УДК 539.375:534.1

ПОСТРОЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ МАТРИЦ-СИМВОЛОВ ГРИНА МНОГОСЛОЙНЫХ СРЕД С ДЕФЕКТАМИ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ «ВИРУСОВ» ВИБРОПРОЧНОСТИ[1]

***Пряхина О. Д.*[2], *Смирнова А. В.*[3]**

CONSTRUCTION OF DETERMINANTS OF GREEN'S MATRIX-SYMBOLS FOR MULTILAYERED MEDIA WITH DEFECTS ON THE BASIS OF THE THEORY OF VIBRATION STRENGTH "VIRUSES"

Pryakhina O. D., Smirnova A. V.

The work describes an effective method for constructing elements and determinants of matrix-symbols of the kernels of combined integral equations for layered media with defects. The method is based on the theory of vibration strength "viruses".

Динамические задачи о колебаниях полуограниченных сред, содержащих совокупность неоднородностей различной природы, несмотря на значительное количество работ посвященных их решению, продолжают привлекать внимание исследователей. Это обусловлено как широким спектром приложения этих задач в сейсмологии, геофизике, акустоэлектронике, дефектоскопии, машиностроении, материаловедении и т. д., так и наличием большого числа фундаментальных теоретических проблем, требующих своего решения. Это проблемы построения систем интегральных уравнений (СИУ) рассматриваемого класса задач и вопросы корректной их разрешимости. Кроме того, зависимость напряженно-деформированного состояния механических систем подобного рода от многих параметров делает традиционные аналитические и численные методы анализа неэффективными даже при небольшом количестве дефектов, а с ростом частоты колебаний и в областях больших размеров многие из них неприменимы. В связи с этим актуальными являются как исследования подобного рода задач в новой постановке, так и разработка новых численно-аналитических методов их решения. Особенно важным является создание методов, направленных на изучение резонансных свойств механических систем.

Огромный вклад, обеспечивший приоритет отечественной науки в решении перечисленных проблем и ряда других, выходящих за рамки обсуждаемой тематики, внес академик РАН В. А. Бабешко. О научных результатах, полученных Владимиром Андреевичем, можно говорить, по-праву используя эпитеты «впервые доказано», «принципиально новые», «не имеющие аналогов в мировой науке». К их числу относятся фундаментальные результаты по теоретическому обоснованию существования явления локализации волнового процесса, тесно связанного с явлением высокочастотного резонанса в полуограниченных телах с неоднородностями, обнаружение которого признано научным открытием [1]; создание методов фиктивного поглощения, обобщенной факторизации решения систем интегральных уравнений большой размерности в произвольных областях, создание метода двухсторонней факторизации, открывающего возможность эффективного исследования динамических процессов в механических системах, состоящих из взаимодействующих деформируемых тел, как полуограниченных, так и конечных размеров; создание теории «вирусов» вибропрочности, направленной на выявление объектов, находящихся в деформируемой среде в условиях вибрации, способных локализовать волновой про-

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (05-01-00811, 06-01-96600, 06-01-96638, 06-01-96639, 06-01-96632, 06-08-00671, 06-01-08017-офи), гранта президента РФ (НШ-4839.2006.1).

[2]Пряхина Ольга Донатовна, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующая кафедрой высоких технологий прогноза и предупреждения чрезвычайных ситуаций Кубанского государственного университета.

[3]Смирнова Алла Васильевна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высоких технологий прогноза и предупреждения чрезвычайных ситуаций Кубанского государственного университета.

цесс и вызвать резонансы, и многие другие научные достижения [2–14].

В настоящей работе рассматривается совокупность неоднородностей (дефектов) типа жестких включений и трещин, расположенных в плоскостях, параллельных границам раздела слоев, в многослойной полуограниченной среде.

Подход, основанный на положениях теории «вирусов» вибропрочности, позволил провести изучение динамики сред, содержащих неоднородности различной природы, с единой позиции и при этом избежать возрастающей с ростом количества дефектов громоздкости в описании и исследовании краевых задач, а также значительно упростить поиск условий возникновения экстремальных состояний механической системы. Другим преимуществом данного подхода является возможность исследования динамики сред с произвольным количеством слоев и с учетом большого спектра физических явлений, протекающих в неоднородных телах в условиях связанности полей.

1. Пакет слоев с дефектами различных типов

Перемещения $\mathbf{w}(x,y,z) = \{w_1, w_2, w_3\}$ точек пакета N упругих слоев, занимающего объем $(-\infty < x, y < +\infty;\ -H \leqslant z \leqslant 0)$, вызванные вибрацией границ жестких включений и берегов трещин, расположенных в $\tilde{N}$ уровнях по глубине пакета $(\tilde{N} < N)$, описываются системой дифференциальных уравнений Ламе

$$(\lambda_k + \mu_k)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{w}_k + \\ + \mu_k \Delta \mathbf{w}_k + \rho_k \omega^2 \mathbf{w}_k = 0, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{w}_k(x,y,z) = \mathbf{w}(x,y,z),$$

$$-2\sum_{m=1}^{k} h_m \leqslant z \leqslant -2\sum_{m=1}^{k-1} h_m,$$

$$k = 1, 2, \ldots, N$$

со следующими граничными условиями (общий множитель $e^{-i\omega t}$ опущен):

а) на верхней грани

$$\mathbf{t}\,(x,y,z)|_{z=0} = 0, \quad -\infty < x, y < +\infty; \quad (1.2)$$

б) на границах раздела физико-механических свойств слоев, не содержащих дефектов

$$\begin{cases} \mathbf{w}_k^+ = \mathbf{w}_k^-, & -\infty < x, y < +\infty, \\ \mathbf{t}_k^+ = \mathbf{t}_k^-, & -\infty < x, y < +\infty, \end{cases} \quad (1.3)$$

$$z = z_k = -2\sum_{p=1}^{k} h_p, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1;$$

в) в плоскостях расположения включений

$$\begin{cases} \mathbf{w}_{p(k)}^+ = \mathbf{w}_{p(k)}^- = \mathbf{w}_{p(k)}^0, \\ \qquad\qquad (x,y) \in \Omega_{p(k)}, \\ \Delta \mathbf{t}_{p(k)} = 0, \quad (x,y) \notin \Omega_{p(k)}, \end{cases} \quad (1.4)$$

$$z = \tilde{z}_k = -2\sum_{p=1}^{p(k)} h_p, \quad k = 1, 2, \ldots, N_1;$$

г) в плоскостях, содержащих трещины

$$\begin{cases} \mathbf{t}_{m(k)}^+ = \mathbf{t}_{m(k)}^- = \mathbf{t}_{m(k)}^0, \\ \qquad\qquad (x,y) \in \tilde{\Omega}_{m(k)}, \\ \Delta \mathbf{w}_{m(k)} = 0, \quad (x,y) \notin \tilde{\Omega}_{m(k)}, \end{cases} \quad (1.5)$$

$$z = \tilde{z}_k = -2\sum_{m=1}^{m(k)} h_m, \quad k = 1, 2, \ldots, N_2;$$

д) на нижней грани пакета

$$\mathbf{w}\,(x,y,-H) = 0, \quad -\infty < x, y < +\infty. \quad (1.6)$$

Здесь

$$\mathbf{w}_k^{\pm} = \mathbf{w}(x,y,z)|_{z=z_k \pm 0}\,,$$

$$\mathbf{t}_k^{\pm} = \mathbf{t}(x,y,z)|_{z=z_k \pm 0}$$

— векторы перемещений и напряжений на верхней $(+)$ и нижней $(-)$ границах раздела слоев; $\mathbf{w}_{p(k)}^{\pm}$, $\mathbf{t}_{p(k)}^{\pm}$ — векторы перемещений и напряжений на границах включения, занимающего область $\Omega_{p(k)}$ в плоскости $z = \tilde{z}_k$, $\Delta \mathbf{t}_{p(k)} = \mathbf{t}_{p(k)}^+ - \mathbf{t}_{p(k)}^-$, $p(k)$ — номер границы раздела слоев, где расположено k-ое включение $(k = 1, 2, \ldots, N_1)$; $\mathbf{w}_{m(k)}^{\pm}$, $\mathbf{t}_{m(k)}^{\pm}$ — векторы перемещений и напряжений на берегах трещины, занимающей область $\tilde{\Omega}_{m(k)}$ в плоскости $z = \tilde{z}_k$, $\Delta \mathbf{w}_{m(k)} = \mathbf{w}_{m(k)}^+ - \mathbf{w}_{m(k)}^-$, $m(k)$ — номер границы раздела слоев, содержащей k-тую трещину $(k = 1, 2, \ldots, N_2)$; $N_1 + N_2 = \tilde{N}$ в предположении, что $p \neq m$.

Краевая задача (1.1)–(1.6) сводится к решению СИУ

$$\int_{\delta_1}\int_{\delta_2} \mathbf{K}\,(\alpha,\beta,\omega)\,\mathbf{Q}\,(\alpha,\beta) \times \\ \times e^{-i(\alpha x + \beta y)}\,d\alpha\,d\beta = \mathbf{u}(x,y), \quad (1.7)$$

$$(x,y) \in \mathbf{\Omega},$$

где

$$\mathbf{u}(x,y) = \{\mathbf{w}^0_{p(1)}, \mathbf{w}^0_{p(2)}, \ldots, \mathbf{w}^0_{p(N_1)}, \mathbf{t}^0_{m(1)}, \mathbf{t}^0_{m(2)}, \ldots, \mathbf{t}^0_{m(N_2)}\}$$

— многомерный вектор, компонентами которого являются векторы перемещений и напряжений, заданные на границах включений и берегах трещин соответственно,

$$\mathbf{Q} = \{\boldsymbol{\eta}_{p(1)}, \ldots, \boldsymbol{\eta}_{p(N_1)}, \mathbf{f}_{m(1)}, \ldots, \mathbf{f}_{m(N_2)}\}$$

— многомерный вектор, имеющий своими компонентами трансформанты Фурье $\boldsymbol{\eta}_{p(k)}$ скачков векторов напряжений $\Delta\mathbf{t}_{p(k)}(x,y)$ на границах включений и $\mathbf{f}_{m(k)}$ — скачков векторов перемещений $\Delta\mathbf{w}_{m(k)}(x,y)$ на берегах трещин. Носителем каждой из вектор-функций $\Delta\mathbf{t}_{p(k)}(x,y)$, $\Delta\mathbf{w}_{m(k)}(x,y)$ является соответствующая область из $\boldsymbol{\Omega}$,

$$\boldsymbol{\Omega} = \{\Omega_{p(1)}, \Omega_{p(2)}, \ldots, \Omega_{p(N_1)}, \tilde{\Omega}_{m(1)}, \tilde{\Omega}_{m(2)}, \ldots, \tilde{\Omega}_{m(N_2)}\}.$$

Так как дефекты расположены в разных плоскостях, то матрица-символ ядра $\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)$ СИУ (1.7), в отличие от СИУ традиционных контактных задач, является блочной

$$\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega) = \|\mathbf{K}_{ij}\|_{i,j=1}^{\tilde{N}}.$$

Для упругих изотропных сред

$$\mathbf{K}_{ij}(\alpha,\beta) = \left\|K^{ij}_{mn}(\alpha,\beta)\right\|^3_{m,n=1},$$

$\mathbf{K}_{ij}$ — эрмитовы матрицы, элементы которых K^{ij}_{mn} имеют структуру, присущую элементам матриц-символов Грина упругих полуограниченных сред без дефектов

$$K^{ij}_{11} = \frac{\alpha^2}{\lambda^2\Delta_{2N}(\lambda)}k^{ij}_{11}(\lambda) + \frac{\beta^2}{\lambda^2\Delta_{1N}(\lambda)}\tilde{k}^{ij}_{11}(\lambda), \quad (1.8)$$

$$K^{ij}_{22} = \frac{\beta^2}{\lambda^2\Delta_{2N}(\lambda)}k^{ij}_{11}(\lambda) + \frac{\alpha^2}{\lambda^2\Delta_{1N}(\lambda)}\tilde{k}^{ij}_{11}(\lambda),$$

$$K^{ij}_{33} = \frac{k^{ij}_{22}(\lambda)}{\Delta_{2N}(\lambda)},$$

$$K^{ij}_{12} = K^{ij}_{21} = \frac{\alpha\beta}{\lambda^2}\left(\frac{1}{\Delta_{2N}(\lambda)}k^{ij}_{11}(\lambda) - \frac{1}{\Delta_{1N}(\lambda)}\tilde{k}^{ij}_{11}(\lambda)\right),$$

$$K^{ij}_{13} = -K^{ij}_{31} = i\alpha\frac{k^{ij}_{12}(\lambda)}{\Delta_{2N}(\lambda)},$$

$$K^{ij}_{23} = -K^{ij}_{32} = i\beta\frac{k^{ij}_{12}(\lambda)}{\Delta_{2N}(\lambda)}, \quad \lambda^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Вид функций k^{ij}_{11}, $\tilde{k}^{ij}_{11}$, k^{ij}_{12}, k^{ij}_{22}, Δ_{1N}, Δ_{2N} определяется конкретной моделью среды [15–21].

Введем матрицы, характеризующие положение в среде включений

$$\mathbf{G}_{Np} = \left[\mathbf{K}^-_p(h_1,h_2,\ldots,h_p)\right]^{-1} - \left[\mathbf{K}_{N-p}(h_{p+1},h_{p+2},\ldots,h_N)\right]^{-1} \quad (1.9)$$

и трещин

$$\mathbf{S}_{Nm} = \mathbf{K}^-_m(h_1,h_2,\ldots,h_m) - \mathbf{K}_{N-m}(h_{m+1},h_{m+2},\ldots,h_N). \quad (1.10)$$

Здесь $\mathbf{K}^-_n$ — матрица Грина пакета n слоев со свободной верхней гранью, $\mathbf{K}_{N-n}$ — матрица Грина пакета $(N-n)$ слоев на жестком основании, n принимает значения $p(k)$ или $m(k)$. В этих обозначениях матрицы $\mathbf{K}_{ij}$, являющиеся элементами матрицы $\mathbf{K}$ — символа ядра СИУ (1.7), построены в виде

$$\mathbf{K}_{ii} = \begin{cases} \mathbf{G}^{-1}_{Np(i)}, & i \leqslant N_1, \\ \mathbf{S}^{-1}_{Nm(i-N_1)}, & N_1 < i \leqslant \tilde{N}, \end{cases} \quad (1.11)$$

для $i \neq j$

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{cases} \mathbf{V}_{p(i)p(j)}, & i \leqslant N_1, j \leqslant N_1, \\ \mathbf{M}_{p(i)m(j-N_1)}, & i \leqslant N_1, j > N_1, \\ \mathbf{L}_{m(i-N_1)p(j)}, & i > N_1, j \leqslant N_1, \\ \mathbf{D}_{m(i-N_1)m(j-N_1)}, & i > N_1, j > N_1. \end{cases}$$

Матрицы $\mathbf{L}_{ij}$, $\mathbf{V}_{ij}$ и $\mathbf{D}_{ij}$, $\mathbf{M}_{ij}$ определяются из соотношений

$$\mathbf{L}_{p(i)p(j)} = \begin{cases} \mathbf{R}^-_{p(i)p(j)}(\mathbf{K}^-_{p(j)})^{-1}\mathbf{G}^{-1}_{Np(j)}, \\ \qquad p(i) < p(j), \\ \mathbf{R}_{p(i)p(j)}\mathbf{K}^{-1}_{N-p(j)}\mathbf{G}^{-1}_{Np(j)}, \\ \qquad p(i) > p(j), \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\mathbf{V}_{p(i)p(j)} = \begin{cases} \mathbf{K}^-_{p(i)}\mathbf{L}_{p(i)p(j)}, \\ \qquad p(i) < p(j), \\ \mathbf{K}_{N-p(i)}\mathbf{L}_{p(i)p(j)}, \\ \qquad p(i) > p(j), \end{cases} \quad (1.13)$$

$$\mathbf{D}_{m(i)m(j)} = \begin{cases} \mathbf{R}^{-}_{m(i)m(j)}\mathbf{S}^{-1}_{Nm(j)}, \\ \qquad m\,(i) < m\,(j)\,, \\ \mathbf{R}_{m(i)m(j)}\mathbf{S}^{-1}_{Nm(j)}, \\ \qquad m\,(i) > m\,(j)\,, \end{cases} \tag{1.14}$$

$$\mathbf{M}_{m(i)m(j)} = \begin{cases} \mathbf{K}^{-}_{m(i)}\mathbf{D}_{m(i)m(j)}, \\ \qquad m\,(i) < m\,(j)\,, \\ \mathbf{K}_{N-m(i)}\mathbf{D}_{m(i)m(j)}, \\ \qquad m\,(i) > m\,(j)\,, \end{cases} \tag{1.15}$$

а матрицы $\mathbf{R}_{km}$ и $\mathbf{R}^{-}_{km}$ даются формулами

$$\mathbf{R}_{km} = (-1)^{(k-m)} \prod_{i=k}^{m+1} \mathbf{F}^{-1}_{N+1-i}\,(h_i)\,\mathbf{B}_{+}\,(-h_i),$$

$$\mathbf{R}^{-}_{km} = \prod_{i=k+1}^{m} \mathbf{\Phi}^{-1}_{i}\,(h_1, h_2, \ldots, h_i)\,\mathbf{B}_{-}\,(h_i).$$

Рекуррентная процедура вычисления матриц $\mathbf{K}^{-}_{m}\,(h_1, h_2, \ldots, h_m)$, $\mathbf{K}_{N-m}\,(h_{m+1}, h_{m+2}, \ldots, h_N)$, $\mathbf{\Phi}_m\,(h_1, h_2, \ldots, h_m)$, $\mathbf{F}_{N-m}\,(h_{m+1}, h_{m+2}, \ldots, h_N)$ приведена в [16]. Вспомогательные матрицы $\mathbf{B}_{\pm}$ даются в [15, 21].

Элементы всех введенных матриц имеют структуру (1.8) и зависят от параметров преобразования Фурье α, β, частоты гармонических колебаний ω, а также физико-механических параметров (плотности ρ_k, модуля сдвига μ_k, коэффициента Пуассона ν_k) слоев, полутолщины h_k которых указаны в качестве аргументов, $k = 1, 2, \ldots, N$. Размеры и относительное расположение областей $\Omega_{p(k)}$, $\tilde{\Omega}_{m(k)}$ также являются параметрами задачи.

Представления (1.11)–(1.15), полученные в виде произведения матриц, допускают простую интерпретацию результатов и удобны для проведения дальнейшего анализа элементов и определителя блочной матрицы-символа ядра СИУ.

Установлено, что диагональные элементы символа ядра $\mathbf{K}$ в (1.7) — матрицы $\mathbf{G}^{-1}_{Np}\,(\alpha, \beta) = \left\| G^{Np}_{ij} \right\|^{3}_{i,j=1}$ и $\mathbf{S}^{-1}_{Nm}\,(\alpha, \beta) = \left\| S^{Nm}_{ij} \right\|^{3}_{i,j=1}$ обладают следующими свойствами:

1) $g_{Np}\,(\lambda, \omega) = \det \mathbf{G}^{-1}_{Np}\,(\alpha, \beta)$, $s_{Nm}\,(\lambda, \omega) = \det \mathbf{S}^{-1}_{Nm}\,(\alpha, \beta)$ являются мероморфными функциями параметра λ и допускают представление

$$g_{Np}\,(\lambda, \omega) = \prod_{k=1}^{2} \frac{D_{\text{вк}}(k, p, N)}{\Delta_{kN}\,(h_1, \ldots h_N)},$$

$$D_{\text{вк}}(k, p, N) = \Delta_{kp}\,(h_1, h_2, \ldots, h_p) \times \\ \times D_{k(N-p)}\,(h_{p+1}, h_{p+2}, \ldots, h_N)\,,$$

$$s_{Nm}\,(\lambda, \omega) = \prod_{k=1}^{2} \frac{D_{\text{тр}}(k, m, N)}{\Delta_{kN}\,(h_1, \ldots h_N)},$$

$$D_{\text{тр}}(k, m, N) = D^{-}_{km}\,(h_1, h_2, \ldots, h_m) \times \\ \times \Delta_{k(N-m)}\,(h_{m+1}, h_{m+2}, \ldots, h_N)\,,$$

где Δ_{kp} — знаменатель, а D_{kp} — числитель определителя матрицы-символа Грина пакета p-слоев на жестком основании; D^{-}_{km} — знаменатель определителя матрицы-символа Грина пакета m-слоев со свободной верхней гранью ($k = 1$ отвечает антиплоской задаче, а $k = 2$ — плоской).

2) Функции $g_{Np}\,(\lambda, \omega)$, $s_{Nm}\,(\lambda, \omega)$ могут иметь конечное число вещественных нулей и полюсов, остальные — комплексные с точкой сгущения на бесконечности; $g_{Np}\,(\lambda, \omega)$, $s_{Nm}\,(\lambda, \omega) \neq 0$ для $\alpha \in \delta_1$, $\beta \in \delta_2$.

3) Функции $G^{Np}_{i3}\,(\alpha, \beta)$, $S^{Nm}_{i3}\,(\alpha, \beta)$ и $G^{Np}_{3i}\,(\alpha, \beta)$, $S^{Nm}_{3i}\,(\alpha, \beta)$, $i = 1, 2$ являются нечетными, остальные — четными. Элементы $G^{Np}_{ij}\,(\alpha, \beta)$, $S^{Nm}_{ij}\,(\alpha, \beta)$ обладают асимптотикой вида

$$G^{Np}_{ij}\,(\alpha, \beta) = \lambda^{-1} C^{Np}_{ij}\,(\varphi)\left[1 + O\left(\lambda^{-\varepsilon}\right)\right],$$

$$S^{Nm}_{ij}\,(\alpha, \beta) = \lambda C^{Nm}_{ij}\,(\varphi)\left[1 + O\left(\lambda^{-\varepsilon}\right)\right], \quad \varepsilon > 0,$$

$$\alpha = \lambda \cos\varphi, \quad \beta = \lambda \sin\varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Коэффициенты $C^{Np}_{ij}(\varphi)$, $C^{Nm}_{ij}(\varphi)$ асимптотического разложения зависят от физико-механических параметров только тех слоев, на стыке которых расположен дефект, и совпадают с коэффициентами асимптотического разложения символа ядра СИУ для двухмодульного пространства с дефектом соответствующего типа (включением или трещиной) на границе раздела полупространств [21].

Матрицы-функции $\mathbf{K}_{lm}\,(\alpha, \beta)$ $(l \neq m)$ при $|\lambda| \to \infty$ являются экспоненциально убывающими.

Определитель матрицы-символа СИУ (1.7) равен

а) при наличии в среде только включений ($N_2 = 0$)

$$\det \mathbf{K}\,(\alpha, \beta, \omega) = \det \mathbf{G}^{-1}_{Np(\tilde{N})} \times \\ \times \prod_{k=\tilde{N}-1}^{1} \det \mathbf{G}^{-1}_{p(k+1)p(k)}; \tag{1.16}$$

б) при наличии только трещин ($N_1 = 0$)

$$\det \mathbf{K}(\alpha, \beta, \omega) = \det \mathbf{S}^{-1}_{Nm(1)} \times \\ \times \prod_{k=1}^{\tilde{N}-1} \det \mathbf{S}^{-1}_{(N-m(k))(m(k+1)-m(k))}. \quad (1.17)$$

Заметим, что матрицы $\mathbf{L}_{ij}$ и $\mathbf{D}_{ij}$ в (1.12), (1.14) определяют напряжения, а матрицы $\mathbf{V}_{ij}$ и $\mathbf{M}_{ij}$ в (1.13), (1.15) — перемещения в плоскости $\tilde{z}_i$, вызванные соответственно скачками напряжений и перемещений на границах дефекта, расположенного в плоскости $\tilde{z}_j$.

Соотношения (1.11)–(1.15) позволяют исследовать динамические процессы в полуограниченных слоистых средах при произвольном количестве и расположении в них дефектов различного типа. При этом построение СИУ не требует решения краевых задач при изменении количества или расположения дефектов. Если включение или трещина находится внутри какого-либо слоя, следует ввести условную границу раздела и параметры прилегающих к ней слоев положить равными. Для однородной среды, содержащей многоуровневые дефекты, равными принимаются физико-механические параметры всех слоев.

Важно отметить, что матричные равенства (1.11)–(1.17) сохраняются и для общего случая термоэлектроупругих сред. При этом размерность многомерных векторов и блочной матрицы-символа ядра в (1.7) не изменяется, а размерность ее элементов и матриц, их формирующих, становится равной 5×5.

2. Метод вычисления определителя матрицы-символа СИУ для упругих изотропных сред с неоднородностями различной природы

Важным для определения особых, в том числе резонансных, режимов колебаний является построение определителя СИУ (1.7) и поиск его нулей. В основу разработанного метода вычисления определителей положена созданная академиком РАН В. А. Бабешко теория «вирусов» вибропрочности, определившая принципиально новую стратегию изучения сред с дефектами [5–7]. Приведем необходимые для дальнейшего изложения определения.

Определение. [7]. Вирус, состоящий из L параллельных включений в упругом пространстве, будем называть вирусом класса 1 и L-уровневым, вида S, и обозначать $V(1/h_{11}; S_{11}/\ldots/h_{1L}; S_{1L})$

Аналогично, вирус, состоящий из L параллельных трещин в упругом пространстве, будем называть вирусом класса 2 и L уровневым, вида S, и обозначать $V(1/h_{21}; S_{21}/\ldots/h_{2L}; S_{2L})$.

Здесь h_{1l} — координата плоского сечения, содержащего жесткие включения с носителем S_{1l}, h_{2l} — координата плоского сечения, содержащего трещины с носителем S_{2l}.

Вирус, состоящий из L параллельных включений и M параллельных трещин в упругом пространстве, будем называть смешанным вирусом класса (1, 2) и K ($K \leqslant L + M$) уровневым, вида S, и обозначать

$$V(1/h_{11}; S_{11}/\ldots/h_{1L}; S_{1L}//2/h_{21}; S_{21}/\ldots \\ /h_{2M}; S_{2M}).$$

Если некоторая область S_{kl} является неограниченной плоскостью, то в обозначении вируса ставится знак ∞. Если $h_{kl} = 0$, то в обозначение вируса вносится непосредственно нуль. Так, слой, взаимодействующий на поверхности ($z = 0$) с жестко сцепленным штампом и жестко сцепленный с недеформируемым основанием — это двухуровневый «вирус»

$$V(1/0; S_{11}/h_{22}; \infty//2/0; S_{21}).$$

Анализ краевых условий (1.2)–(1.6) позволяет заметить некоторую идентичность их формулировки для различных объектов. Так, для включений в областях $\Omega_{p(k)}$ задаются механические граничные условия, свойственные контакту штампа со средой. Условие (1.2) по постановке эквивалентно трещине, вышедшей на поверхность $z = 0$. Условие жесткого сцепления с недеформируемым основанием (1.6) идентично наличию включения, занимающего всю плоскость $z = -H$. Этот факт впервые в мировой практике нашел отражение в работах В. А. Бабешко [5–7]. Границы раздела физико-механических параметров среды можно формально трактовать, например, как занимающие всю плоскость трещины с равными нулю скачками перемещений.

Известно, что от геометрии областей $\Omega_{p(k)}$ и $\tilde{\Omega}_{m(k)}$ не зависит вид элементов матрицы-символа в системе (1.7), уравнения которой формируются в плоскостях нарушения сплошности, а наличие границ раздела физико-механических свойств среды не влияет на размерность системы интегральных уравнений. С учетом этого, а также с целью сокращения записи, пакет N слоев с жестко защемленной нижней и свободной от напряжений верхней гранями, и содержащий, например, многоуровневую систему включений представим

как «вирус», имеющий структуру:

$$V_N\left(1/-2\sum_{p=1}^{p(1)}h_p;\infty/\ldots/-2\sum_{p=1}^{p(N_1)}h_p;\infty \right.$$
$$\left. /-2\sum_{k=1}^{N}h_k;\infty//2/0;\infty\right).$$

Деформируемая среда делится плоскостями, содержащими дефекты, на части, состоящие из некоторого количества k слоев. Несмотря на многообразие вариантов распределения по уровням включений и трещин, каждая из этих частей на верхней и нижней гранях имеет одно из четырех возможных сочетаний дефектов: 1) «включение» – «включение», 2) «трещина» – «трещина», 3) «трещина» – «включение», 4) «включение» – «трещина».

В зависимости от варианта сочетания дефектов, выделенные части представляют собой «вирусы», структура которых имеет одно из следующих представлений:

$$1)\ \ V_k\left(1/-2\sum_{n=1}^{l}h_n;\infty/-2\sum_{n=1}^{l+k}h_n;\infty\right),\quad (2.1)$$

$$2)\ V_k\left(2/-2\sum_{n=1}^{l}h_n;\infty/-2\sum_{n=1}^{l+k}h_n;\infty\right),$$
$$3)\ V_k\left(1/-2\sum_{n=1}^{l+k}h_n;\infty//2/-2\sum_{n=1}^{l}h_n;\infty/\right),$$
$$4)\ V_k\left(1/-2\sum_{n=1}^{l}h_n;\infty//2/-2\sum_{n=1}^{l+k}h_n;\infty\right).$$

В (2.1) l принимает одно из значений 0, $p\,(i)$, $(i=1,2,\ldots,N_1)$, $m\,(j)$, $(j=1,2,\ldots,N_2)$, упорядоченных по возрастанию.

Между «вирусами» указанных типов, которые для большей наглядности запишем в локальных системах координат [18], и функциями, формирующими искомый определитель СИУ, установлено взаимнооднозначное соответствие:

$$1)\ \ V_k(1/h_{l+1};\infty/-h_{l+k};\infty)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow D_k(h_{l+1},h_{l+2},\ldots,h_{l+k}),\quad (2.2)$$

$$2)\ \ V_k\,(2/h_{l+1};\infty/-h_{l+k};\infty)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow D_k^-\,(h_{l+1},h_{l+2},\ldots,h_{l+k})\,,$$

$$3)\ \ V_k\,(1/-h_{l+k};\infty//2/h_l;\infty/)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \Delta_k\,(h_{l+1},h_{l+2},\ldots,h_{l+k})\,,$$

$$4)\ \ V_k\,(1/h_l;\infty//2/-h_{l+k};\infty)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \Delta_k\,(h_{l+k},h_{l+k-1},\ldots,h_{l+1})\,.$$

Здесь

$$D_k^-=\prod_{n=1}^{2}D_{nk}^-,\quad D_k=\prod_{n=1}^{2}D_{nk},$$
$$\Delta_k=\prod_{n=1}^{2}\Delta_{nk}.\quad (2.3)$$

Используя выявленное соответствие, можно записать определители матриц-символов ядер СИУ, отвечающих произвольной последовательности расположения трещин и включений в слоистой среде, руководствуясь следующими правилами:

1) при наличии плоскостей, содержащих включения или трещины, и не совпадающих с фактическими границами раздела физико-механических свойств среды, вводятся условные границы и производится нумерация всех слоев;

2) для объемов, заключенных между плоскостями, содержащими дефекты, а также между верхней (нижней) гранью пакета и ближайшей указанной плоскостью, определяется структура «вируса» вибропрочности и его параметры (значения k и l в (2.1)). В соответствии с (2.2) с каждым «вирусом» связывается определенная функция;

3) искомый определитель (с точностью до знака) равен отношению произведения выбранных функций к знаменателю матрицы-символа Грина пакета N слоев без дефектов.

Предложенный метод дает четкое представление о структуре особых множеств определителя СИУ для слоистых сред с неоднородностями различной природы. Из полученных результатов следует, что корневое множество определителя матрицы-символа СИУ при произвольном количестве и расположении дефектов описывается произведением функций, каждая из которых зависит от геометрических и физико-механических параметров только тех частей объема, которые образованы в пакете слоев плоскостями, содержащими дефекты. Полярное множество определяется моделью среды без учета неоднородностей.

Как известно, особые множества элементов и определителя матрицы-символа СИУ характеризуют волноводные свойства механической системы, а для возникновения высокочастотных резонансов необходимо выполнение условия [7]

$\mathbf{Q}_0(\alpha,\beta)=0$ при $\lambda=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\xi_k$, где $\xi_k(\alpha,\beta)$ $(k=1,2,\ldots,m)$ — одномерное корневое множество $\det\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)$, $\mathbf{Q}_0(\alpha,\beta)$ — многомерная вектор-функция, являющаяся решением СИУ, получающейся из (1.7) заменой матрицы-символа ядра $\mathbf{K}(\alpha,\beta,\omega)$ на $\mathbf{K}_0(\alpha,\beta,\omega)$ на основании представления $\mathbf{K}=\mathbf{K}_0\mathbf{K}_*$. $\mathbf{K}_0$ — матрица, сохраняющая асимптотическое поведение $\mathbf{K}$ на бесконечности и не имеющая особенностей на вещественной оси $\operatorname{Im}\lambda=0$.

Эффективность подхода, основанного на теории «вирусов» вибропрочности, заключается также и в том, что исследование волноводных свойств, управление ими и проектирование систем с заданными спектральными характеристиками на основе подбора геометрических и механических параметров можно проводить, минуя трудоемкую часть решения краевых задач и построения СИУ.

3. Примеры

В качестве примеров использования полученных соотношений выпишем элементы и $\det\mathbf{K}$ СИУ (1.7), соответствующие нескольким случаям расположения дефектов в трехслойном пакете со свободной от напряжений верхней гранью и жестко защемленной нижней.

1^0. *Два включения в трехслойном пакете.* Предположим, что включения расположены на каждой границе раздела слоев. Тогда $N_2=0$ $\tilde{N}=N_1=2$, $p(1)=1$, $p(2)=2$ и элементы блочной матрицы-символа СИУ (1.7) принимают вид

$$\mathbf{K}_{11}=\mathbf{G}_{31}^{-1},\quad \mathbf{K}_{22}=\mathbf{G}_{32}^{-1},$$

$$\mathbf{K}_{12}=\mathbf{V}_{12}=\mathbf{K}_1^-(h_1)\,\mathbf{R}_{12}^-\left[\mathbf{K}_2^-(h_1,h_2)\right]^{-1}\mathbf{G}_{32}^{-1},$$

$$\mathbf{K}_{21}=\mathbf{V}_{21}=\mathbf{K}_1(h_3)\,\mathbf{R}_{21}\left[\mathbf{K}_2(h_2,h_3)\right]^{-1}\mathbf{G}_{31}^{-1}.$$

Определим принадлежность объемов, заключенных между плоскостями $z=0$ и $z=-2h_1$, $z=-2h_1$ и $z=-2(h_1+h_2)$, $z=-2(h_1+h_2)$ и $z=-2(h_1+h_2+h_3)$, к одному из типов (2.1) и выпишем соответствующие им согласно (2.2) функции

$$V_1(1/-h_1;\infty//2/h_1;\infty)\Leftrightarrow\Delta_1(h_1),$$

$$V_1(1/h_2;\infty/-h_2;\infty)\Leftrightarrow D_1(h_2),$$

$$V_1(1/h_3;\infty/-h_3;\infty)\Leftrightarrow D_1(h_3).$$

Определитель матрицы-символа СИУ в этом случае вычисляется по формуле

$$\det\mathbf{K}=K(\lambda,\omega)=$$
$$=\prod_{m=1}^{2}\frac{\Delta_{m1}(h_1)\,D_{m1}(h_2)\,D_{m1}(h_3)}{\Delta_{m3}(h_1,h_2,h_3)},$$

или в силу (2.3)

$$\det\mathbf{K}=K(\lambda,\omega)=\frac{\Delta_1(h_1)\,D_1(h_2)\,D_1(h_3)}{\Delta_3(h_1,h_2,h_3)}.$$

Вид функций Δ_{m1}, D_{m1}, D_{m1}^-, а также рекуррентные формулы вычисления Δ_{m3} приведены в [20].

Функция $K(\lambda,\omega)$ является вещественной на вещественной оси $\operatorname{Im}\lambda=0$ и мероморфной в комплексной плоскости λ. В соответствии с известными свойствами функций Δ_{m1}, D_{m1} [20, 21] она не имеет вещественных нулей и полюсов в диапазоне частот $0<\omega<\omega_{\text{кр}}\neq 0$ запирания волноводных свойств слоя с включениями, что является основанием для поиска условий возникновения низкочастотных резонансов [15].

2^0. *Две трещины в трехслойном пакете.* Для двух трещин, расположенных на первой и второй границах раздела слоев, имеем $N_1=0$, $\tilde{N}=N_2=2$, $m(1)=1$, $m(2)=2$.

$$\mathbf{K}_{11}=\mathbf{S}_{31}^{-1}(\alpha,\beta,\omega),\quad \mathbf{K}_{22}=\mathbf{S}_{32}^{-1}(\alpha,\beta,\omega),$$

$$\mathbf{K}_{12}=\mathbf{D}_{12}=\mathbf{R}_{12}^-\mathbf{S}_{32}^{-1},\quad \mathbf{K}_{21}=\mathbf{D}_{21}=\mathbf{R}_{21}\mathbf{S}_{31}^{-1}.$$

Плоскостями $\tilde{z}_1=-2h_1$ и $\tilde{z}_2=-2(h_1+h_2)$ пакет делится на три части, каждой из которых соответствует определенная в (2.2) функция

$$V_1(2/h_1;\infty/-h_1;\infty)\Leftrightarrow D_1^-(h_1),$$

$$V_1(2/h_2;\infty/-h_2;\infty)\Leftrightarrow D_1^-(h_2),$$

$$V_1(1/-h_3;\infty//2/h_3;\infty)\Leftrightarrow\Delta_1(h_3).$$

С учетом этого

$$\det\mathbf{K}=\frac{D_1^-(h_1)\,D_1^-(h_2)\,\Delta_1(h_3)}{\Delta_3(h_1,h_2,h_3)}.$$

Для данной механической системы $\omega_{\text{кр}}=0$ за счет функций D_1^-.

3^0. *Включение и трещина в трехслойном пакете.*

3.1. Пусть включение расположено на границе между первым и вторым слоем, а трещина — между вторым и третьим. Тогда $N_1=1$, $p(1)=1$, $N_2=1$, $m(1)=2$,

$$\mathbf{K}_{11}=\mathbf{G}_{31}^{-1}(\alpha,\beta,\omega),\quad \mathbf{K}_{22}=\mathbf{S}_{32}^{-1}(\alpha,\beta,\omega),$$

$$\mathbf{K}_{12}=\mathbf{M}_{12}=\mathbf{K}_1^-(h_1)\,\mathbf{R}_{12}^-\mathbf{S}_{32}^{-1},$$

$$\mathbf{K}_{21} = \mathbf{L}_{21} = \mathbf{R}_{21} \left[\mathbf{K}_2 \left(h_2, h_3\right)\right]^{-1} \mathbf{G}_{31}^{-1}.$$

Используя (2.1), (2.2) запишем

$$V_1 \left(1/-h_1; \infty//2/h_1; \infty\right) \Leftrightarrow \Delta_1 \left(h_1\right),$$

$$V_1 \left(1/h_2; \infty//2/-h_2; \infty\right) \Leftrightarrow \Delta_1 \left(h_2\right),$$

$$V_1 \left(1/-h_3; \infty//2/h_3; \infty\right) \Leftrightarrow \Delta_1 \left(h_3\right).$$

Для вычисления определителя получим формулу

$$\det \mathbf{K} = K\left(\lambda, \omega\right) = \frac{\Delta_1 \left(h_1\right) \Delta_1 \left(h_2\right) \Delta_1 \left(h_3\right)}{\Delta_3 \left(h_1, h_2, h_3\right)},$$

откуда следует, что $\omega_{\text{кр}} \neq 0$.

3.2. Если трещина расположена на границе между первым и вторым слоем, а включение — между вторым и третьим, то $p\left(1\right) = 2$, $m\left(1\right) = 1$,

$$\mathbf{K}_{11} = \mathbf{G}_{32}^{-1} \left(\alpha, \beta, \omega\right), \quad \mathbf{K}_{22} = \mathbf{S}_{31}^{-1} \left(\alpha, \beta, \omega\right),$$

$$\mathbf{K}_{12} = \mathbf{M}_{21} = \mathbf{K}_2 \left(h_2, h_3\right) \mathbf{R}_{21} \mathbf{S}_{31}^{-1},$$

$$\mathbf{K}_{21} = \mathbf{L}_{12} = \mathbf{R}_{12}^{-} \left[\mathbf{K}_2^{-} \left(h_1, h_2\right)\right]^{-1} \mathbf{G}_{32}^{-1}.$$

В соответствии с (2.1) и (2.2) имеем

$$V_1 \left(2/h_1; \infty/-h_1; \infty\right) \Leftrightarrow D_1^{-} \left(h_1\right),$$

$$V_1 \left(1/-h_2; \infty//2/h_2; \infty\right) \Leftrightarrow \Delta_1 \left(h_2\right),$$

$$V_1 \left(1/h_3; \infty/-h_3; \infty\right) \Leftrightarrow D_1 \left(h_3\right).$$

Определитель дается соотношением

$$\det \mathbf{K} = \frac{D_1^{-} \left(h_1\right) \Delta_1 \left(h_2\right) D_1 \left(h_3\right)}{\Delta_3 \left(h_1, h_2, h_3\right)}.$$

В этом случае, как и в п. 2^0, $\omega_{\text{кр}} = 0$ и низкочастотный резонанс в этой системе невозможен.

4^0. *Некоторые задачи для однородного слоя на жестком основании и однородного полупространства.*

4.1. *Включение в однородном слое со свободной от напряжений верхней гранью.* Для включения, расположенного на глубине $z = -2h_1$ в однородном слое толщины $H = 2\left(h_1 + h_2\right)$, следует положить $N_2 = 0$, $N_1 = 1$, $p\left(1\right) = 1$.

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{11} = \mathbf{G}_{21}^{-1}. \tag{3.1}$$

Исходя из (2.1), (2.2), имеем соответствие

$$V_1 \left(1/-h_1; \infty//2/h_1; \infty\right) \Leftrightarrow \Delta_1 \left(h_1\right),$$

$$V_1 \left(1/h_2; \infty/-h_2; \infty\right) \Leftrightarrow D_1 \left(h_2\right).$$

Следовательно, определитель равен

$$\det \mathbf{K} = \frac{\Delta_1 \left(h_1\right) D_1 \left(h_2\right)}{\Delta_1 \left(h_1 + h_2\right)}, \quad \omega_{\text{кр}} \neq 0.$$

Используя приведенные соотношения можно путем подбора глубины погружения включения $2h_1$ управлять динамическими свойствами механической системы.

На рис. 1, 2 для различных значений глубины залегания включения представлены кривые нулей (пунктирная линия) и полюсов (сплошная линия) элемента матрицы-символа $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{11}$

$$\frac{k_{11}^{11}}{\Delta_{22}} = \\ = \frac{k_{11}^{-} \left(h_1\right) D_{21} \left(h_2\right) + \Delta_{21} \left(h_1\right) k_{11}^{1} \left(h_2\right)}{\Delta_{21} \left(h_1 + h_2\right)}, \tag{3.2}$$

определяющего волновой спектр горизонтальной составляющей поля перемещений вне включения. Явный вид функций, входящих в (3.2) приведен в [21]. Толщина слоя, коэффициент Пуассона, плотность и модуль сдвига приняты равными $H = 2h_1 + 2h_2 = 1,5$, $\nu = 0,3$, $\rho = 1$, $\mu = 1$ (в безразмерных величинах). Отметим, что, например, для приведенной частоты колебаний $\omega = 3$ при $2h_1 = \frac{2}{3}H = 1$ (рис. 1) количество волн перемещений и их волновые числа совпадают с аналогичными характеристиками для поверхностных волн в однородном слое без включения. Если глубина погружения включения равна $2h_1 = \frac{1}{3}H = 0,5$ (рис. 2), то один из полюсов в (3.2) на той же частоте оказывается заблокированным. Таким образом, при фиксированном значении частоты, большем критического значения частоты запирания волновода, количество волн перемещения, распространяющихся от включения и уносящих энергию на бесконечность, уменьшается, что приводит к частичной локализации вибрационного процесса [5–7].

4.2. *Штамп, жестко сцепленный с поверхностью слоя.* Матрица-символ Грина СИУ известной контактной задачи получается из (3.1) как частный случай задачи для включения, вышедшего на поверхность слоя. В этом случае $N_2 = 0$, $\tilde{N} = N_1 = 1$, $p(1) = 0$,

$$\mathbf{G}_{10} = -\left[\mathbf{K}_1 \left(h\right)\right]^{-1}, \quad \Delta \mathbf{t}_0 = -\mathbf{t}_0^{-}.$$

С учетом знаков в последних соотношениях искомая матрица запишется $\mathbf{K} = \mathbf{K}_1 \left(h\right)$, $H = 2h$ — толщина слоя. Рассматриваемая механическая система представляет собой «вирус» $V_1 \left(1/h; \infty/-h; \infty\right)$, с которым в соответствии с (2.1), (2.2) связана функция $D_1 \left(h\right)$,

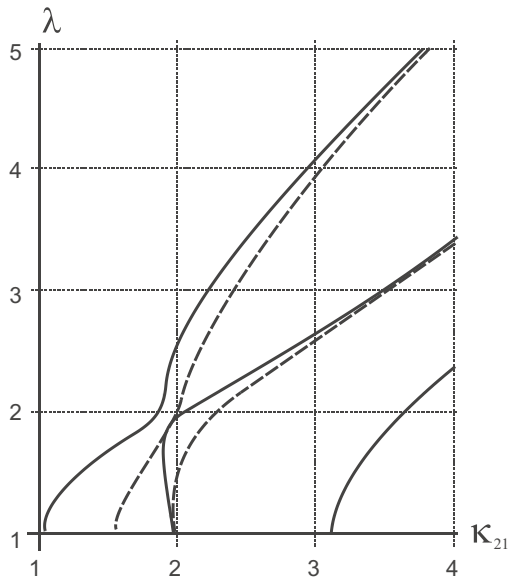

Рис. 1

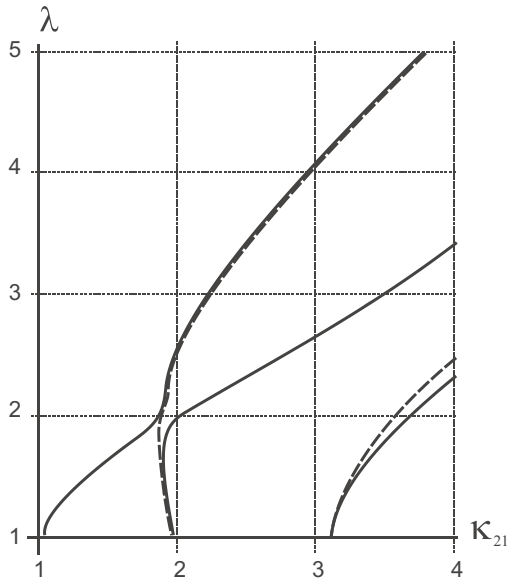

Рис. 2

формирующая $\det \mathbf{K}$, причем

$$\det \mathbf{K} = K(\lambda, \omega) = \frac{D_1(h)}{\Delta_1(h)}, \quad \omega_{\text{кр}} \neq 0.$$

4.3. *Штамп, жестко сцепленный с поверхностью слоя при наличии включения.* Если в условиях предыдущей задачи в слое на глубине $z = -2h_1$ имеется включение, то

$$V_1(1/h_1; \infty/-h_1; \infty) \Leftrightarrow D_1(h_1),$$

$$V_1(1/h_2; \infty/-h_2; \infty) \Leftrightarrow D_1(h_2),$$

$$\det \mathbf{K} = K(\lambda, \omega) = \frac{D_1(h_1) D_1(h_2)}{\Delta_1(h)}, \quad \omega_{\text{кр}} \neq 0.$$

4.4. *Штамп, жестко сцепленный с поверхностью слоя при наличии трещины.* Если в условиях задачи 4.2 в слое на глубине $z = -2h_1$ расположена трещина, то

$$V_1(1/h_1; \infty//2/-h_1; \infty) \Leftrightarrow \Delta_1(h_1),$$

$$V_1(1/-h_2; \infty//2/h_2; \infty) \Leftrightarrow \Delta_1(h_2),$$

$$h_1 + h_2 = h.$$

Тогда определитель представим в форме

$$\det \mathbf{K} = K(\lambda, \omega) = \frac{\Delta_1(h_1) \Delta_1(h_2)}{\Delta_1(h)}, \quad \omega_{\text{кр}} \neq 0. \tag{3.3}$$

В этом случае, аналогично п. 4.1, при определенных значениях h_1 некоторые нули функций $\Delta_1(h_1)$ могут совпадать с частью нулей функций $\Delta_1(h)$. Таким образом, одна из распространяющихся мод может оказаться заблокированной трещиной, расположенной на глубине $z = -\frac{1}{3}H$.

Полюса элементов матрицы $\mathbf{K}$ для этой задачи определяются функцией $\Delta_1(h_1 + h_2)$, а полюса элементов обратной матрицы — функциями $\Delta_1(h_1)$, $\Delta_1(h_2)$, что вытекает из (3.3).

4.5. *Штамп, жестко сцепленный с поверхностью полупространства при наличии трещины.*

$$V_1(1/h_1; \infty//2/-h_1; \infty) \Leftrightarrow \Delta_1(h_1),$$

$$V_1(2/-h_1; \infty) \Leftrightarrow \Delta_1^0(\lambda),$$

$$\det \mathbf{K} = K(\lambda, \omega) = \\ = \frac{\Delta_1(h_1) \Delta_1^0(\lambda)}{4\kappa_2^4 \sigma_1 \sigma_2 \Delta_1^0(\lambda)} e^{-2\sigma_1 h_1} \mathrm{e}^{-4\sigma_2 h_1} = \\ = \frac{e^{-2\sigma_1 h_1} \mathrm{e}^{-4\sigma_2 h_1}}{4\kappa_2^4 \sigma_1 \sigma_2} \Delta_1(h_1). \tag{3.4}$$

Заметим, что в данном случае $\det \mathbf{K}$ является аналитической функцией, не имеющей полюсов.

Элементы матрицы $\mathbf{K}$ в соответствии с (1.8) имеют в знаменателе функции $\Delta_{m1}^0(\lambda)$:

$$\Delta_{11}^0(\lambda) = \sigma_2, \quad \Delta_{21}^0(\lambda) = 4\left(\gamma^2 - \lambda^2 \sigma_1 \sigma_2\right),$$

$$\gamma = \lambda^2 - 0,5\kappa_2^2,$$

$$\sigma_1^2 = \lambda^2 - \kappa_1^2, \quad \sigma_2^2 = \lambda^2 - \kappa_2^2,$$

$$\kappa_2^2 = \frac{\rho}{\mu}\omega^2, \quad \kappa_1^2 = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\kappa_2^2.$$

Из (3.4) следует, что функция Рэлея однородного полупространства $\Delta_{21}^0(\lambda)$ войдет в знаменатель элементов обратной матрицы $\mathbf{K}^{-1}$. Таким образом, полюс Рэлея, не зависящий от глубины погружения трещины, ею не блокируется.

Численные расчеты, проведенные для различных моделей сред, показали, что все матрицы $\mathbf{K}_{ij}$, являющиеся элементами блочной матрицы-символа ядра СИУ (1.7) для сред с дефектами, как и матрицы-функции традиционных контактных задач, обладают следующим свойством — вещественные нули и полюса их диагональных элементов чередуются, а нули и полюса недиагональных элементов и определителей — нет.

Авторы благодарят академика РАН В. А. Бабешко за постановку, выбор методов исследования и обсуждение результатов, рассмотренных в данной работе задач.

Литература

1. *Бабешко В. А., Ворович И. И., Образцов И. Ф.* Явление высокочастотного резонанса в полуограниченных телах с неоднородностями // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. №3. С. 74–83.
2. *Бабешко В. А.* К расчету параметров высокочастотного резонанса в трехмерном случае // ДАН. 1994. Т. 335. №1. С. 55–58.
3. *Бабешко В. А.* К проблеме динамического разрушения трещиноватых слоистых тел // ДАН СССР. 1989. Т. 307. №2. С. 324–327.
4. *Бабешко В. А.* К проблеме динамического разрушения трещиноватых слоистых тел // Доклады АН СССР. 1989. Т. 207. №2. С. 324–327.
5. *Бабешко В. А.* Динамика сред при наличии совокупности неоднородностей или дефектов и теория вирусов вибропрочности // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 1998. №1. С. 24–26.
6. *Бабешко В. А.* Среды с неоднородностями (случай совокупности включений и неоднородностей) // Изв. РАН. МТТ. 2000. №3. С. 5–9.
7. *Бабешко В. А.* Теория «вирусов» вибропрочности для совокупностей включений // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2000. №3. С. 21–23.
8. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Метод факторизации в краевых задачах в неограниченных областях // ДАН. 2003. Т. 392. №6. С. 1–4.
9. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Метод факторизации в теории вирусов вибропрочности // ДАН. 2003. Т. 393. №4. С. 473–477.
10. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Обобщенная факторизация в краевых задачах в многосвязных областях // ДАН. 2003. Т. 392. №2. С. 1–5.
11. *Бабешко В. А.* Тела с неоднородностями; случай совокупностей трещин // ДАН. 2000. Т. 373. №2. С. 191–193.
12. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* О методе факторизации в краевых задачах для сплошных сред // ДАН. 2004. Т. 399. №3. С. 315–318.
13. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* К исследованию связанных краевых задач механики сплошных сред и математической физики // ДАН. 2005. Т. 400. №2. С. 192–196.
14. *Бабешко В. А.* Обобщённый метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 256 с.
15. *Ворович И. И., Бабешко В. А., Пряхина О. Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
16. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Свойства определителей символов ядер интегральных уравнений, соответствующих простейшим «вирусам» вибропрочности // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2005. №4. С. 18–25.
17. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Аналитический метод решения динамических задач для слоистых сред с включениями // Изв. РАН. МТТ. 2005. №2. С. 87–97.
18. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* К постановке динамических смешанных задач для слоистых сред с дефектами // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2003. №2. С. 29–31.
19. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 3. С. 499–506.
20. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* Влияние жестких включений на волноводные свойства пакета упругих слоев // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. №1. С. 46–51.
21. *Пряхина О. Д., Смирнова А. В., Борисов Д. В., Мазин В. А.* Свойства элементов и определителей матриц-символов динамических задач для многослойных сред с включениями // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2005. №2. С. 40–43.

Статья поступила 12 апереля 2006 г.
Кубанский государственный университет
© Пряхина О. Д., Смирнова А. В., 2006