как и для полупространства,

имеющего упругие постоянные верхнего слоя; б) зона контакта будет симметрична относительно первоначальной точки касания; в) момент контактных напряжений будет отрицательным, равным нулю или положительным, г) точка максимальных контактных напряжений будет находиться слева, справа или на оси симметрии штампа; 3) вертикальное перемещение штампа почти не зависит от коэффициента трения.

Для задачи 2 также были проведены расчеты перемещения штампа  $\delta$ , контактных напряжений  $q(x)$ , момента  $M$  контактных напряжений и формы свободной поверхности вне штампа. В табл. 4 представлены некоторые результаты расчетов  $\delta$ , координаты минимальных контактных напряжений  $x_*$ , приведенных контактных напряжений  $q^*(x)$  в точках  $x = -0,9$ ;  $0,9$ ;  $x_*$ , приведенного момента  $M^*$  контактных напряжений и величины смещения  $w(x)$  точек деформированной поверхности  $y = h_1$  вне зоны контакта в точках  $x = -1,1$ ;  $1,1$  при  $P/G_1 = 0,1$ ,  $H = 1$ ,  $a = 1$  и некоторых значениях  $G$  и  $h_1$ . Табл. 5 содержит те же величины при  $h_1 = 2$ ,  $G = 0,25$  и некоторых значениях  $H$ . На рис. 4 приведены графики

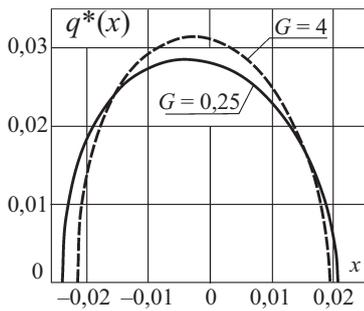


Рис. 2

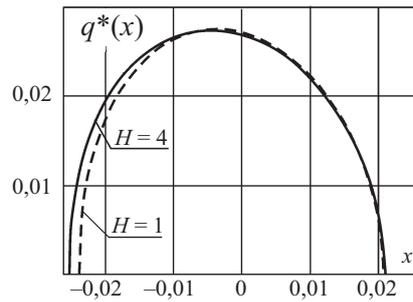


Рис. 3

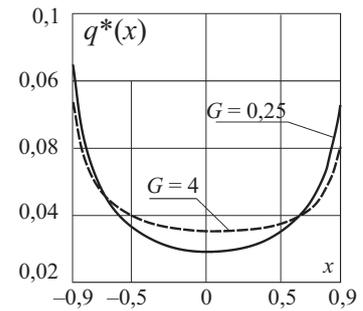


Рис. 4

Таблица 4

$G$	$h_1$	$\delta \cdot 10$	$x_* \cdot 10$	$q^*(-0,9)$	$q^*(x_*)$	$q^*(0,9)$	$M^* \cdot 10^2$	$w(-1,1)$	$w(1,1)$
4	4	0,396	0,543	0,0781	0,0327	0,0647	-0,671	0,0285	0,0314
4	2	0,259	0,986	0,0745	0,0353	0,0611	-0,661	0,0167	0,0177
0,25	4	0,865	0,761	0,0843	0,0301	0,0650	-0,908	0,0731	0,0785
0,25	2	0,688	0,130	0,0845	0,0277	0,0720	-0,662	0,0540	0,0605

Таблица 5

$H$	$\delta \cdot 10$	$x_* \cdot 10$	$q^*(-0,9)$	$q^*(x_*)$	$q^*(0,9)$	$M^* \cdot 10^2$	$w(-1,1)$	$w(1,1)$
1	0,688	0,130	0,0845	0,0277	0,0720	-0,662	0,0540	0,0605
2	0,994	0,167	0,0882	0,0257	0,0734	-0,758	0,0831	0,0913
4	1,410	0,234	0,0911	0,0245	0,0736	-0,867	0,124	0,133

контактных напряжений при  $h_1 = 2$ ,  $H = 1$ ,  $G = 4$  (пунктирная линия) и  $G = 0,25$  (сплошная линия).

### Литература

1. Александров В. М. О плоских контактных задачах теории упругости при наличии сцепления и трения // ПММ. 1970. Т. 34. Вып. 2. С. 246–257.
2. Александров В. М., Чебаков М. И. Аналитические методы в контактных задачах теории. М.: Физматлит, 2004. 304 с.
3. Чебаков М. И. Асимптотическое решение контактных задач для упругого слоя относительно большой толщины при наличии сил трения в области контакта // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 2. С. 324–333.
4. Чебаков М. И. О некоторых особенностях контактного взаимодействия штампа и упругого слоя при наличии сил трения в области контакта // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2004. №3. С. 23–28.
5. Чебаков М. И. Трехмерная контактная задача для слоя с учетом трения в неизвестной области контакта // ДАН. 2002. Т. 383. №1. С. 67–70.
6. Чебаков М. И. Контактная задача для двойного слоя с учетом сил трения // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естество. науки. 2005. №3. С. 22–24.
7. Попов Г. Я. К решению плоской контактной задачи теории упругости при наличии сил сцепления или трения // Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. наук. 1963. Т. 16. №2. С. 15–32.
8. Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. 336 с.
9. Александров В. М., Чебаков М. И. Введение в механику контактных взаимодействий. Ростов-на-Дону: ЦВВР, 2005. 108 с.
10. Мухомливили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 708 с.

Статья поступила 21 октября 2005 г.

НИИ механики и прикладной математики им. И. И. Воровича Ростовского государственного университета

© Чебаков М. И., 2006