

УДК 539.3

## К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ЖИДКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ<sup>1</sup>

*Нижник М. П.<sup>2</sup>, Павлова А. В.<sup>3</sup>, Рубцов С. Е.<sup>4</sup>*

TO THE SOLUTION OF ONE PROBLEM FOR ELASTIC HALF-SPACE WITH A LIQUID INCLUSION

Nizhnik M. P., Pavlova A. V., Rubtsov S. E.

The work describes the solution of the problem about vibration of elastic half-space with a liquid inclusion under the action of harmonic point load. The algorithm proposed allows constructing the solution and investigating properties of a formed typical displacements field.

Задачи геофизики, гидрогеологии, инженерной геологии, изучающей условия строительства различных сооружений, приводят к необходимости построения математических моделей структурно-неоднородных сред и изучения на их основе различных динамических эффектов в контактирующих жидкой и упругой средах.

Для решения такого рода задач применяются различные методы [1–3]. Точное аналитическое решение, как правило, получить не удастся, поэтому широкое распространение получили численные методы. Однако в ряде случаев предпочтительными являются приближенные полуаналитические методы, которые позволяют выделить качественные особенности исследуемой задачи, в частности, методы исследования многослойных упругих сред [4].

В настоящей работе рассматривается модель геологической среды, состоящей из двух упругих сред (слоя и полупространства) и расположенного между ними слоя жидкости. Подобными структурами могут моделироваться, например, межпластовые ненапорные воды, встречающиеся на приподнятых между речных массивах. Эти безнапорные воды рас-

полагаются в породах, которые сверху и снизу ограничены водонепроницаемыми пластами.

Задача решается в плоской постановке. Колебания в упругой системе возбуждаются гармоническим сосредоточенным источником на частоте  $\omega$ , расположенным на поверхности упругого слоя, и предполагаются установившимися, т. е. зависимость всех неизвестных и заданных функций от времени определяется множителем  $e^{-i\omega t}$ .

Движение точек жидкости, занимающей объем  $-\infty \leq x \leq +\infty$ ,  $h_1 \leq z \leq h_2$ , описывается потенциалом скоростей  $\varphi(x, z, t)$ , удовлетворяющим волновому уравнению, перемещения точек упругой среды — вектором  $\mathbf{u}(x, z, t) = (u(x, z, t), w(x, z, t))^T$ , который удовлетворяет системе уравнений Ляме [5].

Касательные напряжения на поверхности среды равны нулю  $\tau_{xz}|_{z=0} = 0$ , нормальные — определяются следующим образом:

$$\sigma_z|_{z=0} = A\delta(x - x_0)e^{-i\omega t}, \quad A = \text{const.} \quad (1)$$

При  $R = \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty$   $\mathbf{u} \rightarrow 0$ , и выполняется условие излучения типа Зоммерфельда [6].

На границах раздела сред  $z = h_l$  для неизвестных амплитуд нормальных напряжений введены обозначения  $q_l$ ,  $l=1,2$ . Касательные

<sup>1</sup>Работа выполнена при поддержке РФФИ (06-01-00295, 06-08-00671, 06-01-08017), РФФИ р2006 юг (06-01-96802, 06-01-96637, 06-01-96638) и гранта Президента РФ (НШ-4839.2006.1).

<sup>2</sup>Нижник Максим Павлович, аспирант кафедры высоких технологий прогноза и предупреждения чрезвычайных ситуаций Кубанского государственного университета.

<sup>3</sup>Павлова Алла Владимировна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета.

<sup>4</sup>Рубцов Сергей Евгеньевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета.

напряжения на границах раздела слоев отсутствуют

$$\begin{cases} \tau_{xz}|_{z=h_1} = 0, \\ \sigma_z|_{z=h_1} = q_1(x) e^{-i\omega t}, \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \tau_{xz}|_{z=h_2} = 0, \\ \sigma_z|_{z=h_2} = q_2(x) e^{-i\omega t}. \end{cases} \quad (3)$$

Взаимодействие сред определяется равенством вертикальных составляющих скоростей точек жидкости и упругой среды в зоне контакта

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Big|_{z=h_1} = 0, \\ \left( \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Big|_{z=h_2} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Для исследования задачи применяется метод интегральных преобразований, который позволяет уменьшить размерность задачи.

Учитывая гармоническую зависимость параметров от времени и условия (4), краевая задача для жидкости может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \Delta \varphi(x, z) &= -\frac{\omega^2}{c^2} \varphi(x, z), \\ \varphi(x, z)|_{z=h_1} &= -\frac{i}{\omega \rho_0} q_1(x), \\ \varphi(x, z)|_{z=h_2} &= -\frac{i}{\omega \rho_0} q_2(x), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $c$  — скорость звука в жидкости,  $\rho_0$  — плотность жидкости.

Применением экспоненциального преобразования Фурье эта задача сводится к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения, решение которой имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha, z) &= \frac{i}{\omega \rho_0} \times \\ &\times \frac{Q_1(\alpha) \operatorname{sh}(\sigma_0(z - h_2))}{\Psi} - \\ &- \frac{Q_2(\alpha) \operatorname{sh}(\sigma_0(z - h_1))}{\Psi}. \end{aligned} \quad (6)$$

$$\Psi = \operatorname{sh}(\sigma_0(h_2 - h_1)).$$

Здесь  $\Phi(\alpha, z)$  — Фурье-образ потенциала скоростей,  $Q_{1,2}$  — интегральные характеристики неизвестных нормальных напряжений на границах раздела сред (при  $z = h_{1,2}$  соответственно),  $\sigma_0 = \sqrt{\alpha^2 - \omega^2/c^2}$ .

В случае гармонических колебаний задача для упругого слоя  $0 \leq z \leq h_1$  представляет собой совокупность уравнений Ляме

$$(\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_1 + \mu \Delta \mathbf{u}_1 + \rho \omega^2 \mathbf{u}_1 = 0 \quad (7)$$

и условий (1), (2).

В результате решения этой задачи получены представления Фурье-образов перемещений

$$\begin{aligned} U_1(\alpha, z) &= \\ &= \frac{2i\alpha}{\Delta} \left[ A e^{i\alpha x_0} \left( \eta (\operatorname{ch}(h_1(\sigma_2 - \sigma_1) + \sigma_1 z) \Omega_+ + \right. \right. \\ &+ \operatorname{ch}(\sigma_1 z - h_1(\sigma_2 + \sigma_1)) \Omega_- - 2\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{ch}(\sigma_1 z)) + \\ &+ \sigma_1 \sigma_2 (\operatorname{ch}(h_1(\sigma_2 - \sigma_1) - \sigma_2 z) \Omega_+ - \\ &- \operatorname{ch}(h_1(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_2 z) \Omega_- - 2\eta^2 \operatorname{ch}(\sigma_2 z)) \Big) + \\ &+ Q_1 \left( \eta (\operatorname{ch}(h_1 \sigma_2 - \sigma_1 z) \Omega_+ + \operatorname{ch}(h_1 \sigma_2 + \sigma_1 z) \Omega_- - \right. \\ &- 2\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{ch}(h_1 \sigma_1 - \sigma_1 z)) + \\ &+ \sigma_1 \sigma_2 (\operatorname{ch}(h_1 \sigma_1 - \sigma_2 z) \Omega_+ - \operatorname{ch}(h_1 \sigma_1 + \sigma_2 z) \Omega_- - \\ &- 2\eta^2 \operatorname{ch}(h_1 \sigma_2 - \sigma_2 z)) \Big) \Big], \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} W_1(\alpha, z) &= \\ &= -\frac{2\sigma_1}{\Delta} \left[ A e^{i\alpha x_0} \left( \eta (\operatorname{sh}(h_1(\sigma_2 - \sigma_1) + \sigma_1 z) \Omega_+ + \right. \right. \\ &+ \operatorname{ch}(\sigma_1 z - h_1(\sigma_2 + \sigma_1)) \Omega_- - 2\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{ch}(\sigma_1 z)) + \\ &+ \alpha^2 (\operatorname{sh}(h_1(\sigma_2 - \sigma_1) - \sigma_2 z) \Omega_+ - \\ &- \operatorname{sh}(h_1(\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_2 z) \Omega_- - 2\eta^2 \operatorname{sh}(\sigma_2 z)) \Big) + \\ &+ Q_1 \left( \eta (\operatorname{sh}(h_1 \sigma_2 - \sigma_1 z) \Omega_+ + \operatorname{sh}(h_1 \sigma_2 + \sigma_1 z) \Omega_- - \right. \\ &- 2\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{sh}(h_1 \sigma_1 - \sigma_1 z)) + \alpha^2 (\operatorname{sh}(h_1 \sigma_1 - \sigma_2 z) \Omega_+ + \\ &+ \operatorname{sh}(h_1 \sigma_1 + \sigma_2 z) \Omega_- + 2\eta^2 \operatorname{sh}(h_1 \sigma_2 - \sigma_2 z)) \Big) \Big]. \end{aligned}$$

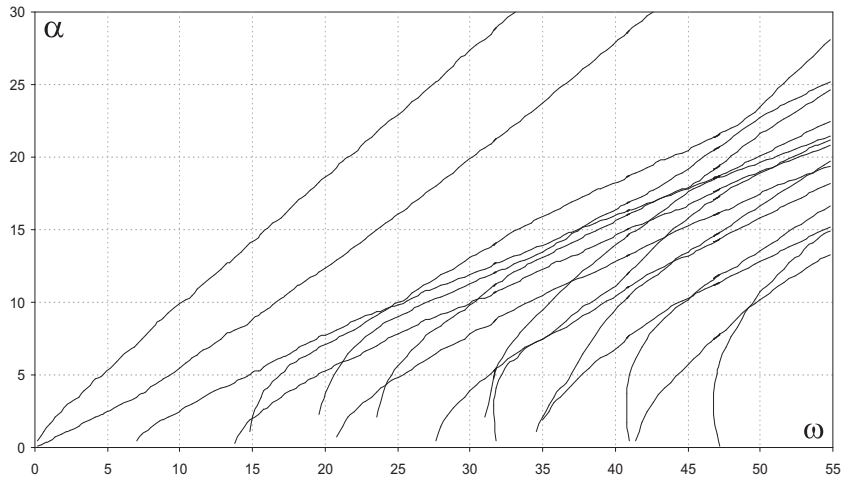
Здесь введены обозначения

$$\Omega_+ = \alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 + \eta^2, \quad \Omega_- = \alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 - \eta^2,$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 4\mu \left[ \operatorname{ch}(h_1(\sigma_2 - \sigma_1)) \Omega_+^2 - \right. \\ &- \operatorname{ch}(h_1(\sigma_2 + \sigma_1)) \Omega_-^2 - 4\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 \eta^2 \Big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \alpha^2 - k_1^2, \quad \sigma_2^2 = \alpha^2 - k_2^2, \\ k_1^2 &= \frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu}, \quad k_2^2 = \frac{\rho \omega^2}{\mu}, \quad \eta = \alpha^2 - \frac{k_2^2}{2}. \end{aligned}$$

Перемещения  $\mathbf{u}_2(x, z)$  точек упругого полупространства  $-\infty \leq x \leq +\infty$ ,  $z \leq h_2$



Дисперсионные кривые

также удовлетворяют уравнениям (7) и условиям на границе с жидкостью (3), при этом  $u_2|_{\sqrt{x^2+z^2} \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ ,  $w_2|_{\sqrt{x^2+z^2} \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ .

В результате решения этой задачи интегральные характеристики перемещений в полупространстве запишутся

$$U_2(\alpha, z) = \frac{i\alpha Q_2}{2\mu\Omega_-} \left( \eta e^{\sigma_1(h_2-z)} - \sigma_1\sigma_2 e^{\sigma_2(h_2-z)} \right),$$

$$W_2(\alpha, z) = -\frac{\sigma_1 Q_2}{2\mu\Omega_-} \left( \sigma_1 \eta e^{\sigma_1(h_2-z)} - \alpha \sigma_2 e^{\sigma_2(h_2-z)} \right). \quad (9)$$

Для нахождения образов Фурье  $Q_1(\alpha)$  и  $Q_2(\alpha)$  используются условия (5) и представления (6), (8), (9). В результате получены соотношения для интегральных характеристик компонент вектора перемещений и исследованы дисперсионные свойства изучаемой среды.

После применения обратного преобразования Фурье с использованием аппарата теории вычетов получено аналитическое представление для функций контактных напряжений на границе раздела сред

$$q_k(x) = i \sum_{j=1}^N \operatorname{res}_{\alpha=\xi_j} Q_k(\alpha) e^{i\xi_j x} + \int_{\Sigma_1^\pm} Q_k(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha + \int_{\Sigma_2^\pm} Q_k(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad k = 1, 2.$$

Здесь

$$Q_1 = -a_0 \rho_0 \omega^2 \left[ \frac{\rho_0 \omega^2 \operatorname{sh}(\sigma_0(h_2 - h_1)) \sigma_1(\alpha^2 - \eta)}{\Theta} - \frac{2\mu\sigma_0 \Delta \operatorname{ch}(\sigma_0(h_2 - h_1)) \Omega_-}{\Theta} \right],$$

$$Q_2 = \frac{2\mu\sigma_0 a_0 \rho_0 \omega^2 \Omega_-}{\Theta},$$

$$\Theta = -\rho_0^2 \omega^4 \sigma_1(\alpha^2 - \eta) \operatorname{sh}(\sigma_0(h_2 - h_1)) g_1 + 2\mu\sigma_0^2 \operatorname{sh}(\sigma_0(h_2 - h_1)) \Delta^2 \Omega_- - \sigma_0 \rho_0 \omega^2 \operatorname{ch}(\sigma_0(h_2 - h_1)) \Delta (\sigma_1(\alpha^2 - \eta) - 2\mu g_1 \Omega_-),$$

$$a_0 = 4\sigma_1(\alpha^2 - \eta) A e^{-i\alpha x_0} \times (\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{sh}(\sigma_1 h_1) - \eta^2 \operatorname{sh}(\sigma_2 h_1)),$$

$$g_1 = 2\sigma_1(\alpha^2 - \eta) (\operatorname{sh}(h_1(\sigma_1 - \sigma_2)) \Omega_+ + \operatorname{sh}(h_1(\sigma_1 + \sigma_2)) \Omega_-),$$

$\xi_j$  — нули функции  $\Theta$ . Значения интегралов по разрезам  $\Sigma_1^+$ ,  $\Sigma_2^+$  находятся численно.

На рисунке приведены кривые полюсов для безразмерной толщины слоя жидкости  $h = h_2 - h_1 = 0,1$ .

Реализация предложенного алгоритма позволяет не только построить решение задачи, но и исследовать закономерности формируемого поля перемещений. Рассмотренная задача может служить этапом при построении более общих моделей, адекватно описывающих реальные геологические среды, для определения волновых полей, возбуждаемых произвольными поверхностными и внутренними источниками.

---

*Литература*

1. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 343 с.
2. *Молотков Л. А.* Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах. Л.: Наука, 1984. 201 с.
3. *Молотков Л. А., Крауклис П. В., Крауклис Л. А.* О распространении сейсмических волн в блочных упруго-жидких // Записки научных семинаров ПОМИ. 2003. Т. 297. С. 230–271.
4. *Алиева М. Х., Прякина О. Д., Смирнова А. В.* Гидродинамические поля в многослойной жидкости // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2005. Приложение № 1. С 4–5.
5. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
6. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.

---

Статья поступила 21 октября 2005 г.

Кубанский государственный университет

© Нижник М. П., Павлова А. В., Рубцов С. Е., 2006