Механика

УДК 539.3

ЗАДАЧА О ВЗАИМОДЕЙСТВИИ ТЕЛ С ПОКРЫТИЯМИ ПРИ ИЗНОСЕ, ТЕПЛОВЫДЕЛЕНИИ И УЧЕТЕ ЗАВИСИМОСТИ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

Александров В. М.[1]***, Губарева Е. А.***[2]

A PROBLEM ABOUT INTERACTION OF BODIES WITH COATINGS DURING WEARING PROCESS, HEAT GENERATION AND TAKING INTO ACCOUNT DEPENDENCE OF A FRICTION FACTOR ON TEMPERATURE

Alexandrov V. M., Gubareva E. A.

The contact problem of thermoelasticity for bodies with soft thin elastic coatings is investigated. To consider more phenomena in the contact region, the scheme of the contact between solids and soft coatings has been deliberately simplified maximum possible. A linear expression for the dependence of a friction factor on contact temperatures of coatings has been offered. In addition, a formula has been offered to describe the dependence of thermal resistance on contact pressure. The phenomenon of wearing process of coatings as a result of friction is considered during heat generation under the conditions of nonideal thermal contact. Relation of contact temperatures with contact pressure, a resource of a tribojoint, dependence of contact pressure and contact temperatures on the wearing process duration are determined.

1. Постановка задачи о контактном взаимодействии двух тел с тонкими мягкими покрытиями

Пусть на одно тело нанесено покрытие 1 начальной толщины h_{10}, а на другое тело — покрытие 2 начальной толщины h_{20}; механические и теплофизические характеристики покрытий различны; механические характеристики самих тел значительно превосходят механические характеристики покрытий тел так, что тела по сравнению с их покрытиями можно считать абсолютно жесткими; область контакта тел с покрытиями намного превосходит толщины покрытий h_{10} и h_{20} так, что покрытия можно считать относительно тонкими.

В близкой постановке задача рассматривалась в [1–3].

Используя «принцип микроскопа» [4], растянем окрестность какой-либо точки внутри области контакта и представим схему контакта тел с покрытиями, как показано на рис. 1.

Пусть в момент времени $t = 0$ одно тело, находясь в контакте с другим, начинает двигаться относительно него с постоянной скоростью V в направлении оси z или x. Динамическими эффектами будем пренебрегать. Обозначим через $q(t)$ контактное давление в момент времени t, в силу принципа микроскопа его можно считать не зависящим от координат x и z.

Допустим, что в области контакта возникают силы трения $\tau(t)$, связанные с контактным давлением $q(t)$ линейной зависимостью (закон Кулона)

$$\tau = kq.$$

Для коэффициента трения k примем выражение

$$k = [k_1 + 1/2k_2(\beta_1 T_1^* + \beta_2 T_2^*)],$$

где k_i — некоторые безразмерные постоянные $(i = 1, 2)$, T_i^* — контактные температуры, $\beta_i = (1 + \nu_i)(1 - \nu_i)^{-1}\alpha_i$, ν_i — коэффициенты Пуассона материалов покрытий, α_i — их коэффициенты линейного расширения.

Вследствие трения в области контакта возникает износ поверхностей покрытий. Происходит изменение толщин покрытий за счет износа и термоупругих деформаций. Обозначим текущие значения толщин покрытий че-

[1]Александров Виктор Михайлович, д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института проблем механики Российской академии наук.

[2]Губарева Елена Александровна, аспирант кафедры теории пластичности Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

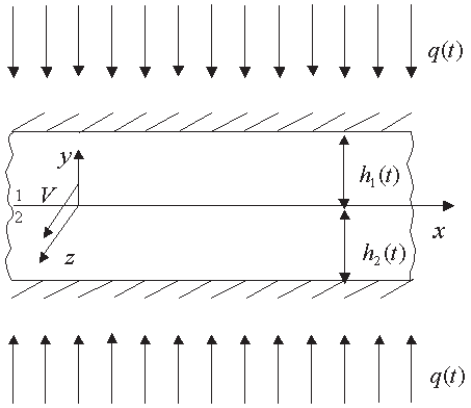


Рис. 1. Схема контакта тел с покрытиями

рез $h_1(t)$ и $h_2(t)$. Износ будем считать абразивным, тогда уменьшение толщин вследствие износа произойдет соответственно на величины [5]

$$v_{1*}(t) = -l_1 V \int_0^t kq d\varsigma, \qquad v_{2*}(t) = l_2 V \int_0^t kq d\zeta, \tag{1.1}$$

где l_i — коэффициенты износостойкости материалов покрытий ($i = 1, 2$).

Вследствие трения в области контакта происходит также тепловыделение. Если пренебречь малой долей мощности работы сил трения, идущей на износ покрытий и на приращение мощности их упругой энергии, то количество тепла, выделяемое в единицу времени на единицу площади контакта, можно представить формулой

$$Q = Vkq.$$

Износ — медленно протекающий процесс, поэтому будем считать, что функции $q(t)$, $\tau(t)$ и $h_i(t)$ являются медленно меняющимися.

2. Определение контактных температур

В контактной задаче с учетом износа и тепловыделения от трения интересно определить не только контактное давление, но и контактные температуры поверхностей покрытий. Для этого предварительно, до определения контактного давления (временно считая его заданным), должна быть рассмотрена задача теплопроводности для тел с покрытиями при наличии источников тепла в области их контакта, т. е. при $y = 0$. Поскольку $q(t)$ изменяется медленно, то процесс теплопроводности можно считать квазистационарным.

С учетом так называемого «третьего тела» [6], тонкого разрушенного и поврежденного слоя материалов покрытий, примыкающего к области контакта $y = 0$, сформулируем на этой оси условия неидеального теплового контакта [3, 7]

$$\lambda_2 T_2' - \lambda_1 T_1' = Q,$$

$$\lambda_2 T_2' + \lambda_1 T_1' = 2(T_1 - T_2)/r(q). \tag{2.1}$$

Здесь T_i — температуры в покрытиях, λ_i — коэффициенты теплопроводности их материалов, $r(q)$ — контактное термосопротивление. Чем больше $q(t)$, тем плотнее контакт между покрытиями и меньше $r(q)$, т. е. $r(q)$ — монотонно убывающая функция. Ниже примем, что

$$r(q) = r_*(\gamma_1 + \gamma_2)/2q(t), \tag{2.2}$$

где r_* — экспериментально определяемая постоянная, $\gamma_i = \frac{2(1-\nu_i)}{1-2\nu_i} G_i$, G_i — модули сдвига материалов покрытий.

Допустим, что температура тел – подложек T_0 постоянна и все время равна температуре окружающей среды, ее можно принять за начало отсчета температур, т. е. положить $T_0 = 0$, и тогда будем считать заданными следующие условия теплообмена между покрытиями и подложкой

$$\xi_1 \frac{\partial T_1}{\partial y} + \eta_1 T_1 = 0 \quad (y = h_1),$$

$$\xi_2 \frac{\partial T_2}{\partial y} - \eta_2 T_2 = 0 \quad (y = -h_2),$$

где ξ_i, η_i — коэффициенты теплообмена. Температуры покрытий в области контакта

$(y = 0)$ обозначим через T_i^*. Тогда из уравнений теплопроводности для покрытий

$$T_i'' = 0$$

найдем для температур в покрытиях выражения

$$\begin{aligned} T_1 &= -\frac{\eta_1 T_1^*}{\xi_1 + \eta_1 h_1} y + T_1^*, \\ T_2 &= \frac{\eta_2 T_2^*}{\xi_2 + \eta_2 h_2} y + T_2^*. \end{aligned} \tag{2.3}$$

С помощью соотношений (2.3) удовлетворим условиям (2.1). В результате для контактных температур T_i^* получим

$$T_1^* = \left(2d_2 + \frac{4}{r(q)}\right) k_1 V q D^{-1},$$

$$T_2^* = \left(2d_1 + \frac{4}{r(q)}\right) k_1 V q D^{-1},$$

$$D = 4d_1 d_2 + \frac{4}{r(q)}(d_1 + d_2) - \\ - \left(d_1\beta_2 + d_2\beta_1 + \frac{2(\beta_1 + \beta_2)}{r(q)}\right) V q k_2,$$

$$d_i = \frac{\lambda_i \eta_i}{\xi_i + \eta_i h_i}. \tag{2.4}$$

Очевидно, нужно потребовать, чтобы в любой момент времени t выполнялось условие

$$D > 0, \tag{2.5}$$

которое необходимо для осуществления режима квазистационарной теплопроводности. При $k_2 < 0$, т. е. когда коэффициент трения с ростом средней контактной температуры убывает, это условие выполняется всегда. При $k_2 > 0$ условие (2.5) накладывает ограничение на величину скорости V или контактного давления $q(t)$. В случае $k_2 > 0$ при определенных значениях этих, а также других величин, входящих в выражение для D, может сложиться ситуация, когда в какой-то момент времени D обратиться в нуль, а контактные температуры станут бесконечными. Такое явление называют тепловым взрывом [8]. При $k_2 = 0$ условие (2.5) выполняется автоматически. Однако необходимо еще потребовать, чтобы T_i^* при любых значениях t не достигали температур плавления T_{i_*} материалов соответствующих покрытий. Это при условии, что $q(t) \leqslant q^* < \infty$ накладывает ограничение на скорость V, т. е. из равенств $\max_t T_i^* = T_{i_*}$ может быть найдена некоторая критическая скорость V_*, превышение которой приведет в какой-то момент времени к подплавлению одного из покрытий.

Для окончательного суждения о величине контактных температур надо определить контактное давление $q(t)$. Учитывая выражения (2.4), получим

$$k = k_1 + 0,5 k_2 k_1 V q \Big[2(d_2\beta_1 + d_1\beta_2) + \\ + \frac{4}{r(q)}(\beta_1 + \beta_2)\Big] D^{-1}.$$

3. Определение ресурса трибосопряжения

Допустим сначала, что функция $q(t)$ задана и найдем ресурс работы пары тел с покрытиями. Для этого должны иметь место равенства

$$\begin{aligned} v_1(h_1, t) + v_{1_*}(t) &= -h_{10} + h_1(t), \\ v_2(-h_2, t) + v_{2_*}(t) &= h_{20} - h_2(t), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $v_i(y, t)$ — упругие перемещения точек покрытий по оси y, а $v_{i_*}(t)$ определяются формулами (1.1). Относительно $v_1(h_1, t)$ и $v_2(-h_2, t)$ заметим, что с уменьшением $h_i(t)$ справедливы асимптотические соотношения

$$\begin{aligned} v_1(h_1, t) &= O(h_1), \\ v_2(-h_2, t) &= O(h_2) \end{aligned} \tag{3.2}$$

(это вытекает из формул (4.4), приведенных ниже).

Предположим, что износ достаточно развит, тогда в силу формул (3.1) и (3.2), учитывая (2.5), можно записать

$$\begin{aligned} h_{10} - l_1 V \int_0^t k q d\varsigma &= O(h_1), \\ h_{20} - l_2 V \int_0^t k q d\varsigma &= O(h_2). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Определим ресурс работы трибосопряжения как время, необходимое для полного истирания одного из покрытий. Из первой формулы (3.3) при $h_1 = 0$ найдем некоторое время t_1, из второй формулы (3.3) при $h_2 = 0$ определим некоторое время t_2. Тогда ресурс равен

$$t_* = \inf(t_1, t_2).$$

Например, при $q(t) \equiv q_* = \text{const}$ имеем

$$t_* = \inf\left[\frac{h_{10}}{l_1 V k q}, \frac{h_{20}}{l_2 V k q}\right].$$

4. Интегральное уравнение для определения контактного давления

Пусть теперь функции $h_i(t)$ заданы, тогда функция

$$\delta(t) = h_{10} + h_{20} - h_1(t) - h_2(t), \qquad (4.1)$$

определяющая процесс сближения оснований $y = h_1(t)$ и $y = -h_2(t)$ покрытий, также задана. Найдем, как изменяется контактное давление $q(t)$.

Вычтем первое соотношение (3.1) из второго, тогда в силу (4.1) получим

$$v_2(-h_2, t) - v_1(h_1, t) + \\ + v_{2_*}(t) - v_{1_*}(t) = \delta(t). \qquad (4.2)$$

Чтобы определить $v_2(-h_2, t)$ и $v_1(h_1, t)$, т. е. вертикальные упругие перемещения границ $y = h_1(t)$ и $y = -h_2(t)$ покрытий, воспользуемся, пренебрегая инерционными членами, уравнениями линейной несвязанной термоупругости [9]. Принимая во внимание, что напряженно-деформированное состояние покрытий зависит только от координаты y и времени t (как параметра), получим

$$\frac{d^2 v_i}{dy^2} = \beta_i \frac{dT_i}{dy}, \quad \sigma_{yi} = \gamma_i\left(\frac{dv_i}{dy} - \beta_i T_i\right), \qquad (4.3)$$

где σ_{yi} — нормальные напряжения.

Учитывая, что температуры в покрытиях определяются формулами (2.3), и интегрируя дифференциальные уравнения (4.3), будем иметь

$$v_i(y, t) = \frac{\beta_i T_i^*}{2h_i} y^2 + a_i y + b_i h_i,$$

$$\sigma_{yi} = \gamma_i(a_i - \beta_i T_i^*).$$

Функции времени a_i и b_i определим из следующих граничных условий:

$$v_1(0, t) = v_2(0, t) = 0,$$

$$\sigma_{y1}(0, t) = \sigma_{y2}(0, t) = 0.$$

В результате получим

$$v_1(h_1, t) = -q h_1/\gamma_1 + \beta_1 h_1 T_1^*/2,$$

$$v_2(-h_2, t) = q h_2/\gamma_2 - \beta_2 h_2 T_2^*/2. \qquad (4.4)$$

Подставим теперь соотношения (1.1) и (4.4) в (4.2) и исключим T_i^* с помощью формул (2.4). В итоге получим для определения $q(t)$ при известных $h_i(t)$ (а, следовательно, и при известном $\delta(t)$) нелинейное интегральное уравнение Вольтерра

$$\left(\frac{h_2}{\gamma_2} + \frac{h_1}{\gamma_1}\right) q - \frac{4/r(q) k_1 V q(\beta_1 h_1 + \beta_2 h_2)}{2D} + \\ + \frac{2k_1 V q(\beta_1 h_1 d_2 + \beta_2 h_2 d_1)}{2D} + \\ + (l_1 + l_2) V \int_0^t k q d\varsigma = \delta(t). \qquad (4.5)$$

5. Случай относительно малого времени износа

Пусть $\delta(t)$ имеет порядок упругого перемещения. Это будет очевидно, если рассмотрим относительно малый отрезок времени $0 \leqslant t \leqslant t_* < \infty$. В этом случае в уравнении (4.5) можно приближенно заменить $h_i(t)$ на h_{i0}. Положим также, что $k(q)$ и $r(q)$ имеют соответственно вид (2.5) и (2.2), а скорость износа постоянна, т. е.

$$\delta(t) = \delta_0 + \delta_1 t,$$

где δ_0 и δ_1 — некоторые заданные постоянные. Тогда интегральное уравнение (4.5) после перехода к безразмерным величинам

$$q' = \frac{2q}{\gamma_1 + \gamma_2},$$

$$t' = \frac{Vt}{h_{10} + h_{20}},$$

$$\delta_0' = \frac{\delta_0}{h_{10} + h_{20}},$$

$$\delta_1' = \frac{\delta_1}{V}$$

(штрихи далее опускаем) и безразмерным комплексам

$$a = \frac{(h_{20}\gamma_1 + h_{10}\gamma_2)(\gamma_1 + \gamma_2)}{2\gamma_1\gamma_2(h_{10} + h_{20})},$$

$$c = \frac{V k_1(\beta_2 h_{20} d_1 + \beta_1 h_{10} d_2)(\gamma_1 + \gamma_2)}{8 d_1 d_2 (h_{10} + h_{20})},$$

$$d = \frac{V k_1(\beta_1 h_{10} + \beta_2 h_{20})(\gamma_1 + \gamma_2)}{4 d_1 d_2 (h_{10} + h_{20}) r_*},$$

Значения величин для данных материалов

Величины	Материал 1	Материал 2
G(Н/м^2)	$3,6 \cdot 10^{10}$	$2,7 \cdot 10^{10}$
ν	0,35	0,34
λ(Вт/(м·К)	111	209
$\alpha(1/\text{К})$	$18,4 \cdot 10^{-6}$	$23,8 \cdot 10^{-6}$

$$e = \frac{(d_1+d_2)}{r_* d_1 d_2} - \frac{(d_2\beta_1 + d_1\beta_2)Vk_2(\gamma_1+\gamma_2)}{8d_1d_2},$$

$$f = \frac{(\beta_1+\beta_2)(\gamma_1+\gamma_2)Vk_2}{8d_1d_2r_*},$$

$$h = (l_1+l_2)(\gamma_1+\gamma_2)/2,$$

$$n = \frac{(d_2\beta_1 + d_1\beta_2)Vk_1(\gamma_1+\gamma_2)}{4d_1d_2},$$

$$p = \frac{(\beta_1+\beta_2)(\gamma_1+\gamma_2)k_1V}{2d_1d_2\ r_*},$$

$$s = \frac{d_1+d_2}{d_1d_2r_*} - \frac{(d_2\beta_1+d_1\beta_2)(\gamma_1+\gamma_2)Vk_2}{8d_1d_2},$$

$$w = \frac{(\beta_1+\beta_2)(\gamma_1+\gamma_2)Vk_2}{4r_*d_1d_2} \qquad (5.1)$$

примет вид

$$qa - \frac{cq+dq^2}{1+eq-fq^2} + h\int\limits_0^t k_1 q\,d\varsigma + \\ + \frac{1}{2}h\int\limits_0^t k_2 q \frac{nq+pq^2}{1+sq-wq^2}\,d\varsigma = \delta_0 + \delta_1 t.$$

Заметим, что интегральное уравнение (5.1) эквивалентно дифференциальному уравнению

$$q'\left(a - \frac{c-eb+2qd+q^2(cf+de)}{(1+eq-fq^2)^2}\right) + \\ + hk_1q + 0,5hk_2q\frac{nq+pq^2}{1+sq-wq^2} = \delta_1 \qquad (5.2)$$

при начальном условии

$$q_0a - \frac{cq_0+dq_0^2}{1+eq_0-fq_0^2} = \delta_0, \qquad (5.3)$$

где q_0 — начальное безразмерное контактное давление. Приближенное решение уравнения (5.2) при условии (5.3) может быть, например, получено методом Рунге–Кутта [10].

После решения задачи (5.2), (5.3) и определения $q(t)$ безразмерные контактные температуры

$$\theta_i = \frac{2T_i^*\lambda_i}{V(\gamma_1+\gamma_2)h_i}$$

могут быть найдены в соответствии с выражениями (2.4) по формулам

$$\theta_i = \frac{\psi_i q + \chi_i q^2}{1+sq-wq^2},$$

$$\psi_1 = \frac{\lambda_1 d_2 k_1(\gamma_1+\gamma_2)V}{2V(\gamma_1+\gamma_2)h_1d_1d_2},$$

$$\psi_2 = \frac{\lambda_2 d_1 k_1(\gamma_1+\gamma_2)V}{2V(\gamma_1+\gamma_2)h_1d_1d_2},$$

$$\chi_i = \frac{\lambda_i k_1}{r_* d_1 d_2}.$$

6. Численное решение

Полученное дифференциальное уравнение (5.2) с начальным условием (5.3) было решено численно с помощью компьютерной математической системы Maple 9.5 для покрытий из латуни (1) и дюралюминия (2). Положим $h_{10} = h_{20}$=0,001 м; V=0,3м/с; k_1=0,1; $l = 10^{-17}$м^2/Н, $\xi_1 = \xi_2 = 0$, $k_2 = 0,02$; 0.

На рис. 2 показана зависимость давления от времени (для безразмерных величин) для $r_* = 1/2$, $\delta_0 = 1,064 \cdot 10^{-6}$(м), $\delta_1 = 0,274 \cdot 10^{-6}$(м).

Кривой 1 соответствует значение $k_2 = 0,02$, начальное давление $q_0 = 0,000558$, а кривой 2 — $k_2 = 0$, $q_0 = 0,558$. Для кривой 1 критическим значением является $t = 959,18367$, для кривой 2 — $t = 979,59184$ (происходит обращение в нуль знаменателя D вида (2.4)). Аналогичным образом изменяются во времени для случаев 1 и 2 контактные температуры T_1^* и T_2^*.

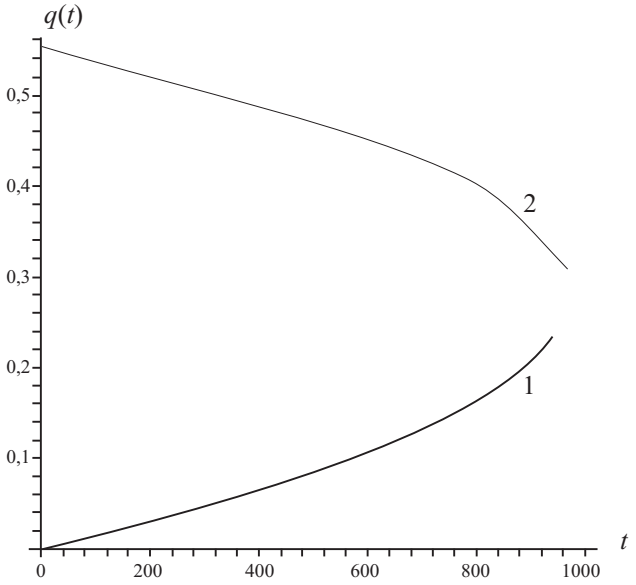


Рис. 2. Изменение контактного давления во времени

Литература

1. *Александров В. М.* О термосиловом взаимодействии деформируемых покрытий тел с учетом износа // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1995. № 5. С. 70–75.
2. *Александров В. М.* Абразивный износ тонкого мягкого покрытия при нелинейном законе трения с учетом тепловыделения // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Техн. науки. 2001. Спецвыпуск. С. 11–13.
3. *Александров В. М.* Контактная задача для тел с покрытиями с учетом нелинейного трения, износа и тепловыделения от трения // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 4. С. 128–135.
4. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
5. *Хрущов М. М., Бабичев М. А.* Абразивное изнашивание. М.: Наука, 1970. 251 с.
6. *Крагельский И. В., Добычин М. Н., Комбалов В. С.* Основы расчетов на трение и износ. М.: Машиностроение, 1977. 528 с.
7. *Подстригач Я. С.* Температурное поле в системе твердых тел, сопряженных с помощью тонкого промежуточного слоя // Инж.-физ. журнал. 1963. Т. 6. № 10. С. 129–136.
8. *Александров В. М., Аннакулова Г. К.* Взаимодействие покрытий тел с учетом деформируемости, износа и тепловыделения от трения // Трение и износ. 1992. Т. 13. № 1. С. 154–160.
9. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. Киев: Наук. думка, 1970. 308 с.
10. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. 512 с.

Статья поступила 3 марта 2006 г.
Институт проблем механики Российской академии наук
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
© Александров В. М., Губарева Е. А., 2006