УДК 539.3

К ПОСТРОЕНИЮ РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СЛОИСТЫХ СРЕД НЕРЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ

***Ляпин А. А.*[1], *Селезнёв М. Г.*[2]**

TO THE CONSTRUCTION OF SOLUTIONS OF DYNAMIC PROBLEMS FOR LAYERED MEDIA WITH IRREGULAR STRUCTURE

Lyapin A. A., Seleznev M. G.

The approach proposed makes it possible to construct solutions for stationary problems of dynamic theory of elasticity for layered media containing thickness-variable layers, local inclusions or cavities. The construction is based on basic relationships of the method of boundary integral equations that use special types of elementary solutions for different components of a layered medium. Though these types of geophysical structures are widely spread in real practice, the process of mathematical modeling of vibrations generation and propagation in them has been poorly studied.

Предлагается подход к построению решений стационарных задач динамической теории упругости для слоистых сред, содержащих переменные по толщине слои, локальные включения или полости. В основе построения лежат основные соотношения метода граничных интегральных уравнений (ГИУ), использующие специальные виды фундаментальных решений для различных компонент слоистой среды. Подобные геофизические структуры широко распространены в реальности, однако аппарат математического моделирования процессов генерации и распространения колебаний в них изучен слабо.

1. Постановка задачи

Рассматриваются установившиеся гармонические с частотой ω колебания двухслойной полуплоскости с переменным по толщине поверхностным слоем (см. рисунок).

Свойства среды, занимающей области D_i, $i = 1, 2$, предполагаются однородными и определяются плотностью ρ_i и скоростями распространения продольных V_{pi} и поперечных V_{si} волн.

Предполагается, что толщина слоя $D_2 = D_{21} \cup D_{22} \cup D_{23}$ является постоянной вне некоторой ограниченной области D_{22} и задается величинами h_1 в D_{21} и h_3 в D_{23}. Описанные области встречаются в практике при моделировании заглубленных фундаментов зданий и сооружений, геологических структур, рельефа местности в прибрежных и предгорных районах.

В качестве основных расчетных характеристик выберем амплитудные функции перемещений точек в

$$D_i\mathbf{u}^{(i)}(\mathbf{r}) = \left\{u_j^{(i)}(\mathbf{r})\right\} = \left\{u_x^{(i)}(\mathbf{r}), u_y^{(i)}(\mathbf{r})\right\},$$
$$j = 1, 2,$$
$$\begin{aligned}\mathbf{r} = (x, y) : x > 0;\quad & y \in (-\infty, +\infty) \text{ в } D_1;\\ x \in (-h_1, 0);\quad & y \in (-\infty, y_1) \text{ в } D_{21};\\ x \in (\varphi_2(y), 0);\quad & y \in (y_1, y_3) \text{ в } D_{22};\\ x \in (-h_3, 0);\quad & y \in (y_3, +\infty) \text{ в } D_{23}\end{aligned}$$

(временной множитель $\exp(-i\omega t)$ здесь и далее опущен).

На границе раздела сред ($x = 0$) предполагаются непрерывными векторы перемещений

$$\mathbf{u}^{(1)}(0, y) = \mathbf{u}^{(2)}(0, y) \tag{1.1}$$

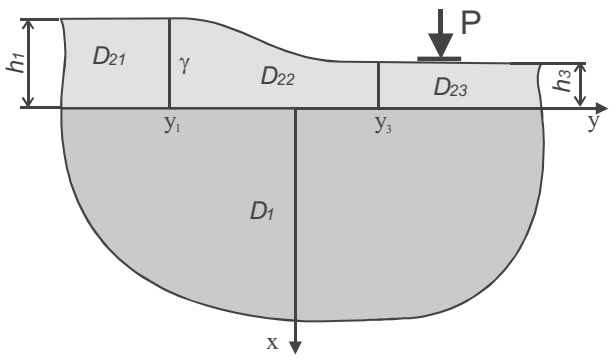
и напряжений

$$\mathbf{t}^{(1)}(0, y) = \mathbf{t}^{(2)}(0, y) = \mathbf{R}(y). \tag{1.2}$$

Колебания возбуждаются поверхностной нагрузкой, распределенной по отрезку Ω вне области D_{22}, интенсивности $\mathbf{P}(y)$. Здесь и далее

[1]Ляпин Александр Александрович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики Ростовского военного института ракетных войск.

[2]Селезнёв Михаил Георгиевич, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой информационных систем в строительстве Ростовского государственного строительного университета.



все параметры, имеющие размерность длины, отнесены к длине отрезка Ω, а напряжения — к модулю сдвига слоя μ_2 ($\mu_i = \rho_i V_{si}^2$) без изменения в их обозначениях.

2. Построение системы ГИУ

Перемещения в полуплоскости выпишем в виде интеграла Фурье [3]

$$\mathbf{u}^{(1,1)}(x,y) = \\ = \frac{\nu}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} \mathbf{Q}(x,\alpha)\tilde{\mathbf{R}}(\alpha)\exp(-i\alpha y)\,d\alpha, \\ \tilde{\mathbf{R}}(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{R}(y)\exp(i\alpha y)\,dy. \tag{2.1}$$

Контур Γ выбирается в соответствии с принципом предельного поглощения [1]; $\nu = \frac{\mu_2}{\mu_1}$.

Для перемещений в D_{2j}, $j = 1,3$ воспользуемся динамической теоремой взаимности [2], где в качестве фундаментальных решений выбраны функции $\mathbf{U}^{*(2,j)}(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}), \mathbf{T}^{*(2,j)}(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})$, соответствующие нулевым напряжениям на гранях слоев $x = 0$, $x = -h_j$, от сосредоточенного в $\mathbf{r}_0$ точечного источника колебаний

$$\mathbf{u}^{(2,j)}(\mathbf{r}_0) = \int\limits_{\gamma_j} \mathbf{T}^{*(2,j)}(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})\mathbf{n}(\mathbf{r})\cdot\mathbf{u}^{(2,j)}(\mathbf{r})\,ds + \\ + \int\limits_{\gamma_j} \mathbf{U}^{*(2,j)}(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})\boldsymbol{\tau}_j(\mathbf{r})\,ds + \\ + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{U}^{*(2,j)}(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})\Big|_{x=0}\mathbf{R}_j(y)\,dy + \\ + \int\limits_{\Omega} \mathbf{U}^{*(2,j)}(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})\Big|_{x=-h_j}\mathbf{P}(y)\,dy. \tag{2.2}$$

Здесь $\boldsymbol{\tau}_j$ — векторы напряжений на линиях γ_j, $\mathbf{R}_j$ — на границе $x = 0$: $\mathbf{R}(y) = \mathbf{R}_1(y) + \mathbf{R}_2(y) + \mathbf{R}_3(y)$, $\mathbf{R}_1(y) \equiv 0$ вне интервала $(-\infty, y_1]$, $\mathbf{R}_2(y) \equiv 0$ вне $[y_1, y_3]$, $\mathbf{R}_3(y) \equiv 0$ вне $[y_3, +\infty)$. Матрица фундаментальных решений $\mathbf{U}^{*(2,j)}(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})$ имеет вид

$$\mathbf{U}^{*(2,j)}(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}) = \\ \mathbf{U}^{(2,j)}(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}) + \mathbf{U}^{+(2,j)}(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}), \tag{2.3}$$

где $\mathbf{U}^{(2,j)}(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})$ — определяет набор цилиндрических волн, уходящих от источника колебаний и представляет собой фундаментальные решения для бесконечной плоскости, $\mathbf{U}^{+(2,j)}(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})$ — суперпозиция отраженных от границ слоя волн

$$\mathbf{U}^{+(2,j)}(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} \bar{\mathbf{U}}^{+(2,j)}(x_0,x,\alpha)\times \\ \times\exp(-i\alpha(y-y_0))\,d\alpha. \tag{2.4}$$

С помощью формул переразложения цилиндрических волн по плоским [3] соотношение (2.4) может быть представлено в аналитическом виде и для первого слагаемого в (2.3).

Для области D_{22} воспользуемся аналогичным представлением, где в качестве фундаментальных выбраны перемещения для полуплоскости со свободной от усилий границей $x = 0$:

$$\mathbf{u}^{(2,2)}(\mathbf{r}_0) = \\ = -\int\limits_{\gamma_1\cup\gamma_3} \mathbf{T}^{*(2,2)}(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})\mathbf{n}(\mathbf{r})\mathbf{u}^{(2,2,)}(\mathbf{r})\,ds + \\ + \int\limits_{\gamma_1\cup\gamma_3} \mathbf{U}^{*(2,2)}(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})\boldsymbol{\tau}_j(\mathbf{r})\,ds + \\ + \int\limits_{y_1}^{y_3} \mathbf{U}^{*(2,2)}(\mathbf{r}_0,\mathbf{r})\Big|_{x=0}\mathbf{R}_2(y)\,dy. \tag{2.5}$$

Фундаментальные решения в (2.5) также допускают представление (2.4).

Устремляя далее в (2.2), (2.5) точку $\mathbf{r}_0$ к соответствующей границе γ_j $(j = 1, 2, 3)$ или $x = 0$ области D_{2j} с учетом представления (2.1), получим систему интегральных уравнений относительно неизвестных граничных перемещений $\mathbf{u}^{(1)}, \mathbf{u}^{(2,j)}$ и векторов напряжений $\boldsymbol{\tau}_j$, $\mathbf{R}_j$. С использованием условий непрерывности векторов напряжений и перемещений при переходе через границу $x = 0$ из полученной системы вектор-функции $\mathbf{R}_j$ можно исключить. Для этого к ГИУ на линии $x = 0$ применим преобразование Фурье по координате y_0 $F_{y_0}[\ldots]$ и воспользуемся выражениями, аналогичными формулам Парсеваля

$$F_{y_0}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_1(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) f_2(y)\, dy\right] = \bar{f}_1(x_0, x, \alpha)\tilde{f}_2(\alpha),$$

$$F_{y_0}\left[\int\limits_{\gamma} f_1(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}) f_2(\mathbf{r})\, ds\right] = \\ = \int\limits_{\gamma} \exp[i\alpha y]\bar{f}_1(x_0, x, -\alpha) f_2(\mathbf{r})\, ds,$$

где

$$f_1(x_0, y_0, x, y) = \\ = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} \bar{f}_1(x_0, x, \alpha)\cdot \exp(i\alpha(y - y_0))\, d\alpha.$$

В результате преобразование Фурье функции $\mathbf{R}(y)$ имеет вид

$$\tilde{\mathbf{R}}(\alpha) = \mathbf{A}(\alpha)\cdot\tilde{\mathbf{P}}(\alpha) + \\ \sum_{j=1}^{3}\int\limits_{\gamma_j} \mathbf{K}_j(\alpha, \mathbf{r})\mathbf{u}^{(2,j)}(\mathbf{r})\, ds + \\ + \sum_{j=1,3}\int\limits_{\gamma_j} \mathbf{L}_j(\alpha, \mathbf{r})\boldsymbol{\tau}_j(\mathbf{r})\, ds,$$

где матрицы $\mathbf{A}(\alpha), \mathbf{K}_j(\alpha, \mathbf{r}), \mathbf{L}_j(\alpha, \mathbf{r})$ выражаются аналитически через построенные матрицы фундаментальных решений. Это позволяет записать систему граничных интегральных уравнений относительно неизвестных перемещений на линиях γ_j и напряжений на γ_1, γ_3 в окончательном виде

$$\frac{1}{2}\mathbf{u}^{(2,j)}(\mathbf{r}_0) + \sum_{j=1}^{3}\int\limits_{\gamma_j} \mathbf{M}_j(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})\mathbf{u}^{(2,j)}(\mathbf{r})\, ds + \\ + \sum_{j=1,3}\int\limits_{\gamma_j} \mathbf{N}_j(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})\tau_j(\mathbf{r})\, ds = \\ = \int\limits_{\Gamma} \mathbf{S}_j(\alpha, \mathbf{r}_0)\tilde{\mathbf{P}}(\alpha)\, d\alpha. \quad (2.6)$$

Предложенная методика сведения краевой задачи к системе ГИУ обладает рядом преимуществ:

– неизвестные функции заданы только на конечных линиях, что позволяет для решения эффективно применять метод граничных элементов;

– упругие свойства сред в областях D_{2j}, формирующих поверхностный слой, могут быть различными;

– форма самих линий γ_1, γ_3 может быть достаточно произвольной;

– за счет специальной аппроксимации для τ_j можно точно учесть возможную концентрацию напряжений вблизи границы раздела поверхностного слоя (при его разнородных составляющих) и полуплоскости;

– методика легко переносится на случай многослойной полуплоскости, а также на задачи при наличии заглубленного слоя переменной толщины.

Апробация изложенного подхода на примере решения ряда задач антиплоской деформации проиллюстрировала ее эффективность.

Литература

1. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1989. 320 с.
2. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. М.: Мир, 1984. 494 с.
3. *Ляпин А. А., Селезнев М. Г., Собисевич Л. Е., Собисевич А. Л.* Механико-математические модели в задачах активной сейсмологии. М.: ГНИЦ ПГК(МФ) при КубГУ, 1999. 294 с.

Статья поступила 28 апреля 2006 г.
Ростовский военный институт ракетных войск
Ростовский государственный строительный университет
© Ляпин А. А., Селезнёв М. Г., 2006