УДК 539.3

К ПРОБЛЕМЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ С ЗАДАННЫМИ СВОЙСТВАМИ[1]

***Калинчук В. В.*[2], *Белянкова Т. И.*[3], *Богомолов А. С.*[4]**

TO THE PROBLEM OF MODELING INHOMOGENEOUS MATERIALS WITH DESIRED PROPERTIES

Kalinchuk V. V., Belyankova T. I., Bogomolov A. S.

The effective method of studding dynamic properties of inhomogeneous materials with smoothly changing properties is developed. Dispersive properties, the structure of a surface wave field and dynamic rigidity of materials with rigid or soft inclusions are investigated.

Современная технология создания новых материалов обуславливает необходимость заранее представлять, какую структуру должен иметь создаваемый материал, чтобы обладать нужными свойствами. Решение проблемы опирается на эффективное моделирование неоднородных материалов, которое, в свою очередь, базируется на разработке действенных методов численного восстановления функции Грина неоднородной среды с произвольно изменяющимися по толщине характеристиками. Исследования показывают, что за счет изменения свойств среды можно управлять как структурой поверхностного волнового поля, локализовывая или подавляя его в приповерхностной зоне, так и динамической жесткостью среды, добиваясь появления и усиления резонансных эффектов или их подавления.

Введение

Проблема динамического поведения и контактного взаимодействия полуограниченных тел с плавно изменяющимися по глубине свойствами неоднократно рассматривалась в литературе [1–7]. В [1] при исследовании контактной задачи для неоднородного по глубине слоя впервые была предложена и реализована двухточечная схема численного построения функции Грина среды. Впоследствии этот подход в различных модификациях был использован в [2–7] при исследовании неоднородных полуограниченных сред различных типов. В основе подхода лежит сведение краевой задачи к системе задач Коши относительно компонент вектора перемещений и их производных, что накладывает некоторые ограничения на класс функций, описывающих свойства рассматриваемых сред. В частности, традиционно рассматривались среды, упругие модули которых монотонным образом изменялись по глубине, либо увеличиваясь («нормальный» тип неоднородной среды), либо уменьшаясь («аномальный» тип).

В [8] был предложен несколько иной подход, основанный на использовании компонент тензора механических напряжений, представляющих собой естественные комбинации производных компонент вектора перемещений. Это позволило существенно расширить класс функций, определяющих закон изменения механических параметров неоднородной среды и рассматривать сильноградиентные среды. В качестве последних в настоящей работе рассматриваются неоднородные среды с «жестким» или «мягким» включением.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (04-01-04001ННИО, 05-08-65499, 06-01-00726), гранта Президента РФ (НШ-4839.2006.1).

[2]Калинчук Валерий Владимирович, д-р физ.-мат. наук, заведующий лабораторией Южного научного центра РАН.

[3]Белянкова Татьяна Ивановна, канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник НИИ механики и прикладной математики Ростовского государственного университета.

[4]Богомолов Александр Сергеевич, аспирант НИИ механики и прикладной математики Ростовского государственного университета

1. Краевая задача о колебаниях неоднородной полуограниченной среды

Рассматривается задача об установившихся гармонических колебаниях неоднородной среды под действием распределенной в области Ω на ее поверхности нагрузки $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3\}e^{-i\omega t}$. Среда представляет собой слой $|x_1|$, $|x_2| \leqslant \infty$, $0 \leqslant x_3 \leqslant h$, жестко сцепленный с однородным полупространством, занимающим область $|x_1|$, $|x_2| \leqslant \infty$, $x_3 \leqslant 0$. Константы $\lambda^{(2)}$, $\mu^{(2)}$ и $\rho^{(2)}$ — соответственно параметры Ламе и плотность полупространства. Упругие характеристики $\lambda^{(1)}(x_3)$, $\mu^{(1)}(x_3)$ и плотность $\rho^{(1)}(x_3)$ слоя предполагаются произвольными, достаточно гладкими функциями координаты x_3. Учитывая установившийся характер движения среды, все параметры задачи представляются в виде

$$f(x_1, x_2, x_3, t) = f(x_1, x_2, x_3)e^{-i\omega t}.$$

Далее временной множитель опускается.

Краевая задача о колебаниях неоднородной среды описывается уравнениями движения

$$\nabla \cdot \mathbf{\Theta}^{(n)} = -\rho^{(n)}\omega^2\mathbf{u}^{(n)} \tag{1.1}$$

с граничными условиями на поверхности и на границе раздела сред

$$\begin{aligned} &x_3 = h: \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{\Theta}^{(1)} = \mathbf{q}, \quad x_1, x_2 \in \Omega,\\ &\quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{\Theta}^{(1)} = 0, \quad x_1, x_2 \notin \Omega,\\ &x_3 = 0: \quad \mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)},\\ &\quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{\Theta}^{(1)} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{\Theta}^{(2)}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Замыкают задачу условия излучения на бесконечности. Здесь $\mathbf{u}^{(k)} = \{u_1^{(k)}, u_2^{(k)}, u_3^{(k)}\}$ — вектор перемещений произвольной точки, $\mathbf{\Theta}^{(k)}$ — тензор напряжений слоя ($k = 1$) или полупространства ($k = 2$), $\mathbf{n}$ — вектор нормали.

Компоненты тензоров $\mathbf{\Theta}^{(k)}$ в выражениях (1.1) и (1.2) представляются

$$\theta_{pl}^{(k)} = \chi_{plms}^{(k)} u_{s,m}^{(k)},$$

где $\chi_{pmls}^{(n)}$ — упругие константы, определяющие закон состояния слоя или полупространства. В случае изотропной среды они имеют вид

$$\chi_{pmls}^{(1)} = (\delta_{pl}\delta_{ms}+\delta_{ml}\delta_{ps})\mu^{(1)}(x_3)+\delta_{pm}\delta_{ls}\lambda^{(1)}(x_3),$$

$$\chi_{kmls}^{(2)} = (\delta_{kl}\delta_{ms} + \delta_{ml}\delta_{ks})\mu^{(2)} + \delta_{km}\delta_{ls}\lambda^{(2)}.$$

Далее используются безразмерные параметры, для перехода к которым упругие параметры задачи отнесены к модулю сдвига полупространства $\mu^{(2)}$, линейные параметры — к толщине слоя h. В качестве безразмерной частоты используется параметр $\kappa_2 = \omega h V_S^{(2)^{-1}}$, где $V_S^{(2)} = \sqrt{\mu^{(2)}\rho^{(2)^{-1}}}$ — скорость сдвиговой волны в полупространстве.

Особенность краевой задачи (1.1), (1.2) состоит в том, что коэффициенты в уравнении движения (1.1) являются функциями x_3.

2. Система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений

Применив к уравнению (1.1) двумерное преобразование Фурье по x_1 и x_2 (α_1, α_2 — параметры преобразования), представим его в виде

$$\mathbf{Y}^{(p)\prime} = \mathbf{M}^{(p)}(\alpha_1, \alpha_2, x_3)\mathbf{Y}^{(p)}, \tag{2.1}$$

где

$$\begin{gathered} \mathbf{Y}^{(p)} =\uparrow \{Y_k\}_{k=1}^6,\\ Y_k = -i\alpha_k U_k^{(p)}, \quad Y_{k+3} = -i\alpha_k\Theta_{k3}^{(p)}, \quad k = 1, 2,\\ Y_3 = U_3^{(p)}, \quad Y_6 = \Theta_{33}^{(p)}. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Здесь $U_k^{(p)}$ и $\Theta_{kl}^{(p)}$ — трансформанты Фурье компонент вектора перемещений и тензора напряжений.

Участвующие в уравнениях (2.1) матрицы представляются выражением

$$\mathbf{M}^{(p)} = \left\| m_{lk}^{(p)} \right\|_{l,k=1}^6, \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} m_{l3}^{(p)} = \alpha_l^2, \quad l = 1, 2,\\ m_{14}^{(p)} = -\mu^{(p)^{-1}}, \quad m_{31}^{(p)} = -\lambda^{(p)} l_m^{(p)},\\ m_{36}^{(p)} = l_m^{(p)}, \quad m_{42}^{(p)} = \alpha_1^2(a_{12}^{(p)} + \mu^{(p)}),\\ m_{41}^{(p)} = \alpha_1^2 a_{11}^{(p)} + \alpha_2^2\mu^{(p)} - \kappa_2^2, \quad m_{46}^{(p)} = -\alpha_1^2 m_{31}^{(p)},\\ m_{51}^{(p)} = \alpha_2^2(a_{12}^{(p)} + \mu^{(p)}), \quad l_m^{(p)} = (\lambda^{(n)} + 2\mu^{(n)})^{-1},\\ m_{52}^{(p)} = \alpha_1^2\mu^{(p)} + \alpha_2^2 a_{11}^{(p)} - \kappa_2^2, \quad m_{56}^{(p)} = -\alpha_2^2 m_{31}^{(p)},\\ m_{16}^{(p)} = \kappa_2^2, \quad m_{l6}^{(p)} = -1, \quad l = 4, 5. \end{gathered}$$

Остальные элементы матриц $\mathbf{M}^{(p)}$ равны нулю,

$$a_{11}^{(p)} = 4\mu^{(p)}(\lambda^{(p)} + \mu^{(p)})l_m^{(p)}$$

$$a_{11}^{(p)} = 4\mu^{(p)}(\lambda^{(p)}+\mu^{(p)})l_m^{(p)}, \quad a_{12}^{(p)} = 2\lambda^{(p)}\mu^{(p)}l_m^{(p)}.$$

Вектор $\mathbf{Y}^{(n)} =\uparrow \{Y_k\}_{k=1}^6$ (2.2), в отличие от использованного в работах [2–7] подхода,

формируется из компонент вектора перемещений и напряжений, что дает возможность в матрице $\mathbf{M}^{(p)}$ (2.3) обойтись без производных. Последнее обстоятельство позволяет существенно расширить класс функций, описывающих закон изменения механических параметров среды, в частности, использовать кусочно-непрерывные функции, и, тем самым, рассматривать слоистые среды [9].

3. Решение системы задач Коши

Уравнение (2.1) представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений. Шесть ее линейно независимых решений при $p = 1$ строятся на основе численного решения набора задач Коши для уравнения (2.1) при фиксированных значениях параметров α_1, α_2 методом Рунге-Кутта.

Предположим, что решения для уравнения (2.1) с начальными условиями

$$y_{km}(\alpha_1, \alpha_2, 0) = \delta_{km}, \quad m, k = 1, 2, \ldots, 6$$

($\delta_{m\,k}$ — символ Кронекера) построены. Тогда решение системы (2.1) для слоя с переменными свойствами можно представить в форме

$$Y_k^{(1)} = \sum_{m=1}^{6} c_m(\alpha_1, \alpha_2) y_{km}(\alpha_1, \alpha_2, x_3), \quad (3.1)$$
$$k = 1, 2, \ldots, 6.$$

Решение системы (2.1) для полупространства имеет традиционный вид

$$Y_m^{(2)} = \sum_{k=1}^{3} c_{k+6}(\alpha_1, \alpha_2) f_{mk} e^{\sigma_k x_3}, \quad (3.2)$$
$$m, k = 1, 2, 3,$$

где $f_{3k} = 1$ $(k = 1, 2)$, $f_{33} = 0$. Остальные f_{mk} определяются следующими формулами:

$$f_{m1} = -\alpha_m^2 \sigma_1^{(2)^{-1}}, \quad f_{m2} = -\alpha_m^2, \quad \sigma_2^{(2)} u^{-2},$$
$$m = 1, 2,$$
$$f_{13} = -f_{23} = i\alpha_1\alpha_2, \quad f_{43} = -f_{53} = i\alpha_1\alpha_2\sigma_2^{(2)},$$
$$f_{m1} = -2i\alpha_{m-3}^2, \quad f_{m2} = -2i\alpha_{m-3}^2 \theta u^{-2},$$
$$m = 4, 5,$$
$$f_{61} = 2\theta\sigma_1^{(2)^{-1}}, \quad f_{62} = 2\sigma_2^{(2)}, \quad f_{63} = 0,$$
$$\theta = u^2 - 0,5\kappa_2^2.$$

Неизвестные коэффициенты $c_k(\alpha_1, \alpha_2)$, $(k = 1, 2, \ldots, 9)$, участвующие в представлениях (3.1) и (3.2), определятся при удовлетворении преобразованных по Фурье граничных условий.

4. Решение краевой задачи о колебаниях неоднородной среды

Граничные условия (1.2) после применения двумерного преобразования Фурье в обозначениях (2.2) принимают вид

$$x_3 = h: \quad \mathbf{D}^{(1)}\mathbf{Y}^{(1)} = \mathbf{Q}^*, \quad (4.1)$$

$$x_3 = 0: \quad \mathbf{Y}^{(1)} = \mathbf{Y}^{(2)}. \quad (4.2)$$

Здесь $\mathbf{Q}^* =\uparrow \{-i\alpha_1 Q_1^{(1)}, -i\alpha_2 Q_2^{(1)}, Q_3^{(1)}\}$, где $\mathbf{Q}^{(1)} = \{Q_1^{(1)}, Q_2^{(1)}, Q_3^{(1)}\}$ — трансформанта Фурье вектора напряжений,

$$\mathbf{D}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

После внесения представлений (3.1) и (3.2) в выражения (4.1) и (4.2) получим уравнение

$$\mathbf{rc} = \mathbf{Q}_0$$

относительно вектора $\mathbf{c} =\uparrow \{c_k\}_{k=1}^9$.

Здесь

$$\mathbf{Q}_0 =\uparrow \{-i\alpha_1 Q_1, -i\alpha_2 Q_2, Q_3, 0, 0, 0, 0, 0, 0\},$$

$\mathbf{r} = \|r_{lk}\|_{l,k=1}^9$ — матрица с элементами

$$r_{lk} = y_{l+3,k}(\alpha_1, \alpha_2, h),$$
$$l = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \ldots, 6,$$
$$r_{lk} = 0, \quad l = 1, 2, 3, \quad k = 7, 8, 9,$$
$$r_{lk} = \delta_{l-3,k} y_{l-3,k},$$
$$l = 5, 6, \ldots, 9, \quad k = 1, 2, \ldots, 6,$$
$$r_{lk} = -f_{l-3,k-6},$$
$$l = 5, 6, \ldots, 9, \quad k = 7, 8, 9.$$

Решение краевой задачи (1.1), (1.2) для слоя при фиксированном значении частоты представляется в виде

$$\mathbf{u}^{(1)} = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{\Omega} \mathbf{k}^{(1)}(x_1 - \xi, x_2 - \eta, x_3) \times$$
$$\times \mathbf{q}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \quad (4.3)$$

$$\mathbf{k}^{(1)}(s, t, x_3) = \int\limits_{\Gamma_1} \int\limits_{\Gamma_2} \mathbf{K}^{(1)}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) \times$$
$$\times e^{-i(\alpha_1 s + \alpha_2 t)}\, d\alpha_1\, d\alpha_2, \quad (4.4)$$

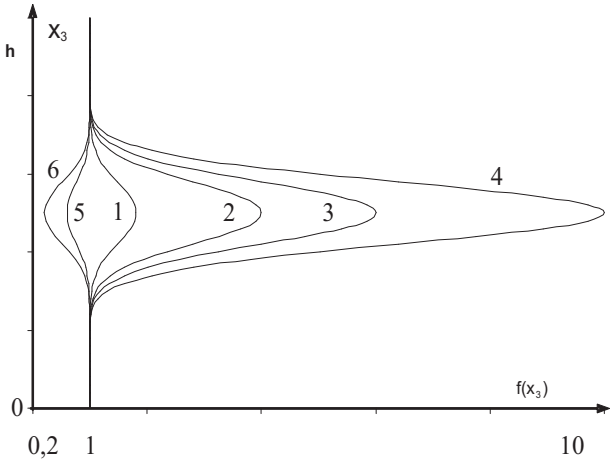

Рис. 1. Кривые, иллюстрирующие законы изменения упругих модулей по толщине слоя. Цифрами 1–6 обозначены кривые при $k = 16$ и $a = 0,4$; 3; 5; 8; $-0,4$; $-0,8$ соответственно

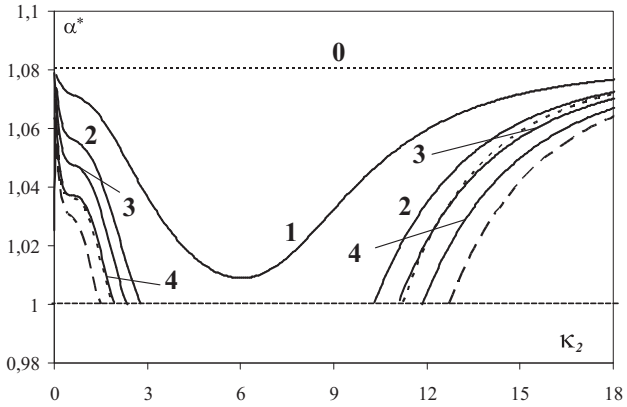

Рис. 2. Дисперсионные кривые (нормированы к частоте) сред с высокоскоростным включением. Нумерация кривых соответствует нумерации на рис. 1. 0 — однородное полупространство, пунктирные и штриховые линии соответствуют пакету однородных слоев на однородном полупространстве

$$\mathbf{K}^{(1)}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = \left\| K^{(1)}_{mn} \right\|^3_{m,n=1}, \qquad (4.5)$$

$$K^{(1)}_{mn} = \Delta^{-1} \sum_{s=1}^{6} \Delta_{ns} y_{ms}(\alpha_1, \alpha_2, x_3),$$

$\Delta = \det \mathbf{r}$, Δ_{ns} — алгебраическое дополнение элемента r_{ns}.

5. Динамика поверхности неоднородной среды

Предположим, что при постоянной плотности упругие модули материала слоя изменяются по закону

$$\lambda^{(1)}(x_3) = f(x_3)\lambda^{(2)}, \mu^{(1)}(x_3) = f(x_3)\mu^{(2)}.$$

Ранее в качестве функций $f_(x_3)$ использовались монотонно изменяющиеся по толщине функции, определяющие либо «нормальный» (модули увеличиваются по толщине), либо «аномальный» тип неоднородности (модули уменьшаются по толщине). В настоящей работе используются функции

$$f(x_3) = 1 + a \sin^k(\pi x_3), \qquad (5.1)$$

моделирующие низкоскоростное ($a < 0$) или высокоскоростное ($a > 0$) включение. Коэффициент k определяет градиентность изменения свойств материала. На рис. 1. приведены графики функций, определяющих высокоскоростное включение при $k = 16$ и $a = 0,8$; 3; 5 и 9 (кривые обозначены цифрами 1, 2, 3 и 4), и низкоскоростное включение при $k = 16$ и $a = -0,4$; $-0,8$ (кривые обозначены цифрами 5 и 6).

На рис. 2 представлены дисперсионные кривые, рассчитанные для случая «жесткого включения». Нумерация сплошных кривых соответствует нумерации на рис. 1. Поведение дисперсионных кривых в этом случае резко отличается от поведения кривых в «аномальном» случае — когда на поверхности низкоскоростного полупространства лежит высокоскоростной слой. Как известно, в этом случае поверхностная волна существует лишь в ограниченном диапазоне частот. Частота отсечки, на которой мода исчезает, определяется соотношением жесткостей слоя и полупространства: с увеличением перепада жесткости понижается, с уменьшением перепада — увеличивается.

В случае жесткого включения ситуация существенно изменяется: для каждой моды существует две частоты отсечки: на первой кривая, как обычно исчезает, на второй — появляется вновь. Из графиков следует, что с увеличением амплитуды неоднородности (параметр a в формуле (5.1)) нижняя частота отсечки уменьшается, верхняя — увеличивается. Диапазон частот, в котором вещественный полюс отсутствует, расширяется с увеличением жесткости включения. При малых значениях a, в частности при $a = 0,8$, мода существует во всем диапазоне, частота отсечки вообще отсутствует.

В качестве подтверждения этого эффекта на рис. 1 штриховыми и пунктирными линия-

ми представлены дисперсионные кривые, рассчитанные для трехслойного полупространства. Слои $|x_1|$, $|x_2| \leqslant \infty$, $0 \leqslant x_3 \leqslant h_1$, $h_1 \leqslant x_3 \leqslant h_2$ и $h_2 \leqslant x_3 \leqslant h$ равно как и полупространство $|x_1|$, $|x_2| \leqslant \infty$, $x_3 \leqslant 0$ являются однородными, причем свойства первого и третьего слоя, а также полупространства совпадают. Упругие модули второго слоя в 7 раз превышают модули полупространства. Штриховые и пунктирные кривые рассчитаны для $h_1 = 0,4$, $h_2 = 0,7$ и $h_1 = 0,32$, $h_2 = 0,66$ соответственно. Как следует из графиков, наличие двух частот отсечки является характерным для сред с жестким включением.

Вид дисперсионных кривых в случае «мягкого включения», как показал численный анализ, характерен для сред «нормального» типа. Наличие «мягкого включения» приводит к появлению счетного множества мод поверхностных волн, каждая из которых характеризуется «частотой отсечки» — частотой их возникновения. Определяющую роль в структуре поверхностного волнового поля играет интегральный коэффициент — его рост приводит к увеличению количества мод поверхностных волн. Особенностью волновой картины на поверхности среды с «мягким» включением является то, что каждая мода вносит вклад в поверхностное волновое поле лишь в ограниченном диапазоне частот. Вне этого диапазона она подавляется за счет того, что на соответствующий полюс функции Грина накладывается нуль.

Тем самым, за счет подбора жесткости включения можно изменять структуру поверхностного волнового поля, подавляя моды в желательном диапазоне частот.

6. Динамическая жесткость неоднородной среды

Выражения (4.4)–(4.5) описывают перемещение произвольной точки слоя под действием распределенной в области Ω нагрузки. Для исследования динамической жесткости неоднородной среды в выражениях (4.4)–(4.5) необходимо положить $x_3 = h$. При этом функция $\mathbf{f}(x_1, x_2)$ — амплитуда колебаний штампа предполагается известной и равной 1.

После этих преобразований выражения (4.4) и (4.5) представятся в виде

$$\frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{\Omega} \mathbf{k}^{(1)}(x_1 - \xi, x_2 - \eta, h) \times \times \mathbf{q}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \mathbf{f}(x_1, x_2), \quad (6.1)$$

$$\mathbf{k}^{(1)}(s, t, h) = \int\limits_{\Gamma_1} \int\limits_{\Gamma_2} \mathbf{K}^{(1)}(\alpha_1, \alpha_2, h) \times \times e^{-i(\alpha_1 s + \alpha_2 t)}\, d\alpha_1\, d\alpha_2. \quad (6.2)$$

Выражение (6.1), (6.2) представляет собой интегральное уравнение относительно неизвестной функции распределения контактных напряжений $\mathbf{q}$.

Особенностью таких интегральных уравнений является осцилляция ядра $\mathbf{k}^{(1)}(x_1, x_2, h)$ (6.2), обусловленная наличием у элементов матрицы-функции $\mathbf{K}^{(1)}(x_1, x_2, h)$ конечного, зависящего от частоты, множества вещественных нулей и полюсов. Не менее важной особенностью является наличие у символа ядра $\mathbf{K}^{(1)}(x_1, x_2, h)$ точек ветвления на вещественной оси.

Для решения систем уравнений вида (6.1) был предложен подход [7, 9], основанный на сведении интегрального уравнения с осциллирующим ядром к интегральному уравнению с экспоненциально убывающим ядром, решение которого строится численными методами. Достоинством такого подхода является возможность использования точного (в общем случае зависящего от частоты κ_2) представления матрицы-функции $\mathbf{K}^{(1)}$, учитывающего все ее особенности, в том числе, наличие точек ветвления на вещественной оси.

В качестве примера рассмотрим задачу о поступательных вертикальных колебаниях жесткого штампа на поверхности неоднородной, описанной выше среды. Штамп занимает в плане область $|x_1| \leqslant a, |x_2| \leqslant \infty$, колебания предполагаются гармоническими, установившимися, трение в области контакта отсутствует. Задача сводится к скалярному аналогу уравнения (6.1), решение которого строится предложенным в работе [7] методом.

На рис. 3, 4 приведены графики, иллюстрирующие влияние неоднородности среды на ее динамическую жесткость. Сплошные линии представляют $\operatorname{Re} Q$, штриховые линии — $\operatorname{Im} Q$, номера линий соответствуют номерам кривых на рис. 1. Из графиков следует, что наличие включения приводит к возникновению ярко выраженной осцилляции динамической жесткости по частоте.

Низкоскоростное включение (кривые 5 и 6 на рис. 3) в диапазоне частот [0; 6] приводит к уменьшению значений $\operatorname{Im} Q$, что свидетельствует о снижении уровня излучения из зоны контакта в подстилающую среду. В диапазоне

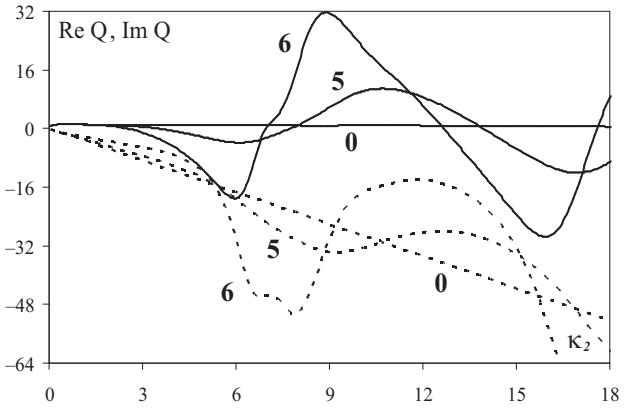

Рис. 3. Динамическая жесткость среды с низкоскоростным включением. $\mathrm{Re}\,Q$ — сплошные, $\mathrm{Im}\,Q$ — пунктирные линии. Нумерация кривых соответствует нумерации на рис. 1; 0 — однородное полупространство

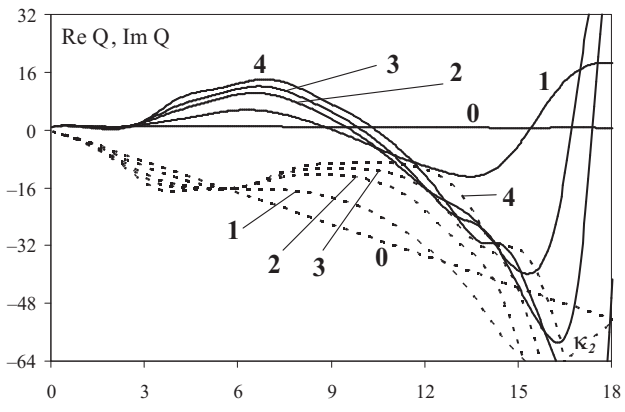

Рис. 4. Динамическая жесткость среды с высокоскоростным включением. $\mathrm{Re}\,Q$ — сплошные, $\mathrm{Im}\,Q$ — пунктирные линии. Нумерация кривых соответсвует нумерации на рис. 1; 0 — однородное полупространство

[6; 9] уровень излучения из зоны контакта резко возрастает, затем в диапазоне [9; 12] также резко убывает. Противоположная ситуация имеет место для высокоскоростного включения (кривые 1–4 на рис. 4). В интервале частот [0; 6] жесткое включение приводит к увеличению значений $\mathrm{Im}\,Q$, что свидетельствует о повышении уровня излучения из зоны контакта в подстилающую среду. Затем в диапазоне [6; 15] уровень излучения из зоны контакта резко падает. Тем самым, за счет подбора жесткости включения можно либо увеличить, либо уменьшить уровень излучения из зоны контакта в заданном диапазоне частот.

Аналогичным образом можно управлять резонансными эффектами за счет выбора характера изменения $\mathrm{Re}\,Q$. Для низкоскоростного включения в диапазоне [0; 6] $\mathrm{Re}\,Q$ является отрицательной, что определяет невозможность возникновения даже слабовыраженных резонансных эффектов. В этом же интервале в случае высокоскоростного включения $\mathrm{Re}\,Q$ является положительной, что определяет возможность возникновения слабовыраженных резонансных эффектов. Тем самым, за счет подбора жесткости включения можно либо усилить резонансные эффекты в заданном диапазоне частот, либо значительно их ослабить или погасить.

Заключение

Развит и реализован подход, позволяющий существенно расширить класс функций, определяющих закон изменения механических параметров неоднородной среды с плавно изменяющимися свойствами. Изучен новый класс задач для неоднородных сред с «жестким» или «мягким» включением. Показано, что изменением жесткости включения в среде можно управлять как структурой поверхностного волнового поля, так и динамической жесткостью среды.

Литература

1. *Ананьев И. В., Бабешко В. А.* Колебания штампа на слое с переменными по глубине характеристиками // МТТ. 1978. №1. С. 64–69.
2. *Ананьев И. В., Калинчук В. В., Полякова И. Б.* О возбуждении волн вибрирующим штампом в среде с неоднородными начальными напряжениями // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 483–489.
3. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Глушкова Н. В.* Методы построения матрицы Грина стратифицированного упругого полупространства // ЖВМВФ. 1987. Т. 27. №1. С. 93–101.
4. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989, 344 с.
5. *Калинчук В. В., Лысенко И. В., Полякова И. Б.* Об особенностях взаимодействия колеблющегося штампа с неоднородным тяжелым основанием // ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 2. С. 301–308.
6. *Белянкова Т. И., Калинчук В. В., Полякова И. Б., Пузанов Ю. Е., Сатарова В. В.* К проблеме оптимизации структуры неоднородной среды // Совр. проблемы механики сплошной среды. Труды VI Междунар. конф. Ростов н/Д, 2001. Т. 1. С. 39–43.
7. *Калинчук В. В., Белянкова Т. И.* Динамические контактные задачи для предварительно напряженных тел. М.: Физматлит, 2002. 240 с.

8. *Калинчук В. В., Белянкова Т. И.* О динамике среды с непрерывно изменяющимися по глубине свойствами // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естест. науки. 2004. Спецвыпуск. С. 46–49.

9. *Бабешко В. А., Белянкова Т. И. Калинчук В. В.* Метод фиктивного поглощения в задачах теории упругости для неоднородного полупространства // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 276–284.

Статья поступила 25 марта 2006 г.
Южный научный центр РАН
Ростовский государственный университет
© Калинчук В. В., Белянкова Т. И., Богомолов А. С., 2006