

УДК 539.3, 612.76

МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ ДВИЖЕНИЯ КРОВИ В АРТЕРИАЛЬНОМ СОСУДЕ ВО ВРЕМЯ СИСТОЛЫ С УЧЕТОМ ВИНТОВОЙ АНИЗОТРОПИИ ЕГО СТЕНКИ

Устинов Ю. А.¹

A MODEL OF BLOOD MOTION IN THE ARTERIAL VESSEL WITH SPIRAL ANISOTROPY DURING SYSTOLE TIME

Ustinov Yu. A.

A mathematical model of blood motion during systole time in an arterial vessel with spiral anisotropy is considered. The solution constructed provided numerical calculations of the problem basic characteristics and comparative analysis with experimental data.

В работе [1] проводится подробный качественный анализ движения крови в артериальном сосуде на основе математической модели, в которой стенка сосуда рассматривается как ортотропная цилиндрическая оболочка (безмоментная теория), а кровь — как вязкая жидкость, движение которой описывается линейными уравнениями Навье-Стокса. Там же имеется значительное количество ссылок с комментариями на более ранние исследования в рамках одномерной и рассматриваемой моделях.

На ряде сайтов Интернет и в [1] анонсировано открытие явления образования закрученного потока биологических сред в транспортных каналах человека и животных на примере сердечно-сосудистой, пищеварительной и мочевыделительных систем, обусловленное возникновением за счет трения соответствующих этому движению двух составляющих касательных напряжений при взаимодействии среды с волной скручивания, возбуждаемой в стенке канала сокращением спирально ориентированных мышечных и эластических элементов.

Следует отметить, что на возникновение закрученного потока в сердце вследствие его геометрической формы и механической структуры миокарда указывалось еще в [2]. В этой же работе предложена модель инженерного типа, опирающаяся на принципы работы насосов различных типов.

Причины, приводящие к винтовому движению крови, могут быть разными. В частности, в [1] содержится обзор работ, в которых показывается, что на участках, где артериальный сосуд имеет кривизну, возникает крутильная по отношению к оси сосуда составляющая скорости. В артериях, непосредственно примыкающих к сердцу, причиной винтового движения может служить вихревое движение в самом сердце, которое возникает во время систолы в силу отсутствия геометрической симметрии желудочка и симметрии механических свойств стенки сердца.

В [3–6] описывается математическая модель и на ее основе приведены некоторые результаты исследований особенностей движения крови, связанные с винтовой анизотропией механических свойств стенки сосуда. В частности, показано, что при пульсовом движении крови вследствие винтовой анизотропии появляется крутильная составляющая скорости стенки сосуда, которая в силу условия прилипания создает винтовой характер движения частиц крови вблизи стенки, если даже такая компонента отсутствует на входе в сосуд.

В настоящей работе исследования, аналогичные описанным в [1], проводятся для артериального сосуда с учетом винтовой анизотропии его стенки численно-аналитическими методами.

¹Устинов Юрий Анатольевич, заслуженный деятель науки РФ, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры теории упругости Ростовского государственного университета.

1. О структуре стенки артериального кровеносного сосуда

Накопленный обширный экспериментальный материал [1, 7] позволяет рассматривать стенки артериальных сосудов как многослойные анизотропные оболочки. Согласно этим работам стенки всех артерий имеют сходное строение и состоят из одних и тех же материалов. Соотношения между материалами в стенках сосудов разных отделов системы кровообращения различны. В [7] выделено три основных типа артериальных сосудов: эластического, смешанного и мышечного. Традиционно стенка делится на три слоя: внутреннюю (интима), среднюю (медия) и наружную (адвентиция). Принято считать, что влияние интимы и адвентиции на механические свойства стенки незначительны, в силу чего упругие свойства оболочки определяются медией. Медия состоит из множества концентрических слоев упругой ткани: эластина и мышечной ткани, оплетенных тончайшими волокнами коллагена. Полости между слоями заполнены различными губчатыми тканями и жидкостью. Относительная концентрация мышечной ткани и эластина определяет тип сосуда. Согласно [1] все мелкие артериальные сосуды относятся к мышечному типу. Средний слой этих сосудов почти полностью состоит из *спирально расположенных* гладкомышечных клеток, размещенных также в виде слоев с незначительным количеством коллагена и эластина. К этому же типу относятся все артерии головного мозга, а также подвздошная, поверхностная височная, плечевая и ряд других артерий [7]. Угол между направлением волокон и продольной осью сосуда равен примерно 30° – 50° . На эластин, коллаген и мышечную ткань приходится около 50 % материала стенки.

Таким образом, материал стенки можно рассматривать как композит, упругие свойства которого определяются его компонентами: эластином, кооллагином, мышечной тканью, их взаимной концентрацией и геометрией распределения.

Приведем некоторые сведения об упругих свойствах отдельных компонент [1].

Эластин — нелинейно упругий материал с модулем Юнга примерно $E = 300$ кН/м² для деформаций до 40 %. Коллаген — более жесткий материал с модулем Юнга равным, примерно, 10^6 кН/м². Модуль Юнга гладких мышц существенно зависит от физиологического состояния и может меняться в преде-

лах 100–1 200 кН/м². Согласно экспериментальным данным, приведенным в [7], упругие свойства сосудов изменяются с возрастом.

2. Основные соотношения для оболочки с винтовой анизотропией

Стенку сосуда будем рассматривать как тонкую цилиндрическую оболочку. У сосудов мышечного типа упругие свойства стенки должны обладать винтовой анизотропией. Динамические уравнения цилиндрической оболочки с винтовой анизотропией приведены в [4–6]. Эти уравнения получены на основе гипотез Кирхгоффа–Лява, и учитывают наличие предварительного напряженного состояния, которое присуще многим сосудам.

Отнесем оболочку к винтовой системе координат r, θ, z [5, 6], которая связана с декартовой соотношениями

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos(\theta + \tau z), & x_2 &= r \sin(\theta + \tau z), \\ x_3 &= z, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $\tau = \tan \alpha$, α — угол между касательной винтовой мышечной спирали, расположенной на срединной поверхности стенки и осью сосуда.

Предположим, что материал стенки — ортотропный и в базисе Френе винтовой спирали

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{n}, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{b}, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{t},$$

($\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{t}$ — орты главной нормали, бинормали и касательной соответственно) свойства материала стенки определены техническими константами $E_1, E_2, E_3, G_{12}, G_{13}, G_{23}, \nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$, которые удовлетворяют дополнительным условиям

$$\begin{aligned} \nu_{12}E_2 &= \nu_{21}E_1, & \nu_{13}E_3 &= \nu_{31}E_1, \\ \nu_{23}E_3 &= \nu_{32}E_2, \end{aligned}$$

вытекающим из условия положительной определенности удельной энергии деформации [8].

После перехода к базису винтовой системы координат в предположении, что $\sigma_{rr} = \sigma_{r\theta} = \sigma_{rz} = 0$ и $x = a\tau$, где a — радиус срединной поверхности, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} &= g_{11}e_{\theta\theta} + g_{12}e_{zz} + g_{13}e_{\theta z}, \\ \sigma_{zz} &= g_{12}e_{\theta\theta} + g_{22}e_{zz} + g_{23}e_{\theta z}, \\ \sigma_{\theta z} &= g_{13}e_{\theta\theta} + g_{23}e_{zz} + g_{33}e_{\theta z}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь

$$g_{11} = [E_2 + x^2(2\nu_{32}E_2 + 4G_{23} - 4G_{23}\nu_{23}\nu_{32}) + x^4E_3]/g_0,$$

$$g_{12} = [\nu_{32}E_2 + x^2(E_2 + 4G_{23} - 4G_{23}\nu_{23}\nu_{32}) + x^4\nu_{23}E_3]/g_0, \quad \frac{\partial T_2}{\partial z} - h\rho_0 \frac{\partial^2 u_z^0}{\partial t^2} + q_z = 0, \quad (2.3)$$

$$g_{22} = [E_3 + x^2(4G_{23} - 4G_{23}\nu_{23} + 2\nu_{32}E_2\nu_{32}) + x^4E_2]/g_0, \quad \frac{1}{a} \frac{\partial M_3}{\partial z} + \frac{\partial T_3}{\partial z} - \frac{T_{\theta z}^0}{a} \frac{\partial u_r^0}{\partial z} - T_\theta \frac{u_\theta^0}{a^2} - h\rho_0 \frac{\partial^2 u_\theta^0}{\partial t^2} + q_\theta = 0.$$

$$g_{13} = x[E_2(1 - \nu_{32}) - 2G_{23}(1 - \nu_{23}\nu_{32}) + x^2(E_3 - \nu_{32}E_2 - 2G_{23} + 2G_{23}\nu_{23}\nu_{32})]/g_0,$$

$$g_{23} = x[-2G_{23}(1 - \nu_{23}\nu_{32}) + E_3(1 - \nu_{23}) + x^2(-E_2 - \nu_{32}E_2 - 2G_{23} + 2G_{23}\nu_{23}\nu_{32})]/g_0,$$

$$g_{33} = [(1 - \nu_{23}\nu_{32})G_{23}(1 - x^2)^2 + x^2(E_2 - \nu_{23}E_2 + E_3 - \nu_{32}E_3)]/g_0,$$

$$g_0 = (1 + x^2)^2(1 - \nu_{23}\nu_{32}).$$

Упрощения на основе гипотезы единой нормали приводят к выражениям

$$e_{\theta\theta} = e_1^0 + \alpha e_1^1, \quad e_{zz} = e_2^0 + y e_2^1,$$

$$2e_{\theta z} = e_3^0 + y e_3^1,$$

$$e_1^0 = u_r^0/a, \quad e_2^0 = \partial_z u_z^0, \quad e_3^0 = \partial_z u_\theta^0$$

$$e_1^1 = 0, \quad e_2^1 = -\partial_z^2 u_r^0, \quad e_3^1 = \partial_z u_\theta/a,$$

где u_r^0, u_θ^0, u_z^0 — смещения точек срединной поверхности, $-h/2 \leq y \leq h/2$, h — толщина оболочки.

В принятых выше обозначениях выражения для усилий и моментов можно записать в следующем виде:

$$T_i = h g_{ij} e_j^0, \quad M_i = h^3 g_{ij} e_j^1/12,$$

при этом

$$T_1 = T_{\theta\theta}, \quad T_2 = T_{zz}, \quad T_3 = T_{\theta z},$$

$$M_1 = M_{\theta\theta}, \quad M_2 = M_{zz}, \quad M_3 = M_{\theta z}.$$

Замыкают цепочку основных соотношений уравнения движения

$$\frac{\partial^2 M_2}{\partial z^2} - \frac{T_1}{a} + \frac{T_{\theta z}^0}{a} \frac{\partial u_\theta^0}{\partial z} + T_z^0 \frac{\partial^2 u_r^0}{\partial z^2} - h\rho_0 \frac{\partial^2 u_r^0}{\partial t^2} + q_r = 0,$$

Здесь ρ_0 — плотность материала оболочки, $T_\theta^0, T_r^0, T_{\theta z}^0$ — усилия предварительно-напряженного состояния.

3. Математическая модель пульсового движения крови в артериальных сосудах

1. В предлагаемой математической модели колебания стенки сосуда описываются уравнениями, приведенными в п. 2, в предположении, что $M_i = 0$ (безмоментная теории), а движение крови — линейными уравнениями вязкой несжимаемой жидкости [9].

Будем считать, что на стенке сосуда выполняются кинематические условия прилипания

$$\partial_t u_r = v_r, \quad \partial_t u_\theta = v_\theta, \quad \partial_t u_z = v_z, \quad (3.1)$$

а гидродинамическое воздействие на стенку сосуда выражается тем, что в уравнениях (2.2)

$$\begin{aligned} q_r &= [p - 2\rho\nu\partial_r v_r]_{r=a}, \\ q_z &= -\rho\nu[\partial_r v_z + \partial_z v_r]_{r=a}, \\ q_\theta &= -\rho\nu[\partial_r v_\theta - v_\theta/r]_{r=a}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь v_r, v_z, v_θ — радиальная, осевая и тангенциальная компоненты вектора скорости, p — давление, $\partial_r, \partial_z, \partial_\theta, \partial_t$ — частные производные по соответствующим переменным.

Решение отыскивается в виде

$$\begin{aligned} u_j &= U_j e^{i(k\xi - \omega t)}, \\ v_j(\xi, \zeta, t) &= V_j(\xi) e^{i(k\xi - \omega t)}, \\ p &= a^{-1} \rho \nu X_1 e^{i(k\xi - \omega t)}, \\ \xi &= r/a, \quad \zeta = z/a, \end{aligned} \quad (3.3)$$

ω — круговая частота, $j = 1 \sim r, j = 2 \sim z, j = 3 \sim \theta$. На основании решения уравнений гидродинамики в предположении, что $\partial_r p = 0$,

$$\begin{aligned} V_z(\xi, k) &= \frac{ik}{\beta^2} X_1 + \frac{J_0(\beta\xi)}{J_0(\beta)} X_2, \\ V_r(\xi, k) &= \frac{k^2}{2\beta^2} \xi X_1 - \frac{ikJ_1(\beta\xi)}{\beta J_0(\beta)} X_2, \\ V_\theta(\xi, k) &= \frac{J_1(\beta\xi)}{J_1(\beta)} X_3, \\ \beta^2 &= i\gamma^2 - k^2, \quad \gamma^2 = a^2\omega/\nu. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Здесь ρ — плотность крови, ν — кинематическая вязкость, X_1, X_2, X_3 — произвольные постоянные, а амплитуды смещений U_j связаны с этими постоянными условием прилипания

$$\begin{aligned} U_r &= i\omega^{-1}V_r(1, k), \quad U_z = i\omega^{-1}V_z(1, k), \\ U_\theta &= i\omega^{-1}V_{\theta, k}(1). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Уравнения движения оболочки (2.2) совместно с соотношениями (3.1)–(3.5) позволяют свести задачу к однородной алгебраической системе уравнений

$$d_{ij}(k, \omega)X_j = 0, \quad i, j = 1 \dots 3. \quad (3.6)$$

Дисперсионное уравнение находится из условия равенства нулю определителя этой системы.

Исследования, проведенные в [4–6], показали, что при малых значениях волнового числа k это уравнение имеет шесть комплексных корней

$$k_s^\pm, \quad k_s^+ = k_s, \quad k_s^- = -k_s,$$

$$\operatorname{Re} k_s > 0, \quad s = 1, 2, 3.$$

Каждому корню отвечают элементарные волны (моды) давления, поля скоростей жидкости и смещений стенки

$$p_s^\pm = X_{1s}^\pm e^{i(\pm k_s \zeta - \omega t)},$$

$$v_{js}^\pm = V_j(\xi, \pm k_s) e^{i(\pm k_s \zeta - \omega t)},$$

$$u_{js}^\pm = iV_j(1, \pm k_s) e^{i(\pm k_s \zeta - \omega t)} / \omega.$$

Амплитуды скоростей получаются подстановкой $X_2 = X_{2s}$, $X_3 = X_{3s}$ в выражения (3.4).

В приведенных выражениях X_{js} — решения однородной системы (3.6), которые для каждого значения s определяются с точностью до произвольной постоянной C_s .

В [6] приведены результаты исследования зависимости фазовых скоростей $c_s^\pm = \pm a\omega / \operatorname{Re} k_s$, коэффициентов затухания $K_s = \operatorname{Im} k_s$, коэффициентов проекций скоростей

$$n_{js} = \frac{V_j(1, k_s)}{V_s},$$

$$V_s = \sqrt{V_1(1, k_s)^2 + V_2(1, k_s)^2 + V_3(1, k_s)^2}$$

аорты собаки от параметра α на частоте пульса $f = 2$ Гц ($\omega = 4\pi$). Ниже рассматривается задача, моделирующая распространения пучка волн в аорте, порождаемого систолой.

2. Обратимся к постановке краевой задачи.

Будем рассматривать аорту, как полубесконечную цилиндрическую оболочку с винтовой анизотропией с недеформируемым входным отверстием, поскольку оно имеет жесткую основу [1]. Начало координат $z = 0$ выберем в центре входа. Обозначим через $T = 2\pi/\omega_1$ период сердечного цикла, где ω_1 — круговая частота пульса. Зададим на входе следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} z = 0 : p^0 &= p_{tm} + \tilde{p}(\eta), \\ V_z(1, 0, \eta) &= V_\theta(1, 0, \eta) = 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где p_{tm} — давление на входе в сосуд при закрытом клапане (трансмуральное давление), $\tilde{p}(\eta)$ — избыточное давление, порождаемое систолой и открывающее клапан, $\eta = \omega_1 t$ — безразмерное время, граничные условия для скоростей отвечают условиям прилипания.

Обозначим через $\eta_c = 2\varepsilon$ временной отрезок систолы и примем следующий закон изменения давления

$$\begin{aligned} f &= \eta^2(\eta - \eta_c)^2 \text{ при } 0 \leq \eta \leq \eta_c, \\ f &= 0 \text{ при } \eta_c \leq \eta \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Выбранному закону изменения давления в форме (3.8) соответствует график, изображенный на рис. 1.12 в [1].

Для построения решения представим выражение (3.8) в виде отрезка ряда Фурье. Имеем

$$\begin{aligned} p_N &= p_{st} + P \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^N f_n \exp^{-in(\eta - \varepsilon)} \right], \\ p_0 &= p_{tm} + P f_0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $P f_0 = p_{max} - p_0$, p_{max} — максимальное значение давления во время систолы, f_n — коэффициенты Фурье функции f , которые с помощью замены переменной вычисляются по формуле

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\varepsilon^2 - \eta'^2)^2 d\eta', \\ f_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\varepsilon^2 - \eta'^2)^2 \cos n\eta' d\eta', \\ n &= 0, \dots, N. \end{aligned}$$

Решение будем отыскивать в виде

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_1 a \zeta + \\ &+ \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^N \sum_{s=1}^3 C_{ns} X_{1ns} \exp^{i\phi_{ns}} \right], \end{aligned}$$

$$v_z = v_z^0 + \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^N \sum_{s=1}^3 C_{ns} V_{zns} \exp^{i\phi_{ns}} \right], \quad (3.10)$$

$$v_\theta = v_\theta^0 + \operatorname{Re} \left[\sum_{n=1}^N \sum_{s=1}^3 C_{n,s} V_{\theta ns} \exp^{i\phi_{ns}} \right].$$

Здесь k_{ns} — корни дисперсионного уравнения, отвечающие значениям $\omega = n\omega_1$, $\phi_{ns} = k_{ns}\zeta - n\eta$, v_z^0 , v_θ^0 — скорости стационарного решения, функции V_{zns} , $V_{\theta ns}$ получаются путем подстановки в выражения (3.5) $k = k_{ns}$, $X_j = X_{jns}$, где X_{jns} — частные решения однородной алгебраической системы (3.6), отвечающие значениям $\omega = n\omega_1$, $k = k_{ns}$. Произвольные постоянные C_{ns} определяются при удовлетворении граничных условий (3.8). Известно [9], что

$$v_z^0 = \frac{a^2 p_1}{4\rho\nu} (1 - \xi^2)$$

решение Пуазеля, в котором p_1 — градиент давления стационарного течения. Поскольку в момент открытия клапана среднее значение скорости v_z равно нулю (расход равен нулю), то значение p_1 можно определить из условия

$$\int_0^1 v_z \xi d\xi = 0 \text{ при } z = 0, \quad \tau = 0. \quad (3.11)$$

Решение линейных уравнений Навье-Стокса для v_θ^0 , удовлетворяющее условием прилипания, является сингулярным при $\xi = 0$ и имеет вид

$$v_\theta^0 = C(\xi - 1/\xi). \quad (3.12)$$

Постоянная C выражается через удельный момент количества движения M_z следующей формулой

$$M_z = 2\pi\rho a^3 \int_0^1 v_\theta^0 \xi^2 d\xi = -\frac{1}{2}\pi\rho a^3 C.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Результаты экспериментальных исследований [1] показывают, что профиль скорости в окрестности оси сосуда является практически плоским. Это свидетельствует о том, что вероятность возникновения закрученного потока в прямолинейных участках окрестности оси сосуда мала. Поэтому при проведении расчетов принималось $v_\theta^0 = 0$.

3. В [1] содержится обширный материал, иллюстрирующий нестационарное поведение различных полевых характеристик таких как давление, градиент давления, максимальные

и средние значения скоростей и др. Часть накопленного материала, полученного на основе экспериментальных исследований, содержится в табл. 1.1, другая часть иллюстрируется графиками в различных разделах монографии [1]. Экспериментальный материал позволяет изучить возможности той или иной математической модели. Однако, полного набора параметров, необходимых для данной модели, в известной литературе не обнаружено. Поэтому, при проведении численных расчетов значения некоторых параметров брались из табл. 1.1 работы [1]. Так, например, из этой таблицы выбирались значения a , h , E_3 , а вязкость ν рассчитывалась по приводимым в таблице значениям чисел Рейнольдса для различных сосудов. Для нахождения численных значений g_{ij} , аналитические выражения которых содержат три модуля упругости, один из модулей (E_3) брался из таблицы, остальные параметры выбирались эвристически и варьировались. Подбор сопровождался контролем выполнения условий положительной определенности матрицы (g_{ij}).

В качестве иллюстрации приведем некоторые результаты расчетов при следующих значениях параметров сосуда (аорта собаки) и крови: $a = 0,73 \cdot 10^{-2}$ м, $h = 0,6 \cdot 10^{-3}$ м, $E_3 = 4,905 \cdot 10^2$ кН/м² = $5 \cdot 10^4$ кгс/м² (согласно [1] измеренные значения $E_3 = 3 - 7 \cdot 10^2$ кН/м²), $E_2 = 0,833 \cdot E_3$, $G = E_3/4$, $\nu_{32} = 0,45$, $\nu_{23} = 0,54$, $\rho_0 = 115$ кг/м³, $\nu = 4 \cdot 10^{-6}$ м²/с, $\rho = 102$ кг/м³, $\alpha = \pi/6$, круговая частота пульса $\omega_1 = 4\pi c^{-1}$ (2 Гц).

Продолжительность систолы принималось равным 1/3 сердечного цикла, из чего следует, что $\eta = 2\varepsilon = 2\pi/3$. При разложении функции f вида (3.8) в ряд Фурье бралось девять членов ряда ($N = 8$). При этом максимальная погрешность в равномерной метрике на отрезке $0 \leq \eta \leq 2\pi$ менее 0,01.

При выборе значений $p_{tm} = 1087$ кгс/м², $P = 679$ кгс/м² или, соответственно, $p_{tm} = 80$ тор (мм рт. ст.), $P = 50$ тор ориентировались на рис. 1.12 [1]. При этом градиент давления стационарного течения, определенный из условия (3.11), принимает значение $p_1 = 10$ кгс/м³.

Как отмечалось выше, каждой фиксированной частоте отвечает три волны ($s = 1, 2, 3$). Ниже будем пользоваться следующими терминами [6].

1) Квазипродольной модой будем называть такую волну, которая при $\alpha = 0$ (винтовая

c_1	c_2	c_3	$K_1 10^{-3}$	$K_2 10^{-3}$	$K_3 10^{-3}$
17,64	7,47	3,94	1,07	1,61	0,856
18,86	7,94	3,98	1,60	2,55	1,16
19,47	8,17	4,00	2,02	3,29	1,39
19,87	8,33	4,01	2,37	3,92	1,58
20,14	8,44	4,02	2,68	4,47	1,76
20,36	8,52	4,02	2,96	4,98	1,91
20,52	8,58	4,03	3,23	5,45	2,05
20,67	8,64	4,03	3,47	5,89	5,89

анизотропия отсутствует) превращается в чисто продольную (различные характеристики, отвечающие этой моде, будем снабжать индексом $s = 1$).

2) Квазикрутильной модой будем называть волну, которая при $\alpha = 0$ превращаются в чисто крутильную ($s = 2$).

3) Третью моду будем называть волной давления или пульсовой волной, поскольку она выполняет функцию распространения давления ($s = 3$).

В таблице приводятся значения фазовых скоростей $c_{sn} = a n \omega_1 / \operatorname{Re}(k_{sn})$ и коэффициентов затухания $K_{sn} = \operatorname{Im}(k_{sn})$, отвечающих различным модам ($s = 1, 2, 3$) и гармоникам ($n = 1, \dots, N$). Из таблицы видно, что в выбранном диапазоне частот, отвечающему Фурье-разложению функции f , фазовые скорости всех типов волн мало изменяются, а фазовая скорость волны давления фактически постоянна. Это означает, что заданная на входе в сосуд форма давления должна распространяться по стволу сосуда сохраняя свою форму с незначительным уменьшением амплитуды (в силу малости коэффициентов затухания). Затухание же в данной математической модели определяется только вязкостью жидкости. На рис. 1 приводятся графики, иллюстрирующие зависимость давления от времени на отрезке, равном одному циклу, в различных сечениях $z = \text{const}$. Кривые 1, 2, 3 отвечают $z = 0$, $z = 10a = 7,3$ см и $z = 50a = 36,5$ см соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Следует отметить, что длина прямолинейного участка аорты собаки равна примерно 3 см [1]. Поэтому выбор сечений $z = \text{const}$ был продиктован следующими двумя соображениями: наглядно проиллюстрировать отсутствие дисперсии и степень затухания. Наблюдаемые в конце систолы всплески на экспериментально снятых графиках давления («дикротический зубец») указывают на закрытие клапана [1], что в данной

модели не учитывается. Кроме того, всплеск может быть порожден отраженными волнами от границы перехода прямолинейного участка аорты в криволинейный. Действительно, если учесть, что выбранный временной отрезок систолы $t_c = 0,666$ с, фазовая скорость самой медленной волны давления $c_3 = 4$ м/с, то общее время пробега прямой и обратной волн прямолинейного участка аорты будет равным $t_p = 0,015$ с. Следовательно, за отрезок времени t_c может произойти 44 переотражения, которые даже при незначительном значении коэффициентов отражения могут явиться причиной появления «дикротического зубца».

На рис. 2 приводятся графики поведения градиента давления в указанных выше сечениях. Рис. 3 отражает поведение во времени расхода Q в различных сечениях. Следует отметить, что расчетные графики достаточно хорошо отвечают экспериментально снятым кривым расхода, изображенным на рис. 1.16 [1]. Рис. 4 иллюстрирует распределение скорости v_z по сечению сосуда $z = 3a$ в моменты времени $t_1 = 1/\omega_1 \simeq 0,8$ с. Кривая 1 отвечает трехмодовой теории, кривая 2 — одномодовой (волне давления). Рис. 5 иллюстрирует поведение во времени скоростей стенки сосуда V_{zc} (кривая 1) и $V_{\theta c}$ в сечении $z = 3a$ (кривая 2). Для выбранного значения $\alpha = \pi/6$ отношение $\max|V_{zc}|/\max|V_{\theta c}| \simeq 3$, для $\alpha = \pi/100$ это отношение равно примерно 10.

Для сравнения с экспериментальными данными, представленными в таблице 1.1 [1], приведем следующие результаты расчета: среднее по сечению и по времени значение скорости $v_{ss} = 0,163$ м/с попадает в диапазон экспериментальных значений 0,1–0,4 м/с, а пиковое значение скорости на оси, равное 1,6 м/с, — в диапазон 0,4–2,9 м/с.

Описанные результаты расчета опирались на трехмодовую теорию. Параллельно были проведены аналогичные расчеты основных гидродинамических характеристик движения

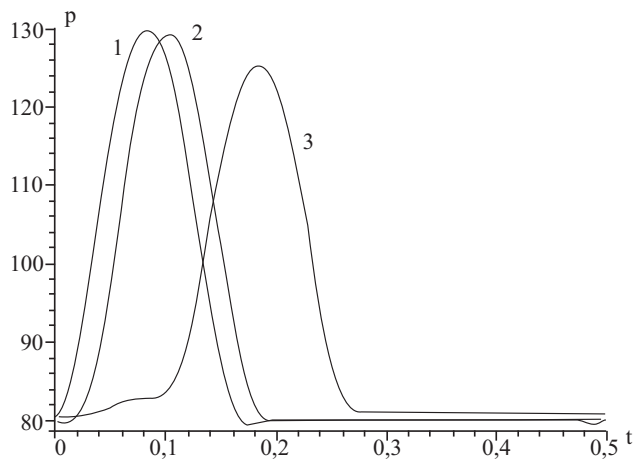


Рис. 1

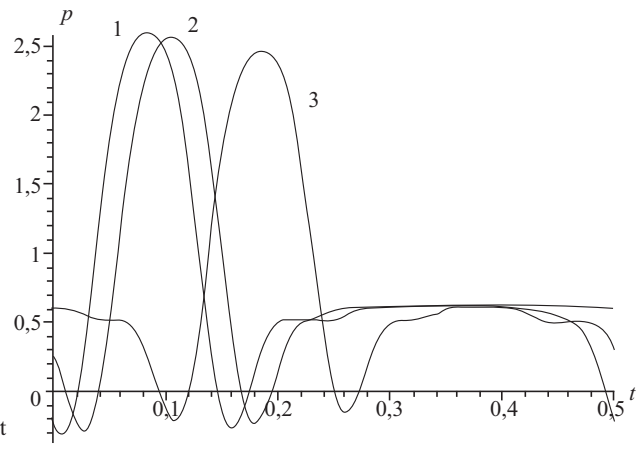


Рис. 2

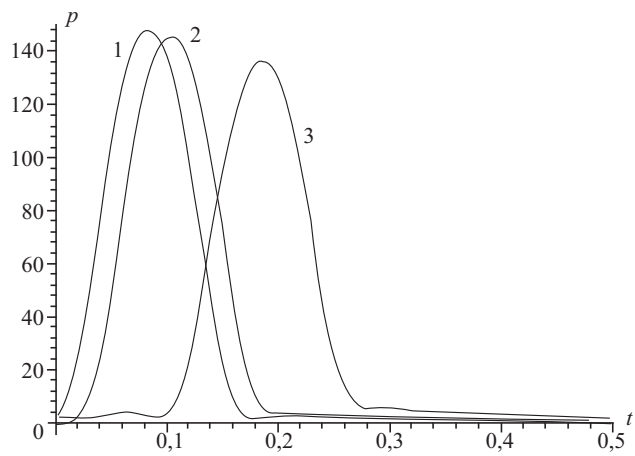


Рис. 3

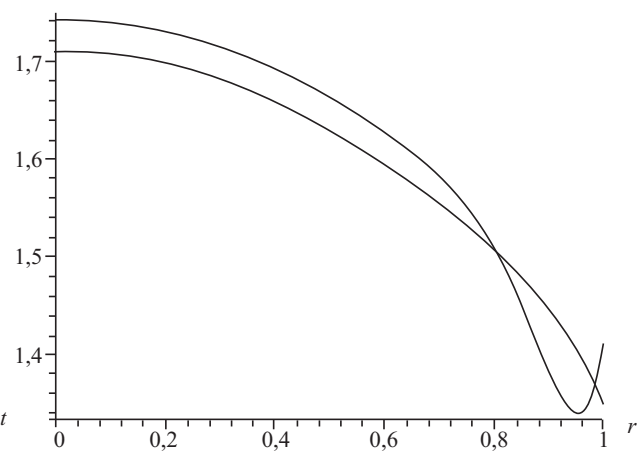


Рис. 4

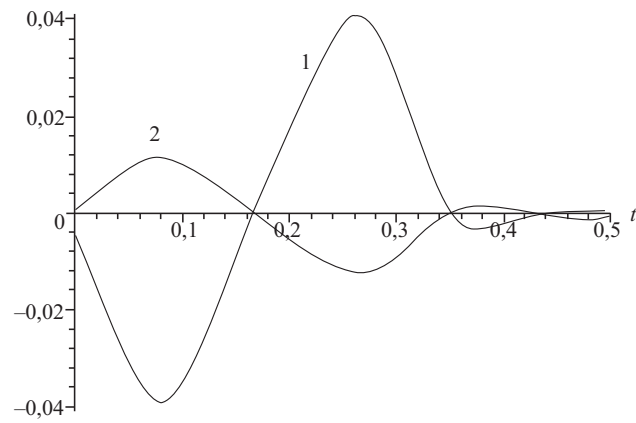


Рис. 5

крови (давления, градиента давления, расхода, распределение скоростей по сечению и др.) по одномодовой теории, отвечающей волне давления. Проведенный сравнительный анализ показал, что практически все гидродинамические характеристики с высокой степенью совпадения описываются одномодовой теорией. Отличие наблюдается только в распределении скоростей вблизи стенки сосуда.

Заключение

Рассмотренная модель пульсового движения крови в полубесконечном артериальном сосуде, учитывающая винтовую анизотропию его стенки, естественно, далека от совершенства. Вместе с тем, расчеты, проведенные на ее основе, и сравнительный анализ с экспериментальными данными показали, что модель с достаточной степенью точности отражает поведение основных гидродинамических характеристик при развитии движения. Следует подчеркнуть, что на входе в сосуд задавались только давление и условия жесткой заделки сосуда в стенку сердца, что в рассмотренной модели эквивалентно обращению в нуль продольной и крутильных скоростей на границе отверстия. Остальные характеристики: расход, средняя и пиковая скорость определялись на основе построенного решения. Численные значения этих характеристик попали в диапазон экспериментально измеренных значений [1]. Как показали расчеты, влияние винтовой анизотропии на скорости в выбранном для анализа сосуде оказалось незначительным и существенным только в окрестности стенки сосуда. Следует ожидать, что винтовая анизотропия может оказать значительное влияние на напряженно-деформированное состояние (НДС) самой стенки, что в свою очередь, влияет на проницаемость и массоперенос. Влияние механических факторов на проницаемость и массоперенос, отмечается в [1] и наиболее ярко должно проявляться в периферийных артериальных сосудах, в том числе в сосудах мозга, поскольку в

мозг поступает до 20 % крови [7]. В этих же сосудах должно более ярко проявляться влияние винтовой анизотропии стенки на характер течения крови и массоперенос. Кроме того, мышечная ткань в стенке сосуда выполняет еще одну важную функцию — дополнительной подкачки энергии. Поскольку у таких сосудов отношение толщины стенки к диаметру более значительное, то для описания их НДС требуются другие подходы, отличные от модели Кирхгоффа-Лява.

Литература

1. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983. 400 с.
2. Добров Н. Б., Кузьмина Н. Б., Роева И. Б. Связь анатомических и гидродинамических особенностей сердца в связи с его насосной функцией // Вестник АМН СССР. 1974. № 6. С. 22–31.
3. Багаев С. Н., Захаров В. А., Орлов В. А. О необходимости винтового движения крови // Российский журнал биомеханики. 2002. Т. 6. № 4. С. 30–51.
4. Богаченко С. Е., Устинов Ю. А. Об одной модели, объясняющей причину винтового пульсового движения крови в кровеносных сосудах // Тр. III Всеросс. конф. по теории упругости. Ростов-на-Дону: Новая книга, 2003. С. 376–378.
5. Устинов Ю. А. Модель винтового пульсового движения крови в артериальных сосудах // ДАН. 2004. Т. 398. № 3. С. 344–348.
6. Устинов Ю. А. Некоторые задачи для тел с винтовой анизотропией // Успехи механики. 2003. С. 37–62.
7. Устинов Ю. А. О винтовом пульсовом движении крови в артериальных сосудах // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Математика и механика сплошной среды. Естеств. науки. 2004. Спецвыпуск. С. 220–223.
8. Пурина Б. А., Касьянов В. А. Биомеханика крупных кровеносных сосудов. Рига: Знание, 1980. 260 с.
9. Лехницкий С. Г. Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.
10. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 727 с.