УДК 539.3

# К ТЕОРИИ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ НАКЛОННО-СЛОИСТОЙ СРЕДЫ

***Беркович В. Н.***[1]

## TO THE THEORY OF MIXED DYNAMIC BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR AN INCLINED LAYERED MEDIUM

Berkovich V. N.

The paper offers a method of investigating a heterogeneous semi-infinite medium under the conditions of steady-state oscillations of antiplane shift. The media is composed of truncated wedge-shaped components of different mechanic and geometric parameters. Based on the generalized function theory under the conditions of the media interfacing, the problem in question is reduced to the boundary integral equations studied in the author's previous works.

В настоящей работе предлагается метод исследования неоднородной полубесконечной среды $\Omega$, составленной из наклонных усеченно-клиновидных компонент $\Omega_n$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ с различными упругими характеристиками и находящейся в условиях установившихся колебаний антиплоского сдвига. Смешанные задачи динамики горизонтально-слоистых и анизотропных сред изучались в [1, 2] и др. Работы, в которых рассматривались аналогичные задачи для наклонно-слоистых сред, описанных в настоящей статье, автору неизвестны. Предлагаемый ниже подход основан на использовании аппарата теории обобщенных функций и сведении поставленной выше задачи к граничным интегральным уравнениям, частично изученным в [3–7].

**1**. Будем рассматривать неоднородную среду $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{N} \Omega_n$, где $\Omega_n$ — наклонные компоненты в форме усеченного клина, примыкающие друг к другу полубесконечными попарно непересекающимися в $\Omega$ границами и образующие своими поперечными границами ломаную поверхность $\partial\Omega$. На участке границы $\partial\Omega \cap \partial\Omega_N$ заданы смещения антиплоского сдвига $f(x)e^{-i\omega t}$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ в полосе $S = [a, b] \times R^1$ , параллельной ребрам поверхности $\partial\Omega$. Остальная поверхность $\partial\Omega$ предполагается свободной (либо жестко закрепленной на $\partial\Omega \cap \partial\Omega_1$). В условиях установившихся колебаний рассматривается задача восстановления поля смещений свободной поверхности, которая сводится к следующей смешанной задаче для наклонно-слоистой среды $\Omega$ относительно неизвестной амплитуды смещений $u(x, y)$:

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega\setminus S} = 0,$$
$$\left( u|_{\partial\Omega\cap\partial\Omega_1} = \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega\setminus(S\cup\partial\Omega_1)} = 0 \right), \tag{2}$$
$$u|_{\partial\Omega\cap S} = f(r), \quad r \in [a, b],$$

$$[u]|_{\partial\Omega_n\cap\partial\Omega_{n-1}} = \left.\left[\mu\frac{\partial u}{\partial \nu}\right]\right|_{\partial\Omega_n\cap\Omega_{n-1}} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - iku = O(r^{-\frac{1}{2}}), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$k^2 = k^2(x, y) = \omega^2 d(x, y)\mu^{-1}(x, y),$$
$$\{d(x, y), \mu(x, y)\} = \sum_{n=1}^{N} \{d_n, \mu_n\}\chi(\Omega_n),$$
$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{N} \Omega_n.$$

В соотношениях (3) $[u]|_L$ — скачок функции при переходе через границу $L$ раздела сред, $\nu$ — единичная нормаль к границе области, $\chi(\Omega_n)$ — характеристическая функция

[1]Беркович Вячеслав Николаевич, канд. физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой физики и математики филиала Московского государственного университета технологий и управления в г. Ростове-на-Дону.

упругой компоненты $\Omega_n$ с плотностью $d_n$ и модулем сдвига $\mu_n$. Предполагается, что в каждой области $\Omega_n$ функция $u(x,y)$ на бесконечности исчезает и выполняются условия излучения.

Разрешимость задачи (1)–(3) в обобщенной постановке может быть установлена с использованием традиционных подходов, например, [8,9] и др. Предлагаемый ниже метод граничных интегральных уравнений в сочетании с аппаратом теории обобщенных функций позволяет сузить классы разрешимости, дать детальное описание свойств и указать эффективный способ построения приближенного решения.

**2**. Решение (1) для каждой упругой компоненты $\Omega_n$ обычно отыскивают в форме интегрального преобразования Конторовича-Лебедева

$$u_n(r,\varphi) = \frac{1}{i\pi} \int\limits_{\Gamma} \bar{u}_n(\tau,\varphi) K_{-i\tau}(æ r)\tau\, d\tau,$$

$$æ = -ik_n.$$

Бесконечный контур $\Gamma$ расположен в окрестности действительной оси и удовлетворяет принципу излучения. Как известно [5], при удовлетворении условиям сопряжения (2) в классическом смысле возникает проблема построения решения некоторой промежуточной системы сингулярных интегральных уравнений, что существенно осложняет анализ поставленной задачи. Указанную проблему можно исключить из рассмотрения при удовлетворении условиям (2) в классах обобщенных функций.

Для реализации предлагаемого подхода введем следующие пространства основных функций [10, 11]:

1. Пространство $\mathbf{E}_+$ бесконечно дифференцируемых на $R^1_+$ функций

$$\mathbf{E}_+ = \big\{\phi(t) : \gamma_k(\phi) = \sup_{t>0} |D^k\phi(t)| < \infty, \quad k = 1, 2, \dots\big\}. \quad (4)$$

2. Пространство $\mathbf{D}_+$ финитных бесконечно дифференцируемых функций $\phi(t)$ с компактными носителями в $R^1_+$ и топологией, порождаемой счетным семейством полунорм $\{\gamma_k(\phi)\}$ вида (4).

3. Пространство $\mathbf{G}$ комплекснозначных бесконечно дифференцируемых функций $\phi(t)$ с компактными носителями в $R^1_+$

$$\mathbf{G} = \big\{\phi(t) : \gamma_{k,m}(\phi) = \sup_{t>0}(1 + |t|^{2m})|D^k\phi(t)| < \infty, \quad m, k = 1, 2, \dots\big\}.$$

4. Пространство $\mathbf{Z}_+$ целых функций $\psi(z)$ вида

$$\mathbf{Z}_+ = \big\{\psi(x+iy) : |\psi(x+iy)| \leqslant A\exp(B|y|), \quad \psi(x+iy) \in \mathbf{G}, \quad \forall x = x_0\big\}.$$

Пространства, сопряженные к введенным выше, в дальнейшем будем помечать штрихом.

Теорема 1. Для выполнения соотношения

$$\int\limits_0^\infty K_{-i\tau}(æ_1\rho)F_1(\tau)d\tau = \int\limits_0^\infty K_{-i\tau}(æ_2\rho)F_2(\tau)d\tau, \quad (5)$$

$$\rho \in R^1_+, \quad æ_{1,2} > 0,$$

понимаемого в смысле равенства обобщенных функций из $D'_+$, необходимо и достаточно выполнения условия

$$æ_1^{-i\tau}F_1(\tau) = æ_2^{-i\tau}F_2(\tau), \quad \tau \in R^1_+, \quad (6)$$

понимаемого в смысле равенства обобщенных функций из $\mathbf{Z}'_+$. Для доказательства рассмотрим преобразование Меллина функции $\varphi(t)$

$$(\mathbf{M}\phi)(z) = \int\limits_0^\infty \phi(t)t^{z-1}\,dt, \quad \phi(t) \in \mathbf{D}_+,$$

задающее изоморфизм $\mathbf{D}_+$ на $\mathbf{Z}_+$. Тогда преобразование Меллина обобщенной функции $f(t) \in \mathbf{D'}_+$ определяется равенством

$$\langle \mathbf{M}f, \psi(z)\rangle = \langle f(x), \mathbf{M}^{-1}\psi\rangle, \quad \psi \in \mathbf{Z}_+ \quad (7)$$

и осуществляет изоморфизм $\mathbf{D'}_+$ на $\mathbf{Z'}_+$. Обратное преобразование $\mathbf{M}^{-1}g$ обобщенной функции $g$ определено в пространстве $\mathbf{Z'}_+$ равенством, аналогичным приведенному выше, и осуществляет изоморфизм $\mathbf{Z'}_+$ на $\mathbf{D'}_+$.

Доказательство необходимости основано на преобразовании равенства (7) в эквивалентную форму с использованием введенного выше преобразования Меллина и имеет при этом вид

$$\langle æ_1^{-i\tau}(\mathbf{M}f_1)(z) - æ_2^{-i\tau}\mathbf{M}f_2)(z), \psi(z)\rangle = 0, \quad (8)$$

$$f_{1,2}(r) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty K_{-i\tau}(æ_{1,2}r)F_{1,2}\tau)\,d\tau.$$

Дальнейшие преобразования интегралов (8) в сочетании с операциями над обобщенными функциями [11] и методом [7] приводит к (6).

Доказательство достаточности (6) проводится непосредственной его подстановкой в (5) и последующим применением преобразования (7).

Замечание 1. Последний результат находится в строгом соответствии с результатом [12], где рассмотрено интегральное преобразование Конторовича-Лебедева обобщенной функции из $\mathbf{E}'_+$ и доказана справедливость известной формулы его обращения в $\mathbf{D}'_+$.

**3**. Для сведения задачи (1)–(3) к граничным интегральным уравнениям воспользуемся функцией Грина для уравнения (1) в клиновидной области с однородными граничными условиями на гранях. Указанная функция построена в [5] и имеет вид

$$G(r,\phi|\rho,\psi) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{R^1} K_{-i\tau}(ær)K_{-i\tau}(æ\rho)\times$$
$$\times\begin{pmatrix}\operatorname{ch}\tau\psi\operatorname{ch}\tau(\alpha-\varphi),\ \psi<\varphi\\ \operatorname{ch}\tau\varphi\operatorname{ch}\tau(\alpha-\psi),\ \psi>\varphi\end{pmatrix}\frac{\sin\pi\tau}{\sin\alpha\tau}\,d\tau. \quad (9)$$

Здесь $(r,\phi)$ — полярные координаты с полюсом на ребре клина, $K_{-iz}(ær)$ — функция Макдональда, $\alpha$ — угол раствора клина, $æ = -ik$. В последующих рассуждениях будем первоначально полагать $æ > 0$.

Регулярное представление решения уравнения (1) в каждой области $\Omega_n$ с помощью функции Грина (9), удовлетворяющей граничным условиям (2), приводит к следующим рекуррентным соотношениям связи на соседних линиях раздела сред $\partial\Omega_n$:

$$\mathbf{V}_n(\tau) = \mathbf{C}^{-1}(\tau|\beta_n,\mu_n)\mathbf{C}(\tau|\alpha_{n+1},\mu_n)\times$$
$$\times\{\mathbf{V}_{n+1}\},\quad \tau\in\mathbf{R}^1, \quad (10)$$

$$\mathbf{V}_n(t) = \int\limits_0^\infty K_{-it}(æ_n s)\mathbf{v}_n(s)s^{-1}\,ds,$$

$$\mathbf{C}(\tau|\alpha_{n+1},\mu_n)\{\mathbf{V}_{n+1}\} =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{R^1} K_{-i(t-\tau)}(æ_n\ell_n)\mathbf{E}(\tau)\times$$
$$\times\,\mathbf{C}(t|\pi-\alpha_{n+1},\mu_n)\mathbf{V}_{n+1}(t)\,dt, \quad (11)$$

$$\mathbf{C}(t|\beta,\mu) = \mathbf{E}(\tau)\mathbf{Q}(\tau|\beta,\mu),$$

$$\mathbf{E}(\tau) = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{-\pi\tau}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}(\tau|\beta,\mu) =$$
$$= \begin{pmatrix}\tau\operatorname{sh}\beta\tau & \mu^{-1}\operatorname{ch}\beta\tau\\ -\tau\operatorname{sh}(\pi-\beta)\tau & \mu^{-1}\operatorname{ch}(\pi-\beta)\tau\end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$q_n(\rho) = \mu_n\frac{\partial u}{\partial\nu_n},\quad \mathbf{v}_n = \begin{pmatrix}u_n(s)\\ q_n(s)\end{pmatrix},$$

$$\pi\leqslant\alpha_n+\beta_n\leqslant\frac{3\pi}{2}.$$

В (10) $\alpha_n$, $\beta_n$ — углы в окрестности $n$-ой линии раздела сред, $\ell_n$ — длина поперечного участка границы $\partial\Omega_n$. В процессе получения соотношений (9) использовано интегральное преобразование Крама [13], имеющее вид

$$\bar f(\tau) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty K_{-i(t-\tau)}(a)f(t)\,dt \quad (a>0),$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty e^{\pi(t-\tau)}K_{-i(t-\tau)}(a)F(\tau)\,d\tau.$$

При удовлетворении условиям сопряжения (3) в обобщенном смысле на каждой линии раздела $\partial\Omega_n$ необходимо последовательно применить рекуррентные соотношения (10) с «передаточными» операторами (11) к областям $\Omega_n$ $(n=1,2,\ldots,N)$ и использовать результат теоремы 1. Указанные действия приводят к следующему соотношению ($\lambda_n = æ_{n+1}æ_n^{-1}$, $n=1,2,\ldots,N$):

$$\mathbf{V}_1(\tau_1) = \mathbf{C}^{-1}(\tau_1|\beta_1,\mu_1)\mathbf{C}(\tau_1|\alpha_2,\mu_1)\times$$
$$\times\{\mathbf{C}^{-1}(\tau_2|\alpha_2,\mu_2)\lambda_2^{-i\tau_2}\mathbf{C}(\tau_2|\alpha_2,\mu_3)\times$$
$$\times\{\mathbf{C}^{-1}(\tau_3|\beta_3,\mu_3)\lambda_3^{-i\tau_3}\mathbf{C}(\tau_3|\beta_3,\mu_2)\times$$
$$\times\{\ldots\{\mathbf{C}^{-1}(\tau_N|\alpha_N,\mu_N)\lambda_N^{-i\tau_N}$$
$$\mathbf{C}(\tau_N|\alpha_{N+1},\mu_N)\{\mathbf{V}_{N+1}\}\}\ldots\}. \quad (13)$$

В выписанном выше равенстве вектор $\mathbf{V}_1(\tau_1)$ в силу граничных условий (2) имеет лишь одну ненулевую компоненту, которую можно исключить и относительно компонент вектора $\mathbf{V}_{N+1}$ получить соотношения, левые и правые части которых будут содержать операторы вида (13). Этим соотношениям можно удовлетворить, выбирая неизвестное контактное напряжение в виде

$$\sigma_{z\varphi}|_S = q^{(1)}(\rho) + q^{(2)}(\rho), \quad a \leqslant \rho \leqslant b.$$

Представляя получающиеся при этом соотношения в матричной форме и последовательно обращая стоящие в них операторы (13), приходим к граничным интегральным уравнениям относительно неизвестных слагаемых $q^{(j)}(\rho)$

$$\mathbf{K}_j q^{(j)} = \int\limits_a^b k_j(r,\rho) q^{(j)}(\rho)\, d\rho = f(r), \tag{14}$$

$$a \leqslant r \leqslant b,$$

$$k_j(r,\rho) = m_j(r,\rho) - h_j(r,\rho), \quad j = 1,2,$$

$$m_j(r,\rho) = \\ = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_\Gamma K_{-i\tau}(ær)K_{-i\tau}(æ\rho)M_j(\tau)\tau \operatorname{sh}\pi\tau\, d\tau,$$

$$h_j(r,\rho) = \frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{R^2} K_{-i\tau}(ær)K_{-i\tau'}\times \\ \times (æ\rho)H_j(\tau,\tau')\tau\operatorname{sh}\pi\tau\, d\tau\, d\tau', \tag{15}$$

$$M_j(\tau,\tau') = \\ = [\mathbf{e}_j^T \mathbf{Q}(\tau|\pi-\alpha_{N+1},\mu_N)\mathbf{H}_j^{(N)}(\tau,\tau')\mathbf{e}_2]\times \\ \times [\mathbf{e}_j^T \mathbf{Q}(\tau|\pi-\alpha_{N+1},\mu_N)\mathbf{e}_1]^{-1},$$

$$M_j(\tau) = [\mathbf{e}_j^T \mathbf{Q}(\tau|\pi-\alpha_{N+1},\mu_N)\mathbf{e}_2]\times \\ \times [\mathbf{e}_j^T \mathbf{Q}(\tau|\pi-\alpha_{N+1},\mu_N)\mathbf{e}_1]^{-1},$$

$$\mathbf{e}_1^T = (1,0), \quad \mathbf{e}_2^T = (0,1).$$

В указанных выше соотношениях функции $M_j(\tau) = O(|z|^{-1})$, $H_j(\tau,\tau') = O(|\tau\tau'|^{-1})$ зависят от геометрических и упругих параметров наклонно-слоистой среды, действительны при $\tau,\tau' \in R^1$ , мероморфны в комплексных плоскостях $\tau,\tau'$ и имеют конечную плотность распределения нулей и полюсов. Функция $M_j(\tau)$ четна и, кроме того, $M(\tau) > 0$ при $\tau \in R^1$. Контур $\Gamma$ удовлетворяет условиям принципа излучения и расположен в полосе регулярности $\Pi \supset R^1$ функции $M_j(\tau)$. Матрица $\mathbf{H}^{(N)}(\tau,\tau')$ находится из рекуррентного соотношения

$$\mathbf{H}^{(n)}(\tau,\tau') = \frac{1}{\pi^2}\iint\limits_{R^2} \mathbf{P}_{n-1}^{-1}(\tau,t)\mathbf{H}^{(n-1)}(\tau,t)\times \\ \times \mathbf{P}_{n-1}(t,t')K_{-i(\tau-t)}(c_n)K_{-i(t-t')}(c_n)\times \\ \times \lambda_n^{-i(t'-\tau')}e^{-\pi(t-\tau)}d\tau d\tau', \tag{16}$$

$$\mathbf{H}^{(1)}(\tau,\tau') = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{R^1} K_{-i(\tau-\tau_1)}(c_1)\times \\ \times K_{-i(\tau_1-\tau')}(c_1)E(\tau_1-\tau)\mathbf{\Theta}(\tau_1)\, d\tau_1,$$

$$\mathbf{P}_{n-1}^{-1}(\tau,t) = \mathbf{Q}^{-1}(t|\pi-\alpha_n,\mu_{n-1})\times \\ \times \mathbf{E}(t-\tau)\mathbf{Q}(\tau|\beta_n,\mu_n),$$

$$c_n = æ_n\ell_n \quad (n = 1,2,\ldots,N),$$

$$\mathbf{\Theta}(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & \theta(\tau) \\ \theta^{-1}(\tau) & 0 \end{pmatrix},$$

$$\theta(\tau) = [\mathbf{e}_2^T\mathbf{Q}(\tau_1|\beta_1,\mu_1)\mathbf{e}_1]\times \\ \times [\mathbf{e}_1^T\mathbf{Q}(\tau|\beta_1,\mu_1)\mathbf{e}_1]^{-1}. \tag{17}$$

Матрица $\mathbf{Q}$ определена соотношениями (12), выражение $\theta(\tau)$ (17) соответствует граничным условиям в скобках (2).

Замечание 2. В случае $\ell_n = 0$ $(n = 1,2,\ldots,N)$ уравнение совпадает с аналогичным уравнением работы [5], а при $\mu(x,y) = \mu$, $d(x,y) = d$ с уравнением задачи для однородного клина [4].

**4**. Для исследования вопросов разрешимости уравнений (14) представим операторы левой части в виде разности линейных операторов $\mathbf{K}_j = \mathbf{M}_j - \mathbf{H}_j$ $(j = 1,2)$, порождаемых слагаемыми ядра, и изучим свойства каждого из операторов. Введем функциональные пространства:

1. Пространство $B_j(a,b)$ обобщенных решений интегрального уравнения с оператором $\mathbf{M}_j$

$$\|f\|^2_{B_j(a,b)} = \int\limits_{R^1} |F(z)|^2 M_j(z)\, dz,$$

$$F(z) = \sqrt{\tau\operatorname{sh}\pi\tau}\int\limits_{R^1} f(r)K_{-i\tau}(ær)\frac{dr}{r} \quad (æ > 0).$$

2. Пространство $S_\sigma(\Gamma)$, $\sigma > 0$ функций, регулярных в полосе регулярности функций $M_j(z)$, содержащей $R^1$ и контур $\Gamma$

$$\|X\|_{S_\sigma(\Gamma)} = \sup_{z\in\Gamma}|X(z)z^\sigma|,$$

$$\lim_{|z|\to\infty} |X(z)z^{\sigma}| = 0.$$

3. Пространство $c_{\gamma}(a,b)$, $0<\gamma<1$ функций, ограниченных с весом

$$\|f\|_{c_{\gamma}(a,b)} = \sup_{a<r<b} |f(r)(r-a)^{\gamma}(b-r)^{\gamma}|.$$

В пространствах Гёльдера $C^0_{\lambda}(a,b)$, $0<\lambda<1$ и Соболева-Слободецкого $W_2^{\gamma}(a,b)$, а также в пространствах суммируемых функций $L_p(a,b)$, $p>1$ нормы вводятся обычным образом.

Лемма 1. В пространстве $B_j(a,b)$ уравнение $\mathbf{M}_j q = g$ $(j=1,2)$ имеет единственное обобщенное решение при условии $f(r)\in W_2^{1/2}(a,b)$.

Результат леммы вытекает из положительной определенности операторов $\mathbf{M}_j$ и оценок работы [5].

Лемма 2. Пространство $B_j(a,b)$ совпадает с пространством $W_2^{-1/2}(a,b)$. Доказательство леммы сводится к доказательству сопряженности $[B_j(a,b)]^* = W_2^{1/2}(a,b)$ и основано на результатах [6].

Лемма 3. Операторы $\mathbf{M}_j$ ограничены как операторы, действующие в пространствах Соболева-Слободецкого $W_2^{\pm 1/2}(a,b)$

$$\mathbf{M}_j : W_2^{-1/2}(a,b) \to W_2^{1/2}(a,b).$$

Результат устанавливается на основе непосредственных оценок с использованием лемм 1, 2.

Теорема 2. Операторы $\mathbf{M}_j$ однозначно обратимы как операторы

$$\mathbf{M}_j : W_2^{-1/2}(a,b) \to W_2^{1/2}(a,b). \qquad (18)$$

Доказательство использует результаты лемм 1, 2, 3. При этом устанавливаются вложения для подпространства $D_j^0(a,b) \subseteq D_j(a,b)\cap W_2^{-1/2}(a,b)$, где $D_j(a,b)$ — область определения оператора $\mathbf{M}_j$, а $D_j^0(a,b) = \mathbf{M}_j^{-1}\{W_2^{-1/2}(a,b)\}$ — прообраз $W_2^{1/2}(a,b)$. Замкнутость $D_j^0(a,b)$ вытекает из замкнутости пространства обобщенных решений $B_j(a,b)$. Обратное вложение $D_j^0(a,b) \supseteq W_2^{-1/2}(a,b)$ устанавливается непосредственно и основано на описании области значений операторов $\mathbf{M}_j$, ограничено действующих из $W_2^{-1/2}(a,b)$ в $W_2^{1/2}(a,b)$. Ограниченность операторов $\mathbf{M}_j$ влечет ограниченность обратных в силу теоремы Банаха [14].

Теорема 3. Операторы $\mathbf{H}_j$ $(j=1,2)$ компактны как операторы, действующие из $W_2^{-1/2}(a,b)$ в $W_2^{1/2}(a,b)$. Для доказательства заметим, что $h_j(r,\rho)\in C^{(2)}(R^2)$. Тогда интегральные операторы $\mathbf{H}_j$ $(j=1,2)$ могут быть продолжены до непрерывных как операторы $\mathbf{H}_j : W_2^{-1}(a,b) \to W_2^{1}(a,b)$ [9] и, кроме того, компактны как операторы $\mathbf{H}_j : L_2(a,b)\to L_2(a,b)$. Требуемый результат вытекает из теорем 2,3 и теорем об интерполяции компактных операторов в банаховых пространствах [15].

Результаты теорем 1, 2 позволяют получить соотношения

$$\|q\|_{W_2^{-1/2}(a,b)} \leqslant A\,\|\mathbf{M}_j q\|_{W_2^{1/2}(a,b)}, \qquad (19)$$

которые являются соотношениями корректности для уравнений $\mathbf{M}_j q = g$ $(j=1,2)$. Из теорем 2, 3 вытекает квазифредгольмовость операторов $\mathbf{K}_j : W_2^{-1/2}(a,b)\to W_2^{1/2}(a,b)$, что позволяет сделать известные выводы о разрешимости исходных уравнений (14) и представить их в форме уравнения II рода с вполне непрерывным оператором

$$q^{(j)} = \mathbf{M}_j^{-1} f + \mathbf{M}_j^{-1}\circ \mathbf{H}_j q^{(j)} \quad (j=1,2). \quad (20)$$

Теорема 4. Уравнение (20) разрешимо в $W_2^{-1/2}(a,b)$ при выполнении условия $\|\mathbf{H}_j\| < \left\|\mathbf{M}_j^{-1}\right\|^{-1}$, где операторы $\mathbf{M}_j$, $\mathbf{H}_j$ $(j=1,2)$ действуют в пространствах $W_2^{\pm1/2}(a,b)$. Доказательство основано на использовании принципа Шаудера и соотношений (19). Разрешимость устанавливается в шаре с центром $q_0^{(j)} = \mathbf{M}_j^{-1} f$ пространства $W_2^{-1/2}(a,b)$.

**5.** Для построения метода решения уравнений (20) воспользуемся результатами исследований уравнения $\mathbf{M}_j q = f_j$ $(j=1,2)$, приведенными в работе [3], где установлена структура решения и единственность его представления. В несколько изменённой форме это решение имеет вид

$$q^{(j)}(\rho)\rho = \frac{1}{i\pi}\int\limits_{\Gamma_1} F_j(z) M_j^{-1}(z) I_{-iz}(æ\rho) z\,dz +$$
$$+\frac{1}{i\pi}\int\limits_{\Gamma_2}\left[X_1^{(j)}(z)\Phi_1(\rho,z) + X_2^{(j)}(z)\Phi_2(\rho,z)\right]\times$$
$$\times\frac{z^2 dz}{M_-^{(j)}(z)},$$

$$\begin{aligned}\Phi_1(\rho,z)&=I_{-iz}(æ\rho)K_{iz}(\kappa_1),\\ \Phi_2(\rho,z)&=K_{-iz}(æ\rho)I_{-iz}(\kappa_2),\end{aligned}\tag{21}$$

$$F_j(z)=\int\limits_a^b f_j(\rho)K_{-iz}(æ\rho)\frac{d\rho}{\rho},$$

$$M_j(z)=M_+^{(j)}(z)M_-^{(j)}(z),$$

$$X_{1,2}^{(j)}\in S_\sigma(\Gamma_2),\sigma>3/2,$$

$$\Gamma_2\succ R^1\succ\Gamma_1,\quad \kappa_m=æ_m\ell_m\quad (m=1,2).$$

В соотношениях (21) $M_\pm^{(j)}(z)$ — результат факторизации функции $M(z)$ относительно $\operatorname{Im}z=0$, при этом $q^{(j)}(\rho)\in c_\gamma(a,b)$, $\gamma=1/2$. Функции $X_{1,2}^{(j)}(z)$ регулярны в полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$ и определяются выражениями

$$X_1^{(j)}(z)=(\mathbf{F}_1^{(j)}f_j)(z),$$

$$X_2^{(j)}(z)=(\mathbf{V}_jX_1^{(j)})(z)+(\mathbf{F}_2^{(j)}f_j)(z),$$

$$(\mathbf{F}_m^{(j)}f_j)(z)=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_\Gamma\frac{M_-^{(j)}(z)}{z-\zeta}\,d\zeta\times$$
$$\times\int\limits_{\Gamma_1}\frac{F^{(j)}(t)A_{m1}(t,\zeta)}{(t^2-\zeta^2)M_j(t)}I_{-it}(\kappa_m)\Psi_m(t)t\,dt,\tag{22}$$

$$(\mathbf{V}^{(j)}X_1^{(j)})(z)=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_\Gamma\frac{M_-^{(j)}(z)}{z-\zeta}\,d\zeta\times$$
$$\times\int\limits_{\Gamma_1}\frac{X_1^{(j)}(t)A_{21}(t,\zeta)}{(t^2-\zeta^2)M_-^{(j)}(t)}\Psi_2(t)t\,dt.$$

$$\Psi_m(t)=I_{-it}(\kappa_m)K_{it}(\kappa_m),\quad m=1,2.$$

Функции $A_{ml}(t,\zeta)$ содержат вронскианы от модифицированных функций Бесселя и приведены в [4]. Непосредственной проверкой можно установить вложение $c_{1/2}(a,b)\subset W_2^{-\eta}(a,b)$, $0\leqslant\eta<1/2$. При этом оказывается $f_j(r)\in W_2^\lambda(a,b)$, $0\leqslant\lambda<1/2$.

Замечание 3. Последнее утверждение отражает известный факт: если установлено существование обобщенного решения краевой задачи в пространствах $W_2^{\pm1/2}(a,b)$ и найдено классическое, то класс разрешимости можно сузить на пространства $W_2^{-1/2}+\delta(a,b)$, а класс единственности расширить до $W_2^{1/2}-\delta(a,b)$ $(0<\delta\leqslant1/2)$. В рассматриваемом случае в класс функций $q(\rho)$ попадают функции из $c_{1/2}(a,b)$, а в класс правых частей $f(r)$ — функции, например, из пространства Гельдера $C_\lambda^0(a,b)$, $0\leqslant\lambda<1/2$ и др.

Будем отыскивать решение (20) в виде (21), выбирая $f_j=f+\mathbf{H}_jq^{(j)}$ $(j=1,2)$. В результате подстановки последнего выражения в (21) и ряда преобразований приходим к системе интегральных уравнений II рода относительно искомых функций $X_{1,2}^{(j)}(z)$

$$\mathbf{X}(z)=\mathbf{X}_0(z)+(\mathbf{BX})(z),\quad z\in\Gamma_2,\tag{23}$$

$$(\mathbf{BX})_j(z)=\frac{1}{\pi^2}\int\limits_\Gamma\frac{M_-^{(j)}(z)}{\zeta-z}\,d\zeta\times$$
$$\times\int\limits_{\Gamma_1'}\int\limits_{\Gamma_2}\frac{\mathbf{B}_H(\tau_1,\tau_2)[\mathbf{X}(\tau_2)]}{(\tau_1^2-\tau_2^2)M_-^{(j)}(\tau_2)}\,d\tau_1d\tau_2,$$

$$\mathbf{B}_H=\begin{pmatrix}\mathbf{B}_{11}^H & \mathbf{B}_{12}^H\\ \mathbf{B}_{21}^H & \mathbf{B}_{22}^H\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{X}(z)=\begin{pmatrix}X_1^{(j)}(z)\\ X_2^{(j)}(z)\end{pmatrix}.$$

Выражения операторов $\mathbf{B}_{mn}^H$ системы (23) определяются выражениями (21), (22).

Теорема 5. Оператор $\mathbf{B}$ вполне непрерывен как оператор, действующий в пространстве $S_\sigma(\Gamma_2)$, $\sigma>3/2$. Доказательство результата основано на использовании критерия компактности в пространстве $S_\sigma(\Gamma_2)$, $\sigma>3/2$.

Из теоремы 5 следует, что оператор $\mathbf{B}$ может быть приближен конечномерным, и разрешимость (22) вытекает из разрешимости некоторой конечной системы линейных алгебраических уравнений, определяющих допустимые соотношения между упругими и геометрическими параметрами задачи. Из оценки свободного члена $\mathbf{X}_0(z)=\|f\|_{W_2^\lambda(a,b)}O(z^{-2})$, $0\leqslant\lambda<1/2$ следует, что вопрос о разрешимости системы должен рассматриваться в $S_\sigma(\Gamma_2)$, $\sigma=2$, откуда, в частности, следует, что $q^{(j)}(\rho)\in c_{1/2}(a,b)$. Для получения приближенного решения задачи необходимо сдвинуть контуры интегрирования $\Gamma$, $\Gamma_2$ в верхнюю полуплоскость. Тогда в силу достаточно быстрого убывания подынтегральных функций в полуплоскости $\operatorname{Im}z>0$ придем в результате к системе ($N \gg 1$)

$$\mathbf{X}(z_s) = \mathbf{X}_0(z_s) + \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=1}^{N} \frac{a_{kn}\mathbf{X}(z_n)}{\zeta_k - z_s} + O\left(\frac{1}{N!}\right), \quad (24)$$
$$s = 1, 2, \ldots, N.$$

В выражениях (24) $z_n, \zeta_n$ — нули и полюса функции $M_-(z)$ соответственно. В силу аналитичности по æ в области $\mathrm{Re}\,æ \geqslant 0$, $æ \neq 0$ всех рассмотренных выше вполне непрерывных операторных функций можно утверждать, что решение, построенное для $æ > 0$, может быть аналитически продолжено в указанную выше область, в которую попадает и первоначальное значение $æ = -ik_N$.

Предложенный метод позволяет восстановить смещения поверхности среды, а также отыскивать решения при задании источников колебаний на любой из граней поверхностного рельефа.

*Автор выражает признательность академику РАН Бабешко В. А. и Ватульяну А. О. за внимание к работе и ценные замечания в процессе обсуждения результатов.*

## Литература

1. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
2. *Ватульян А. О., Гусева И. А.* О колебаниях ортотропной полосы с полостью// ПМТФ. 1993. №2. С. 123–127.
3. *Беркович В. Н.* О точном решении одного класса интегральных уравнений смешанных задач упругости и математической физики// ДАН СССР. 1982. Т. 267. №2. С. 327–330.
4. *Беркович В. Н.* К теории смешанных задач динамики клиновидных композитов// ДАН СССР. 1990. Т. 314. №3. С. 172–174.
5. *Беркович В. Н.* Об одном эффективном методе в смешанных задачах динамики градиентных сред// Ряды Фурье и их приложения: Тр. Междунар. симп. Воронеж, 2002. С. 94–98.
6. *Berkovich V. N.* On One Dynamic Mixed Boundary Value Problem for the Elastic Half-Space with Inclined Stratification// AMADE-2003: Rep. Int. conf. Belarus. Minsk. 2003. P. 34.
7. *Беркович В. Н.* Смешанная задача динамики наклонно-слоистой среды// Смешанные задачи МДТТ: Тез. докл. V Рос. конф. Саратов, 2005. С. 30–31.
8. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками// Тр. Моск. мат. об-ва. 1967. Т. 16. С. 209–292.
9. *Агранович М. С.* Спектральные свойства задач дифракции. В кн.: Войтович и др. Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции// М.: Наука, 1977. С. 289–390.
10. *Брычков Ю. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 286 с.
11. *Владимиров В. С.* Обобщенные функции в математической физике. М.: Наука, 1976. 280 с.
12. *Zemanian A. N.* The Kontorovich-Lebedev Transformations for Distributions of the Compact Support and Its Invertion// Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1975. V. 77. No. 1. P. 139–143.
13. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1966. Т. 2. 295 с.
14. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 519 с.
15. *Трибель Х.* Теории интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980. 664 с.

Статья поступила 12 декабря 2005 г.
Московский государственный университет технологий и управления, филиал в г. Ростове-на-Дону