УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СЛОИСТЫХ ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГИХ СРЕД С ДЕФЕКТАМИ[1]

О. Д. Пряхина[2], ***А. В. Смирнова***[3]

SOLUTION OF DYNAMIC PROBLEMS FOR LAYERED THERMAL ELECTRO-ELASTIC MEDIA WITH DEFECTS

Pryakhina O.D., Smirnova A.V.

An analytical method for the development of Green matrix-symbols for the layered thermal electro-elastic media with discontinuous boundary conditions on the layers boundary has been offered. The solution of dynamically bounded problem for multi-layered medium of 6 *mm* class of hexagonal syngony has been developed for the case of defects (cracks-cavities type) presence on the layers boundary.

В настоящей работе предложенный в [1] аналитический метод построения матриц-символов Грина для упругих слоистых сред с разрывными граничными условиями на стыке слоев распространяется на исследование задач термоэлектроупругости.

Актуальность этих исследований обусловлена созданием в последние десятилетия материалов, обладающих значительными пиро- и пьезоэлектрическими свойствами и их успешным применением в современных приборах, параметры которых необходимо рассчитывать с учетом взаимного влияния механических, электромагнитных и тепловых полей. Решение связанной задачи термоэлектроупругости получено для среды класса $6mm$ гексагональной сингонии, однако предложенный подход применим и к другим моделям сред, описываемых линейной теорией термоэлектроупругости [2, 3].

1. Колебания термоэлектроупругого слоя

Пусть термоэлектроупругий слой занимает область $|z| \leqslant h$, $-\infty < x, y < \infty$. На верхней и нижней границах слоя заданы механические нагрузки $\mathbf{t}e^{-i\omega t}, \mathbf{r}e^{-i\omega t}$, плотности распределения электрических зарядов на поверхности (нормальные составляющие вектора электрической индукции или электрического смещения) $d_1e^{-i\omega t}, d_2e^{-i\omega t}$, нормальные составляющие вектора теплового потока $g_1e^{-i\omega t}, g_2e^{-i\omega t}$ соответственно.

Не нарушая общности, в качестве термоэлектроупругого материала рассмотрим пьезокристаллы класса $6mm$ гексагональной сингонии или пьезокерамику, поляризованную в направлении оси z.

В этом случае уравнения движения термоэлектроупругой среды можно представить в форме (общий для всех характеристик множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опущен)

$$L_{ij}w_j = 0.$$

L_{ij} — дифференциальные операторы в частных производных, определяемые выражениями

$$L_{11} = c_{11}\partial_1^2 + \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})\partial_2^2 + c_{44}\partial_3^2 + \rho\omega^2,$$

$$L_{22} = \frac{1}{2}(c_{11} - c_{12})\partial_1^2 + c_{11}\partial_2^2 + c_{44}\partial_3^2 + \rho\omega^2,$$

$$L_{33} = c_{44}(\partial_1^2 + \partial_2^2) + c_{33}\partial_3^2 + \rho\omega^2,$$

$$L_{44} = -\varepsilon_{11}(\partial_1^2 + \partial_2^2) - \varepsilon_{33}\partial_3^2,$$

$$L_{55} = -i\omega\rho c_e - k_{11}(\partial_1^2 + \partial_2^2) - k_{33}\partial_3^2,$$

$$L_{12} = L_{21} = \frac{1}{2}(c_{11} + c_{12})\partial_1\partial_2,$$

$$L_{13} = L_{31} = (c_{13} + c_{44})\partial_1\partial_3,$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (03-01-00694, 03-01-96537, 03-01-96645, 03-01-96662, 03-01-96658), Минобразования России (Е-02-4.0-191) и ФЦП «Интеграция» (Б0121).

[2]Пряхина Ольга Донатовна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высоких технологий, прогноза и предупреждения чрезвычайных ситуаций факультета прикладной математики КубГУ. E-mail: donna@kubsu.ru

[3]Смирнова Алла Васильевна, канд. физ.-мат. наук, докторант кафедры математического моделирования КубГУ, доцент.

$$L_{14} = L_{41} = (e_{31} + e_{15})\partial_1\partial_3, \quad L_{15} = -\lambda_{11}\partial_1,$$

$$L_{23} = L_{32} = (c_{13} + c_{44})\partial_2\partial_3,$$

$$L_{24} = L_{42} = (e_{31} + e_{15})\partial_2\partial_3,$$

$$L_{25} = -\lambda_{11}\partial_2, \quad L_{52} = -i\omega T_0\lambda_{11}\partial_2,$$

$$L_{35} = -\lambda_{33}\partial_3, \quad L_{51} = -i\omega T_0\lambda_{11}\partial_1,$$

$$L_{34} = L_{43} = e_{15}(\partial_1^2 + \partial_2^2) + e_{33}\partial_3^2,$$

$$L_{53} = -i\omega T_0\lambda_{33}\partial_3,$$

$$L_{45} = p_3\partial_3, \quad L_{54} = i\omega T_0 p_3\partial_3.$$

Символы ∂_i $(i = 1,2,3)$ означают дифференцирование по x, y, z соответственно; ω — частота колебаний; расширенный вектор $\mathbf{w} = \{w_i\} = \{u, v, w, \psi, \theta\}$ имеет своими компонентами: горизонтальные (u, v) и вертикальные (w) перемещения точек среды, потенциал электрического поля ψ, температуру θ (прирост температуры от естественного состояния); c_{ij} — упругие модули; e_{ij} — пьезомодули; ε_{ij} — диэлектрические проницаемости; λ_{ij} — коэффициенты температурных напряжений; p_i — пирокоэффициенты; k_{ij} — коэффициенты теплопроводности; c_e — теплоемкость; ρ — плотность материала; T_0 — температура естественного состояния по шкале Кельвина.

Введём систему безразмерных параметров:

$$c_j = \frac{c_{1j}}{c_{33}} \quad (j = 1,2,3), \quad c_4 = \frac{c_{44}}{c_{33}},$$

$$\Omega^2 = \frac{\rho\omega^2 a^2}{c_{33}}, \quad V_0^2 = \frac{c_{33}}{\rho},$$

$$e_1 = \frac{e_{15}l}{c_{33}}, \quad e_2 = \frac{e_{31}l}{c_{33}}, \quad e_3 = \frac{e_{33}l}{c_{33}}, \quad p = \frac{p_3 ml}{c_{33}},$$

$$\varepsilon_i = \frac{\varepsilon_{ii}l^2}{c_{33}}, \quad \lambda_i = \frac{\lambda_{ii}m}{c_{33}},$$

$$k_i = \frac{k_{ii}\gamma}{\rho c_e V_0 a}, \quad \gamma = \frac{\rho c_e m^2}{T_0 c_{33}},$$

$$\tilde{u} = \frac{u}{a}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{a}, \quad \tilde{w} = \frac{w}{a},$$

$$\tilde{\psi} = \frac{\psi}{la}, \quad \tilde{\theta} = \frac{\theta}{m}, \quad \tilde{h} = \frac{h}{a}.$$

(Нормирующие множители $l = 10^{10}$ В/м и $m = 10^4$ К имеют размерность электрического поля E и температуры; a, м — характерный линейный размер, например, толщина слоя или полуширина электрода.)

Далее знак «$\sim$» над безразмерными величинами опускаем.

Система преобразуется к виду

$$\begin{gathered}
\partial_1 f_1 + \Delta u + \Omega^2 u = 0,\\
\partial_2 f_1 + \Delta v + \Omega^2 v = 0,\\
\partial_3 f_2 + \Delta^0(c_4 w + e_1\psi) + \Omega^2 w = 0,\\
\partial_3 f_3 + \Delta^0(e_1 w - \varepsilon_1\psi) = 0,\\
(\Delta^* + i\gamma\Omega)\theta + i\Omega f_4 = 0,
\end{gathered} \tag{1.1}$$

где

$$f_1 = \alpha_2 f + \partial_3(\alpha_3 w + e_0\psi) - \lambda_1\theta,$$

$$f_2 = \alpha_3 f + \partial_3(w + e_3\psi) - \lambda_3\theta,$$

$$f_3 = e_0 f + \partial_3(e_3 w - \varepsilon_3\psi) + p\theta,$$

$$f_4 = \lambda_1 f + \partial_3(w - p\psi), \quad f = \partial_1 u + \partial_2 v,$$

$$\alpha_{1,2} = (c_1 \mp c_2)/2, \quad \alpha_3 = c_3 + c_4, \quad e_0 = e_1 + e_2,$$

$$\Delta = \alpha_1\Delta^0 + c_4\partial_3^2, \quad \Delta^0 = \partial_1^2 + \partial_2^2,$$

$$\Delta^* = k_1\Delta^0 + k_3\partial_3^2.$$

Исходную задачу разобьем на две: симметричную и кососимметричную. Граничные условия симметричной задачи в безразмерных параметрах при $z = \pm h$ имеют вид

$$\begin{gathered}
c_4\partial_3 u + \partial_1(c_4 w + e_1\psi) =\\
= \pm(t_1 - r_1)/2,\\
c_4\partial_3 v + \partial_2(c_4 w + e_1\psi) = \pm(t_2 - r_2)/2,\\
c_3 f + \partial_3(w + e_3\psi) - \lambda_3\theta = (t_3 + r_3)/2,\\
e_2 f + \partial_3(e_3 w - \varepsilon_3\psi) + p\theta =\\
= (d_1 + d_2)/2,\\
\tilde{k}_3\partial_3\theta = \mp\frac{1}{2}(g_1 - g_2).
\end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{t} = \{t_1, t_2, t_3, d_1, g_1\}$; $\mathbf{r} = \{r_1, r_2, r_3, d_2, g_2\}$; $t_{1,2}$, $r_{1,2}$ — горизонтальные, t_3, r_3 — вертикальные компоненты векторов механической нагрузки (отнесенные к c_{33}); $d_{1,2}$ — нормальные составляющие вектора электрической индукции (отнесенные к $c_{33}l^{-1}$); $g_{1,2}$ — нормальные составляющие вектора теплового потока (отнесенные к $c_{33}m^{-1}$), действующие на верхнюю и нижнюю грани слоя соответственно.

Граничные условия кососимметричной задачи отличаются от (1.2) тем, что $\pm(t_{1,2} - r_{1,2})$ заменяется на $(t_{1,2} + r_{1,2})$, $(t_3 + r_3)$ — на $\pm(t_3 - r_3)$, $(d_1 + d_2)$ — на $\pm(d_1 - d_2)$, а $\mp(g_1 - g_2)$ — на $-(g_1 + g_2)$.

Решение (1.1) ищем в виде

$$u = \partial_1 \hat{f}_1 + \partial_2 \hat{f}_2, \quad v = \partial_2 \hat{f}_1 - \partial_1 \hat{f}_2, \quad w = w, \quad \psi = \psi, \quad \theta = \theta. \tag{1.3}$$

После подстановки (1.3) в (1.1) и применения преобразования Фурье по координатам x, y с параметрами α, β получим

$$\begin{gathered}
(-\lambda^2 c_1 + c_4 \partial_3^2 + \Omega^2)A - \\
-\lambda^2 \partial_3(\alpha_3 W + e_0 \Psi) + \lambda^2 \lambda_1 \Theta = 0, \\
\alpha_3 \partial_3 A + \partial_3^2 (W + e_3 \Psi) - \\
-\lambda^2 (c_4 W + e_1 \Psi) + \Omega^2 W - \lambda_3 \partial_3 \Theta = 0, \\
e_0 \partial_3 A + \partial_3^2 (e_3 W - \varepsilon_3 \Psi) - \\
-\lambda^2 (e_1 W - \varepsilon_1 \Psi) + p \partial_3 \Theta = 0, \\
i\Omega(\lambda_1 A + \lambda_3 \partial_3 W - p \partial_3 \Psi) + i\Omega\gamma\Theta + \\
+(k_3 \partial_3^2 - \lambda^2 k_1)\Theta = 0, \\
(-\lambda^2 \alpha_1 + c_4 \partial_3^2 + \Omega^2)B = 0, \\
\lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2, \\
A = -\lambda^2 \hat{f}_1, \quad B = -\lambda^2 \hat{f}_2.
\end{gathered} \tag{1.4}$$

Для получения характеристических чисел системы (1.4) решение отыскиваем в виде

$$A = a e^{\mu z}, \quad W = c e^{\mu z}, \quad B = b e^{\mu z}, \quad \Psi = d e^{\mu z}, \quad \Theta = r e^{\mu z}.$$

Из последнего уравнения находим

$$c_4 \mu^2 - \alpha_1 \lambda^2 + \Omega^2 = 0,$$

$$\mu = \pm \frac{\left(\alpha_1 \lambda^2 - \Omega^2\right)^{\frac{1}{2}}}{c_4} = \pm \sigma_5.$$

Характеристическим уравнением системы четырех оставшихся уравнений в (1.4) (условием существования нетривиального решения) является обращение в нуль детерминанта системы

$$D = i\Omega\lambda^2 D_0(\lambda, \Omega) = 0,$$

$$D_0 = \begin{vmatrix}
(c_4\mu^2 - \gamma_1^2)/\lambda^2 & -\mu\alpha_3 & -\mu e_0 & \lambda_1 \\
-\mu\alpha_3 & -\mu^2 + \gamma_2^2 & \lambda^2 e_1 - e_3\mu^2 & \mu\lambda_3 \\
-\mu e_0 & \lambda^2 e_1 - e_3\mu^2 & \lambda^2\varepsilon_1 - \varepsilon_3\mu^2 & -p\mu \\
\lambda_1 & \lambda_3\mu & -p\mu & (k_3\mu^2 - \gamma_3^2)/i\Omega
\end{vmatrix} = 0.$$

В результате получаем уравнение 8-й степени относительно μ, которое в общем случае имеет 8 различных корней:

$$m_1\mu^8 + m_2\mu^6 + m_3\mu^4 + m_4\mu^2 + m_5 = 0. \tag{1.5}$$

Коэффициенты этого уравнения определяются соотношениями

$$m_0 = \varepsilon_3 + e_3^2, \quad m_1 = -k_3 c_4 m_0,$$

$$\begin{aligned}
m_2 = i\Omega c_4 a_1 + k_3(\lambda^2 a_2 + c_4\varepsilon_3\gamma_2^2) + \\
+ (k_3\gamma_1^2 + c_4\gamma_3^2)m_0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_3 = \lambda^4 k_3 a_3 - \lambda^2(k_3 x_0 \gamma_2^2 + k_3 x_2 \gamma_1^2 + a_2\gamma_3^2) - \\
- m_0\gamma_1^2\gamma_3^2 - \varepsilon_3\gamma_2^2(c_4\gamma_3^2 + k_3\gamma_1^2) + \\
+ i\Omega(\lambda^2 a_4 - \gamma_1^2 a_1 - c_4 p\gamma_2^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_4 = i\Omega\lambda^4\lambda_1 a_6 - \lambda^4(\gamma_3^2 a_3 - k_3 e_1^2\gamma_1^2) + \\
+ i\Omega\lambda^2[\gamma_1^2\lambda_3(2pe_1 - \lambda_3\varepsilon_1) + \gamma_2^2\lambda_1(2e_0 p - \lambda_1\varepsilon_3)] + \\
+ i\Omega\gamma_1^2\gamma_2^2 p^2 + \lambda^2(\gamma_2^2\gamma_3^2 x_0 + \gamma_1^2\gamma_3^2 x_2 + \gamma_1^2\gamma_2^2\varepsilon_1 k_3) + \\
+ \gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_3^2\varepsilon_3,
\end{aligned}$$

$$m_5 = \lambda^2(i\Omega\lambda_1^2\lambda^2 - \gamma_1^2\gamma_3^2)(\varepsilon_1\gamma_2^2 + \lambda^2 e_1^2).$$

Принятые обозначения

$$\gamma_1^2 = c_1\lambda^2 - \Omega^2, \quad \gamma_2^2 = \lambda^2 c_4 - \Omega^2,$$
$$\gamma_3^2 = \lambda^2 k_1 - i\Omega\gamma, \quad x_0 = e_0^2 + c_4\varepsilon_1,$$
$$x_1 = \alpha_3 e_0 - c_4 e_1, \quad x_2 = \varepsilon_1 + 2e_1 e_3,$$
$$a_1 = 2p\lambda_3 e_3 - \lambda_3^2\varepsilon_3 + p^2,$$
$$a_2 = x_0 - 2e_3 x_1 - \alpha_3^2\varepsilon_3,$$
$$a_3 = 2e_0 e_1\alpha_3 - e_1^2 - c_4 + \alpha_3^2\varepsilon_1,$$
$$a_4 = \lambda_1^2 m_0 + \lambda_3^2 x_0 + 2x_1 p\lambda_3 + p^2\alpha_3^2 + 2\lambda_1 a_5,$$
$$a_5 = pe_3\alpha_3 - pe_0 - \alpha_3\varepsilon_3\lambda_3 - e_0 e_3\lambda_3,$$
$$a_6 = -2\alpha_3 pe_1 + 2\varepsilon_1\alpha_3\lambda_3 + 2e_0 e_1\lambda_3 - \lambda_1 x_2.$$

Корнями уравнения (1.5) являются $\mu_i = \pm\sigma_i$, $\operatorname{Re}\sigma_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Теперь решение симметричной задачи можно представить в виде

$$\begin{gathered} A = \sum_{i=1}^{4} \tilde{p}_i C_i \operatorname{ch}\sigma_i z, \\ W = \sum_{i=1}^{4} C_i \operatorname{sh}\sigma_i z, \\ \Theta = \sum_{i=1}^{4} \tilde{r}_i C_i \operatorname{ch}\sigma_i z, \\ \Psi = \sum_{i=1}^{4} \tilde{s}_i C_i \operatorname{sh}\sigma_i z, \\ B = b \operatorname{ch}\sigma_5 z, \end{gathered} \tag{1.6}$$

а кососимметричной задачи — в аналогичном виде при замене $\mathrm{sh} \leftrightarrow \mathrm{ch}$.

$$\tilde{s}_i = -\frac{\sigma_i}{\Delta}\left[\sigma_i^4 c_4 b_7 + \sigma_i^2(\lambda^2 b_3 - pc_4\gamma_2^2 - b_7\gamma_1^2) - \right.$$
$$\left. -\lambda^4\alpha_3\lambda_1 e_1 + \lambda^2(\gamma_1^2 e_1\lambda_3 + e_0\lambda_1\gamma_2^2) + p\gamma_1^2\gamma_2^2\right],$$

$$\tilde{p}_i = -\frac{\lambda^2}{\Delta}\left[\sigma_i^4 b_1 + \sigma_i^2(\lambda^2 b_4 - \gamma_2^2 b_8) - \right.$$
$$\left. -\lambda^2\lambda_1\varepsilon_1\gamma_2^2 - \lambda^4\lambda_1 e_1^2\right],$$

$$\tilde{r}_i = \frac{1}{\Delta}\left[-c_4\sigma_i^6 m_0 + \sigma_i^4(\lambda^2 a_2 + \gamma_1^2 m_0 + \right.$$
$$+ \varepsilon_3 c_4\gamma_2^2) + \lambda^2\gamma_1^2(\varepsilon_1\gamma_2^2 + \lambda^2 e_1^2) +$$
$$\left. + \sigma_i^2(\lambda^4 a_3 - \lambda^2 x_0\gamma_2^2 - \lambda^2 x_2\gamma_1^2 - \varepsilon_3\gamma_2^2\gamma_1^2)\right],$$

$$\Delta = \sigma_i^5 c_4 b_6 + \sigma_i^3(\lambda^2 b_2 - \gamma_1^2 b_6) +$$
$$+ \sigma_i\left[\lambda^4\lambda_1 b_5 + \lambda^2(e_1 p - \lambda_3\varepsilon_1)\gamma_1^2\right],$$

$$b_1 = -\alpha_3 b_6 + e_0 b_7 - \lambda_1 m_0,$$

$$b_2 = -\lambda_1(\alpha_3\varepsilon_3 + e_0 e_3) + x_0\lambda_3 + px_1,$$

$$b_3 = (\alpha_3 e_3 - e_0)\lambda_1 + \lambda_3 x_1 + p\alpha_3^2,$$

$$b_4 = \alpha_3 pe_1 + \lambda_1 x_2 - b_5\lambda_3,$$

$$b_5 = \varepsilon_1\alpha_3 + e_0 e_1, \quad b_6 = pe_3 - \varepsilon_3\lambda_3,$$

$$b_7 = p + e_3\lambda_3, \quad b_8 = -\lambda_1\varepsilon_3 + pe_0.$$

Граничные условия симметричной задачи преобразуются к виду

$$\begin{aligned} & z = \pm h: \\ & c_4\partial_3 A - \lambda^2(c_4 W + e_1\Psi) = \mp\lambda^2 Q_1^+/2, \\ & c_3 A + \partial_3(W + e_3\Psi) - \lambda_3\Theta = Q_3^+/2, \\ & e_2 A + \partial_3(e_3 W - \varepsilon_3\Psi) + p\Theta = Q_4^+/2, \\ & \tilde{k}_3\partial_3\Theta = \mp Q_5^+/2, \\ & c_4\partial_3 B = \mp\lambda^2 Q_2^+/2. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Для кососимметричной задачи величины $\mp Q_{1,2,5}^+$ заменяются на $-Q_{1,2,5}^-$, а $Q_{3,4}^+$ — на $\pm Q_{3,4}^-$ соответственно.

$$Q_1^\pm = i\lambda^{-2}[(T_1 \mp R_1)\alpha + (T_2 \mp R_2)\beta],$$

$$Q_2^\pm = i\lambda^{-2}[(T_1 \mp R_1)\beta - (T_2 \mp R_2)\alpha],$$

$$Q_3^\pm = T_3 \pm R_3, \quad Q_4^\pm = D_1 \pm D_2, \quad Q_5^\pm = G_1 \mp G_2.$$

Здесь $\mathbf{W} = \{U, V, W, \Psi, \Theta\}$, $\mathbf{T} = \{T_1, T_2, T_3, D_1, G_1\}$, $\mathbf{R} = \{R_1, R_2, R_3, D_2, G_2\}$ — трансформанты Фурье расширенных векторов $\mathbf{w}$, $\mathbf{t}$, $\mathbf{r}$ соответственно.

Из последнего граничного условия (1.7) находим b, в результате

$$B = -\lambda^2 ch\sigma_5 z (2c_4\sigma_5 sh\sigma_5 h)^{-1} Q_2^+.$$

Остальные граничные условия (1.7) дают систему для определения неизвестных коэффициентов C_i:

$$\mathbf{LC} = \mathbf{F},$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2}\{-\lambda^2 Q_1^+, Q_3^+, Q_4^+, -Q_5^+\}.$$

Элементами матрицы $\mathbf{L} = (L_{ij})$, $i, j = 1, 2, 3, 4$ являются $L_{ij} = l_{ij}\,\mathrm{sh}\,\sigma_i h$, $i = 1, 4$; $L_{ij} = l_{ij}\,\mathrm{ch}\,\sigma_i h$, $i = 2, 3$;

$$l_{1j} = -\lambda^2\,(c_4 + e_1\tilde{s}_j) + c_4\sigma_j\tilde{p}_j,$$

$$l_{2j} = \sigma_j\,(1 + e_3\tilde{s}_j) + c_3\tilde{p}_j - \lambda_3\tilde{r}_j,$$

$$l_{3j} = \sigma_j\,(e_3 - \varepsilon_3\tilde{s}_j) + e_2\tilde{p}_j + p\tilde{r}_j, \quad l_{4j} = \tilde{k}_3\sigma_j\tilde{r}_j.$$

Учитывая, что $\lambda^2 U = i\alpha A + i\beta B$, $\lambda^2 V = i\beta A - i\alpha B$, решение симметричной задачи (1.6) после определения C_i можно представить в виде

$$\mathbf{W}(z) = \mathbf{A}_h^+(z)\mathbf{Q}^+,$$

$$\mathbf{Q}^+ = \{Q_1^+, Q_2^+, Q_3^+, Q_4^+, Q_5^+\}.$$

Аналогичным образом строится решение кососимметричной задачи $\mathbf{W}(z) = \mathbf{A}_h^-(z)\mathbf{Q}^-$.

Матрицы $\mathbf{A}_h^\pm(z)$ имеют следующую структуру:

$$\mathbf{A}_h^\pm(z) = \begin{pmatrix} -i\alpha\lambda^2 M_1^\pm & -i\beta\lambda^2 N^\pm & i\alpha M_2^\pm & i\alpha M_3^\pm & i\alpha M_4^\pm \\ -i\beta\lambda^2 M_1^\pm & +i\alpha\lambda^2 N^\pm & i\beta M_2^\pm & i\beta M_3^\pm & i\beta M_4^\pm \\ -\lambda^2 K_1^\pm & 0 & K_2^\pm & K_3^\pm & K_4^\pm \\ -\lambda^2 R_1^\pm & 0 & R_2^\pm & R_3^\pm & R_4^\pm \\ -\lambda^2 S_1^\pm & 0 & S_2^\pm & S_3^\pm & S_4^\pm \end{pmatrix},$$

$$K_i^+ = \frac{1}{2\Delta^+}\sum_{j=1}^{4} m_{ij}s_j(z),$$

$$R_i^+ = \frac{1}{2\Delta^+}\sum_{j=1}^{4} \tilde{s}_j m_{i\,j} s_j(z),$$

$$S_i^+ = \frac{1}{2\Delta^+}\sum_{j=1}^{4} \tilde{r}_j m_{i\,j} c_j(z),$$

$$M_i^+ = \frac{1}{2\lambda^2\Delta^+}\sum_{j=1}^{4} \tilde{p}_j m_{ij} c_j(z),$$

$$N^+ = \mathrm{ch}\,\sigma_5 z\,(2\,c_4\sigma_5\lambda^2\,sh\sigma_5 h)^{-1},$$

$$\Delta^+ = \sum_{1}^{4} l_{1\,j} m_{1\,j} t_j.$$

Элементы Δ^-, K_i^-, R_i^-, S_i^-, M_i^-, N^- получаются заменой $\mathrm{sh} \leftrightarrow \mathrm{ch}$ в Δ^+, K_i^+, R_i^+, S_i^+, M_i^+, N^+ соответственно.

Принятые обозначения

$$s_j(z) = \frac{\mathrm{sh}\,\sigma_j z}{\mathrm{ch}\,\sigma_j h}, \quad c_j(z) = \frac{\mathrm{ch}\,\sigma_j z}{\mathrm{ch}\ \sigma_j h}, \quad t_j = \mathrm{th}\,\sigma_j h,$$

$$\begin{aligned}
&m_{11} = d_{32}l_{44}t_4 + d_{24}l_{43}t_3 + d_{43}l_{42}t_2,\\
&m_{12} = d_{13}l_{44}t_4 + d_{41}l_{43}t_3 + d_{34}l_{41}t_1,\\
&m_{13} = d_{21}l_{44}t_4 + d_{14}l_{42}t_3 + d_{42}l_{41}t_1,\\
&m_{14} = d_{12}l_{43}t_3 + d_{31}l_{42}t_2 + d_{23}l_{41}t_1,\\
&m_{21} = n_{24}l_{33} + n_{32}l_{34} + n_{43}l_{32},\\
&m_{22} = n_{41}l_{33} + n_{13}l_{34} + n_{34}l_{31},\\
&m_{23} = n_{14}l_{32} + n_{21}l_{34} + n_{42}l_{31},\\
&m_{24} = n_{31}l_{32} + n_{12}l_{33} + n_{23}l_{31},\\
&m_{31} = n_{42}l_{23} + n_{32}l_{24} + n_{34}l_{22},\\
&m_{32} = n_{14}l_{23} + n_{31}l_{24} + n_{43}l_{21},\\
&m_{33} = n_{41}l_{22} + n_{12}l_{24} + n_{24}l_{21},\\
&m_{34} = n_{13}l_{22} + n_{21}l_{23} + n_{32}l_{21},\\
&m_{41} = d_{43}l_{12}t_2 + d_{24}l_{13}t_3 + d_{32}l_{14}t_4,\\
&m_{42} = d_{34}l_{11}t_1 + d_{41}l_{13}t_3 + d_{31}l_{14}t_4,\\
&m_{43} = d_{42}l_{11}t_1 + d_{14}l_{12}t_2 + d_{21}l_{14}t_4,\\
&m_{44} = d_{23}l_{11}t_1 + d_{31}l_{12}t_2 + d_{12}l_{13}t_3,\\
&n_{ij} = (l_{1j}l_{4i} - l_{1i}l_{4j})t_i t_j,\\
&d_{ij} = l_{2j}l_{3i} - l_{2i}l_{3j}.
\end{aligned} \qquad (1.8)$$

Общим решением исходной задачи является

$$\mathbf{W}(z) = \mathbf{A}_h^+(z)\mathbf{Q}^+ + \mathbf{A}_h^-(z)\mathbf{Q}^-. \qquad (1.9)$$

Введем две матрицы специального вида

$$\mathbf{C}^\pm = \begin{pmatrix} \pm i\alpha\lambda^{-2} & \pm i\beta\lambda^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ \pm i\beta\lambda^{-2} & \mp i\alpha\lambda^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\mathbf{Q}^{\pm} = \mathbf{C}^{+}\mathbf{T} \pm \mathbf{C}^{-}\mathbf{R}$ и решение для термоэлектроупругого слоя (1.9) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}&\mathbf{W}(z) = \mathbf{B}_{+}(z)\mathbf{T} + \mathbf{B}_{-}(z)\mathbf{R},\\ &\mathbf{B}_{\pm}(z) = \left(\mathbf{A}_h^{+}(z) \pm \mathbf{A}_h^{-}(z)\right)\mathbf{C}^{\pm}.\end{aligned} \tag{1.10}$$

$$\mathbf{B}_{\pm}(z)=\begin{pmatrix} \alpha^2 m_1^{\pm}+\beta^2 n^{\pm} & \alpha\beta(m_1^{\pm}-n^{\pm}) & \pm i\alpha m_2^{\pm} & \pm i\alpha m_3^{\pm} & i\alpha m_4^{\pm}\\ \alpha\beta(m_1^{\pm}-n^{\pm}) & \beta^2 m_1^{\pm}+\alpha^2 n^{\pm} & \pm i\beta m_2^{\pm} & \pm i\beta m_3^{\pm} & i\beta m_4^{\pm}\\ -i\alpha k_1^{\pm} & -i\beta k_1^{\pm} & \pm k_2^{\pm} & \pm k_3^{\pm} & k_4^{\pm}\\ -i\alpha r_1^{\pm} & -i\beta r_1^{\pm} & \pm r_2^{\pm} & \pm r_3^{\pm} & r_4^{\pm}\\ -i\alpha s_1^{\pm} & -i\beta s_1^{\pm} & \pm s_2^{\pm} & \pm s_3^{\pm} & s_4^{\pm}\end{pmatrix}, \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned}&m_i^{\pm} = M_i^{-} \pm M_i^{+}, \quad n^{\pm} = N^{-} \pm N^{+},\\ &k_i^{\pm} = K_i^{-} \pm K_i^{+}, \quad i = 1,2,3,4;\\ &s_i^{\pm} = S_i^{-} \pm S_i^{+}, \quad r_i^{\pm} = R_i^{-} \pm R_i^{+}.\end{aligned} \tag{1.12}$$

2. Колебания термоэлектроупругого полупространства

Решение задачи для полупространства можно получить из решения (1.10)–(1.12), сделав замену переменных $z^* = z - h$ и перейдя к пределу при $h \to \infty$.

Поскольку при $h \to \infty$ $m_i^{-} = n^{-} = k_i^{-} = s_i^{-} = r_i^{-} = 0$, а $m_i^{+} = 2M_i^{+} = m_i^0$, $n^{+} = 2N^{+} = n^0$, $k_i^{+} = 2K_i^{+} = k_i^0$, $s_i^{+} = 2S_i^{+} = s_i^0, r_i^{+} = 2R_i^{+} = r_i^0$, то в результате получим

$$\begin{aligned}&\mathbf{B}_{-}^{\infty}(z^*) \equiv \mathbf{0},\\ &\mathbf{B}_{+}^{\infty}(z^*) = \lim_{h\to\infty}\mathbf{B}_{+}(z) = \lim_{h\to\infty}\mathbf{B}_{+}(z^*+h).\end{aligned}$$

Символ «$*$» можно далее опустить.

$$\mathbf{B}_{+}^{\infty}(z)=\begin{pmatrix} \alpha^2 m_1^{0}+\beta^2 n^{0} & \alpha\beta(m_1^{0}-n^{0}) & \pm i\alpha m_2^{0} & \pm i\alpha m_3^{0} & i\alpha m_4^{0}\\ \alpha\beta(m_1^{0}-n^{0}) & \beta^2 m_1^{0}+\alpha^2 n^{0} & \pm i\beta m_2^{0} & \pm i\beta m_3^{0} & i\beta m_4^{0}\\ -i\alpha k_1^{0} & -i\beta k_1^{0} & \pm k_2^{0} & \pm k_3^{0} & k_4^{0}\\ -i\alpha r_1^{0} & -i\beta r_1^{0} & \pm r_2^{0} & \pm r_3^{0} & r_4^{0}\\ -i\alpha s_1^{0} & -i\beta s_1^{0} & \pm s_2^{0} & \pm s_3^{0} & s_4^{0}\end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Элементы этой матрицы определяются функциями

$$\begin{aligned}&k_i^0 = \frac{1}{\Delta^0}\sum_{j=1}^{4} m_{ij}e^{\sigma_j z},\\ &r_i^0 = \frac{1}{\Delta^0}\sum_{j=1}^{4} \tilde{s}_j m_{ij}e^{\sigma_j z},\\ &s_i^0 = \frac{1}{\Delta^0}\sum_{j=1}^{4} \tilde{r}_j m_{ij}e^{\sigma_j z},\\ &m_i^0 = \frac{1}{\lambda^2\Delta^0}\sum_{j=1}^{4} \tilde{p}_j m_{ij}e^{\sigma_j z},\\ &n^0 = e^{\sigma_5 z}(c_4\sigma_5\lambda^2)^{-1},\\ &\Delta^0 = \sum_{1}^{4} l_{1j}m_{1j}.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Коэффициенты m_{ij} определяются формулами (1.8), в которых следует положить $t_j = 1$.

Смещения, электрический потенциал и температура (в преобразованиях Фурье), являющиеся компонентами расширенного вектора $\mathbf{W} = (U, V, W, \Psi, \Theta)$, в полупространстве описываются формулой

$$\mathbf{W}(z) = \mathbf{B}_{+}^{\infty}(z)\mathbf{T}_0 \quad (z \leqslant 0).$$

3. Колебания термоэлектроупругого пакета слоев

Рассмотрим динамическую задачу для подстилающего основания, представляющего собой пакет из N плоскопараллельных слоев толщиной $H = 2\sum_{k=1}^{N} h_k$ с жестко защемлённой нижней гранью и занимающего область $-H \leqslant z \leqslant 0$, $-\infty \leqslant x, y \leqslant +\infty$ (h_k — полутолщина k-го слоя).

Поверхность среды подвергается некоторому динамическому воздействию, характеризуемому расширенным вектором $\mathbf{t}_0(x,y)e^{-i\omega t}$, имеющим своими компонентами касательные t_{10}, t_{20} и нормальные t_{30} напряжения, нормальные составляющие электрической индукции d_{30} и теплового потока g_{30}.

Введем локальную систему координат для каждого слоя:

$$z_k = z + 2\sum_{i=1}^{k-1} h_i + h_k, \quad k = 1, 2, ...N.$$

Тогда решение для k-слоя в трансформантах Фурье будет определяться формулами (1.10)–(1.12):

$$\mathbf{W}_k(z_k) = \\ = \mu_k^{-1}\left[\mathbf{B}_+(z_k)\mathbf{T}_{k-1} + \mathbf{B}_-(z_k)\mathbf{T}_k\right], \\ -h_k \leqslant z_k \leqslant h_k, k = 1, 2, ..., N, \tag{3.1}$$

где $\mathbf{W}_k = F\mathbf{w}_k$; F — оператор двумерного преобразования Фурье по переменным x, y; $\mathbf{w}_k = \{w_{1k}, w_{2k}, w_{3k}, \psi_k, \theta_k\}$ — расширенные векторы, компонентами которого являются горизонтальные w_{1k} ,w_{2k} и вертикальные w_{3k} смещения точек k-го слоя, электрический потенциал ψ_k и температура θ_k; $\mathbf{T}_0 = F\mathbf{t}_0$; $\mathbf{T}_k = F\mathbf{t}_k$; $\mathbf{t}_k = \{t_{1k}, t_{2k}, t_{3k}, t_{4k}, t_{5k}\}$ — расширенные векторы, характеризующие взаимодействие между слоями; $\mu_k = c_{33}^k$.

Если на линиях раздела слоев имеют место разрывные граничные условия для перемещений, электрического потенциала и температуры, то условия стыковки слоев имеют вид

$$\mathbf{W}_k(-h_k) = \mathbf{W}_{k+1}(h_{k+1}) + \mathbf{f}_k, \\ k = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{3.2}$$

где $\mathbf{f}_k = \{f_{1k}, f_{2k}, f_{3k}, f_{4k}, f_{5k}\}$ — трансформанта Фурье расширенного вектора, имеющего своими компонентами скачки перемещений $\Delta w_{1k}(x,y)$, $\Delta w_{2k}(x,y)$, $\Delta w_{3k}(x,y)$, электрического потенциала $\Delta\psi_k(x,y)$, температуры $\Delta\theta_k(x,y)$.

Предположим, что нижняя грань пакета слоев жестко защемлена, металлизирована и теплоизолирована, тогда условие на нижней грани пакета

$$\mathbf{W}_N(-h_N) = 0. \tag{3.3}$$

Условия (3.2), (3.3) с учетом (3.1) приводят к рекуррентным соотношениям для определения расширенных векторов $\mathbf{T}_k$, характеризующих взаимодействие между слоями:

$$\mathbf{F}_k\mathbf{T}_k = \mathbf{G}_k\mathbf{T}_{k-1} + \mathbf{\Lambda}_k,\ k = 1, 2, ..., N;$$

$$\mathbf{\Lambda}_k = \mathbf{D}_{k+1}\mathbf{\Lambda}_{k+1} + \mu_k\mathbf{f}_k, \quad \mathbf{\Lambda}_N = 0.$$

Здесь

$$\mathbf{G}_k = -\mathbf{B}_+(-h_k), \quad \mathbf{D}_m = \mathrm{g}_{m-1}\mathbf{B}_-(h_m)\mathbf{F}_m^{-1},$$

$$\mathbf{F}_N = \mathbf{B}_-(-h_N),$$

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{B}_-(-h_k) - g_k\mathbf{B}_+(h_{k+1}) - \\ - \mathrm{g}_k\mathbf{B}_-(h_{k+1})\mathbf{F}_{k+1}^{-1}\mathbf{G}_{k+1},$$

$$\mathrm{g}_k = \mu_k\mu_{k+1}^{-1}, \quad k = 1, \ldots, N-1.$$

Используя последние соотношения и полагая последовательно $k = 1, 2, ..., N$, определим $\mathbf{T}_k$через $\mathbf{T}_0$ и $\mathbf{f}_k$:

$$\mathbf{T}_k = \mathbf{L}_{k1}\mathbf{G}_1\mathbf{T}_0 + \sum_{m=1}^{N-1}\mathbf{L}_{km}\mu_m\mathbf{f}_m, \tag{3.4}$$

где

$$\mathbf{L}_{km} = \begin{cases} \mathbf{M}_{k1}, & m = 1 \\ \mathbf{L}_{k(m-1)}\mathbf{D}_m + \mathbf{M}_{km}, & m \leqslant k \\ \mathbf{L}_{k(m-1)}\mathbf{D}_m, & m > k \end{cases},$$

$$\mathbf{M}_{km} = \prod_{i=k}^{m}\left(\mathbf{F}_i^{-1}\mathbf{G}_i\right)\mathbf{G}_m^{-1}.$$

Заметим, что $\mathbf{L}_{11} = \mathbf{M}_{11} = \mathbf{F}_1^{-1}$.

Подставляя найденные выражения для $\mathbf{T}_k$ (3.4) в (3.1), определим искомые динамические характеристики произвольного слоя

$$\mathbf{W}_1(z_1) = \mu_1^{-1}\Big\{(\mathbf{B}_+(z_1) + \\ + \mathbf{B}_-(z_1)\mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{G}_1)\mathbf{T}_0 + \mathbf{B}_-(z_1)\sum_{m=1}^{N-1}\mathbf{L}_{1m}\mu_m\mathbf{f}_m\Big\},$$

$$\mathbf{W}_k(z_k) = \mu_k^{-1}\sum_{m=1}^{N-1}(\mathbf{B}_+(z_k)\mathbf{L}_{(k-1)m} + \\ + \mathbf{B}_-(z_k)\mathbf{L}_{km})(\mu_m\mathbf{f}_m + \delta_{1m}\mathbf{G}_1\mathbf{T}_0), \tag{3.5}$$

$$k = 2, \ldots, N-1,$$

$$\mathbf{W}_N(z_N) = \mu_N^{-1}(\mathbf{B}_+(z_N) + \mathbf{B}_-(z_N)\mathbf{F}_N^{-1}\mathbf{G}_N) \times \\ \times \sum_{m=1}^{N-1}\mathbf{L}_{(N-1,m)}(\mu_m\mathbf{f}_m + \delta_{1m}\mathbf{G}_1\mathbf{T}_0).$$

Здесь $z_k = z + 2\sum_{i=1}^{k-1} h_i + h_k$, $\delta_{1m} = \begin{cases} 1, m=1 \\ 0, m \neq 1 \end{cases}$ — символ Кронекера. Остальные обозначения совпадают с приведенными в п. 1.

При идеальном контакте между слоями (отсутствие дефектов на стыке слоев $\mathbf{f}_k = 0$) решение (3.4), (3.5) полностью совпадает с полученным в [4].

4. Колебания слоистого термоэлектроупругого полупространства

Решение задачи о многослойной среде, жестко сцепленной с упругим полупространством, легко получить из решения для пакета N слоев, устремив толщину нижнего слоя ($k = N$) к бесконечности, заменив при этом систему координат: $z^* = z_N - h_N$. Произведя предельный переход при $h_N \to \infty$, определим

$$\mathbf{F}_{N-1} = \mathbf{B}_-(-h_{N-1}) - \mathrm{g}_{N-1}\mathbf{B}_+^{\infty}(0),$$

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{B}_-(-h_k) - \mathrm{g}_k\mathbf{B}_+(h_{k+1}) - \\ - \mathrm{g}_k\mathbf{B}_-(h_{k+1})\mathbf{F}_{k+1}^{-1}\mathbf{G}_{k+1}, \\ k = 1, 2, \ldots, N-2.$$

Расширенные векторы $\mathbf{T}_k$, действующие на стыке слоев, получим в виде (3.4), где $k = 1, 2, \ldots, N-1$, а $\mathbf{T}_N = 0$. Для расчета расширенных векторов $\mathbf{W}_k$ среды имеем

$$\mathbf{W}_1(z_1) = \mu_1^{-1}\Big\{\Big(\mathbf{B}_+(z_1) + \\ + \mathbf{B}_-(z_1)\mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{G}_1\Big)\mathbf{T}_0 + \mathbf{B}_-(z_1)\sum_{m=1}^{N-1}\mathbf{L}_{1m}\mu_m\mathbf{f}_m\Big\},$$

$$\mathbf{W}_k(z_k) = \mu_k^{-1}\sum_{m=1}^{N-1}\left(\mathbf{B}_+(z_k)\mathbf{L}_{(k-1)m} + \right. \\ \left. + \mathbf{B}_-(z_k)\mathbf{L}_{km}\right)\left(\mu_m\mathbf{f}_m + \delta_{1m}\mathbf{G}_1\mathbf{T}_0\right), \quad (4.1) \\ k = 2, \ldots, N-1,$$

$$\mathbf{W}_N(z^*) = \mu_N^{-1}\mathbf{B}_+^{\infty}(z^*)\times \\ \times\sum_{m=1}^{N-1}\mathbf{L}_{(N-1),m}(\mu_m\mathbf{f}_m + \delta_{1m}\mathbf{G}_1\mathbf{T}_0),$$

$$z_k = z + 2\sum_{i=1}^{k-1} h_i + h_k, \quad k = 1, 2, ..., N-1,$$

$$z^* = z + 2\sum_{i=1}^{N-1} h_i, \quad k = N.$$

Элементы матрицы $\mathbf{B}_+^{\infty}(z^*)$ определяются формулами (2.1), (2.2).

Применив обратное преобразование Фурье к (3.5) или (3.1), получим интегральное представление решения соответствующей задачи (множитель $e^{-i\omega t}$ опущен):

$$\mathbf{w}(x, y, z, \omega) \equiv \\ \equiv \frac{1}{4\pi^2}\iint_{\delta_1\delta_2}\mathbf{W}(z)e^{-i(\alpha x + \beta y)}\,d\alpha\,d\beta, \quad (4.2)$$

$$\mathbf{W}(z) \equiv \mathbf{W}(\alpha, \beta, z_k, \omega),$$

$$z = z_k - 2\sum_{i=1}^{k-1} h_i - h_k, \quad k = 1, 2, \ldots N.$$

Правила выбора контуров интегрирования δ_1, δ_2 приведены в [5].

5. Переход к смешанной задаче

Если на поверхности среды и на линиях раздела слоёв заданы смешанные граничные условия, то выписанные функционально-матричные соотношения (3.4), (3.5) приводят к системе N матричных интегральных уравнений относительно неизвестных расширенных векторов $\mathbf{t}_0(x, y)$ в области Ω_0 и $\Delta\mathbf{w}_m = \mathbf{w}_m^+ - \mathbf{w}_m^-$ на берегах $N-1$ этажно расположенных трещин-полостей, занимающих плоские области Ω_m на линиях раздела слоев:

$$\iint_{\Omega_0}\mathbf{k}_{11}(x-\xi, y-\eta)\mathbf{t}_0(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta + \\ + \sum_{m=1}^{N-1}\iint_{\Omega_m}\mathbf{k}_{1,m+1}(x-\xi, y-\eta)\Delta\mathbf{w}_m(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta = \\ = \mu_1\mathbf{w}(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_0, \quad z = 0, \quad (5.1)$$

$$\iint\limits_{\Omega_0} \mathbf{k}_{k+1,1}(x-\xi, y-\eta)\mathbf{t}_0(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta +$$
$$+\sum_{m=1}^{N-1} \iint\limits_{\Omega_m} \mathbf{k}_{k+1,m+1}(x-\xi, y-\eta)\Delta\mathbf{w}_m(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta =$$
$$= \mathbf{t}_k(x,y), \quad (x,y)\in\Omega_k, \quad (5.2)$$

$$z = -2\sum_{s=1}^{k} h_s, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Здесь $\mathbf{t}_m = \mathbf{t}_m^+ = \mathbf{t}_m^-$ (предполагается, что берега трещин не взаимодействуют и напряжения, нормальные составляющие вектора электрической индукции и теплового потока на этих берегах равны, т.е. имеют место статические механические, электрические и тепловые воздействия, «распирающие» берега трещины); расширенные векторы $\mathbf{t}_m$, $\mathbf{w}$ считаются заданными.

$$\mathbf{k}_{ij}(x,y) = $$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{\delta_1\delta_2} \mathbf{K}_{ij}(\alpha,\beta)e^{-i\alpha x - i\beta y}\, d\alpha\, d\beta. \quad (5.3)$$

Матрицы-символы Грина имеют вид

$$\mathbf{K}_{11} = \mathbf{B}_+(h_1) + \mathbf{B}_-(h_1)\mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{G}_1,$$

$$\mathbf{K}_{1,m+1} = \mathbf{B}_-(h_1)\mathbf{L}_{1m}\mu_m,$$

$$\mathbf{K}_{k+1,1} = \mathbf{L}_{k1}\mathbf{G}_1, \quad \mathbf{K}_{k+1,m+1} = \mathbf{L}_{km}\mu_m.$$

Используя (3.4), (3.5), выпишем для наглядности матрично-функциональные уравнения для пакета из двух слоев, содержащих трещину на стыке:

$$\begin{gathered} \mu_1\mathbf{W}_1(h_1) = \mathbf{K}_{11}\mathbf{T}_0 + \mathbf{K}_{12}\mathbf{f}_1, \\ z = 0, \\ \mathbf{T}_1 = \mathbf{K}_{21}\mathbf{T}_0 + \mathbf{K}_{22}\mathbf{f}_1, \\ z = -2h_1. \end{gathered} \quad (5.4)$$

Здесь

$$\begin{gathered} \mathbf{K}_{11} = \mathbf{B}_+(h_1) - \mathbf{B}_-(h_1)\mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{B}_+(-h_1), \\ \mathbf{K}_{12} = \mathbf{B}_-(h_1)\mathbf{F}_1^{-1}\mu_1, \\ \mathbf{K}_{21} = -\mathbf{F}_1^{-1}\mathbf{B}_+(-h_1), \quad \mathbf{K}_{22} = \mathbf{F}_1^{-1}\mu_1. \end{gathered} \quad (5.5)$$

В этом случае

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{B}_-(-h_1) - \mathrm{g}_1\mathbf{B}_+(h_2) +$$
$$+ \mathrm{g}_1\mathbf{B}_-(h_2)\mathbf{B}_-^{-1}(-h_2)\mathbf{B}_+(-h_2).$$

$\mathbf{f}_1$, $\mathbf{T}_0$, $\mathbf{T}_1$, $\mathbf{W}_1$ — преобразования Фурье с параметрами α, β от расширенных вектор-функций $\Delta\mathbf{w}$, $\mathbf{t}_0$, $\mathbf{t}_1$, $\mathbf{w}_1$ соответственно по переменным x, y.

В случае системы M трещин, занимающих плоские области на линии раздела слоев $z = -2h_1$, система интегральных уравнений на основании (5.4) имеет вид

$$\iint\limits_{\Omega_0} \mathbf{k}_{11}(x-\xi, y-\eta)\mathbf{t}_0(\xi,\eta)d\xi\, d\eta +$$
$$+\sum_{k=1}^{M} \iint\limits_{\Omega_{1k}} \mathbf{k}_{12}(x-\xi, y-\eta)\Delta\mathbf{w}_k(\xi,\eta)d\xi\, d\eta =$$
$$= \mu_1\mathbf{w}_1(x,y), \quad (5.6)$$

$$(x,y)\in\Omega_0, \quad z = 0,$$

$$\iint\limits_{\Omega_0} \mathbf{k}_{21}(x-\xi, y-\eta)\mathbf{t}_0(\xi,\eta)d\xi\, d\eta +$$
$$+\sum_{k=1}^{M} \iint\limits_{\Omega_{1k}} \mathbf{k}_{22}(x-\xi, y-\eta)\Delta\mathbf{w}_k(\xi,\eta)d\xi\, d\eta =$$
$$= \mathbf{t}_{1m}(x,y), (x,y)\in\Omega_{1m}, \quad (5.7)$$

$$z = -2h_1, m = 1, 2, \ldots, M.$$

Здесь Ω_0 — область контакта штампа с поверхностью среды; Ω_{1m} — области, занимаемые трещинами $m = 1,\ldots,M$ в плоскости $z = -2h_1$.

В интегральных уравнениях (5.6), (5.7) неизвестными являются компоненты расширенного вектора $\mathbf{t}_0$ в области контакта штампа со средой и компоненты расширенных векторов скачков $\Delta\mathbf{w}_m = \mathbf{w}_m^+ - \mathbf{w}_m^- = \mathbf{w}_{1m}(x,y,-h_1)-$

$-\mathbf{w}_{2m}(x,y,h_2)$ на берегах трещин, а компоненты расширенных векторов $\mathbf{w}_1$ под штампом и $\mathbf{t}_{1m} = \mathbf{t}_m^+ = \mathbf{t}_m^-$ на берегах трещин предполагаются заданными.

Ядра СИУ определяются выражениями (5.3), а матрицы-функции $\mathbf{K}_{ij}(\alpha,\beta)$ — формулами (5.5).

6. Слой, полупространство при наличии системы трещин

Решение задачи для термоэлектроупругой полуограниченной среды (слоя или полупространства), содержащей $N-1$ плоских, параллельно-ориентированных трещин-полостей описывается функционально-матричными соотношениями (3.4) и (3.5) или (4.1), в которых следует полагать физико-механические параметры слоев равными для всех k $(k=1,2,\dots,N)$.

Например, при $N=2$, полагая параметры слоёв равными, получим из (3.4), при отсутствии внешних воздействий $\mathbf{T}_0=0$, решение гармонической пространственной задачи для одной трещины-полости, расположенной в однородном слое толщины $H=4h$ на одинаковом расстоянии $2h$ от его границ:

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{F}_1^{-1}\mu\Delta\mathbf{W}, \tag{6.1}$$

где

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{B}_-(-h) - \mathbf{B}_+(h) + \mathbf{B}_-(h)\mathbf{B}_-^{-1}(h)\mathbf{B}_+(-h),$$
$$\Delta\mathbf{W} = \mathbf{W}^+ - \mathbf{W}^-,$$
$$\mathbf{W}^+ = \mathbf{W}_{\mathbf{1}}(-h_1) = \mathbf{W}_1(-h),$$
$$\mathbf{W}^- = \mathbf{W}_{\mathbf{2}}(h_2) = \mathbf{W}_2(h).$$

Функционально-матричное соотношение (6.1) позволяет выписать систему интегральных уравнений относительно расширенного вектора $\Delta\mathbf{w}(x,y)$ скачков перемещений, электрического потенциала и температуры на берегах трещины-полости:

$$\iint\limits_S \mathbf{k}(x-\xi,y-\eta)\Delta\mathbf{w}(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta = \mathbf{t}_1, \qquad (x,y)\in S, \tag{6.2}$$

$$\mathbf{k}(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{\delta_1\delta_2} \mathbf{K}(\alpha,\beta)e^{-i(\alpha x+\beta y)}d\alpha\,d\beta,$$

$$\mathbf{K}(\alpha,\beta) = \mathbf{F}^{-1}(\alpha,\beta,\Omega)\mu,$$

Здесь S — область, занимаемая трещиной.

Дальнейшее решение систем интегральных уравнений (5.1), (5.2), (5.6), (5.7), (6.2) предполагает использование метода фиктивного поглощения, метода факторизации или численных методов [1–6].

Аналогично строится решение для слоистой термоэлектроупругой среды, содержащей систему включений [1].

Литература

1. *Бабешко В. А., Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Решение динамических задач для многослойных сред с разрывными граничными условиями // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. 2002. Юбилейный выпуск. С. 80–82.
2. *Партон В. З., Кудрявцев Б. А.* Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 471 с.
3. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 160 с.
4. *Ворович И. И., Бабешко В. А., Пряхина О. Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
5. *Бабешко В. А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984, 256 с.
6. *Сеймов В. М., Трофимчук А. Н., Савицкий О. А.* Колебания и волны в слоистых средах. Киев: Наук. думка, 1990. 224 с.

Статья поступила 11 февраля 2003 г.
Кубанский государственный университет