

КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНЫ НА ГРАНИЦЕ РАЗДЕЛА ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

В. В. Трепачев¹,

OSCILLATIONS OF A PLATE ON THE TWO-LAYER LIQUID INTERFACE

Trepachev V.V.

A plane problem about harmonic oscillations of a rigid plate on the interface of two-layer heavy liquid has been studied. The liquid density is constant, and the depth is unlimited. For the case of imponderable liquid the solution has been developed in closed species. First three members of low-frequency asymptotic of pressure under plate have been found. The results can be used in ecology.

Рассматривается плоская задача о гармонических колебаниях тонкой жесткой пластины на границе раздела двухслойной тяжелой жидкости с учетом влияния диссипации энергии Рэлея. Верхний и нижний слои имеют неограниченную глубину. Плотность жидкостей постоянна, а стратификация устойчива. Построено решение в замкнутом виде в случае невесомой жидкости, определена его область применимости на основе критерия подобия Эйлера (метод малых λ), показано, что наличие диссипации энергии увеличивает силовую нагрузку на пластину. Получена формула расчета циркуляции скорости вдоль замкнутого контура, охватывающего пластину, в общем случае. Доказано, что при четной форме пластины циркуляция скорости равна нулю. Это дает возможность избежать перемешивания двухслойной жидкости при вибрациях пластины. Найдены первые три члена асимптотического представления скачка давления, вызванного плоской пластиной на границе раздела в случае колебаний низкой частоты (метод больших λ). Результаты могут использоваться при решении задач, связанных с диагностикой неоднородности плотности морской воды в натурных и лабораторных условиях.

Введение

Задача о гармонических волнах на поверхности тяжелой идеальной глубокой жидкости, вызванных поверхностными колебаниями тонкой жесткой пластины конечной длины, рассматривалась в [1–3] без учета влияния поверхностного натяжения. Колебания пластины внутри однородной неограниченной жидкости изучены в [4] с учетом эффектов сжимаемости среды.

Условия однозначной разрешимости краевой задачи о поверхностных колебаниях пластины, влияние поверхностного натяжения на амплитуду плоских волн исследовано в [5]. В работе [6] получены первые два члена асимптотики и оценка решения задачи о колебаниях пластины с низкой частотой на поверхности однородной тяжелой жидкости. Влияние стратификации (и других факторов) на устойчивость движения жидкости анализируется в [7].

В [8] предложены эффективные методы решения интегральных уравнений первого рода, которые могут быть использованы при решении смешанных задач гидроаэродинамики. В данной работе рассматривается задача о колебании тонкой пластины на границе раздела, находящейся внутри двухслойной жидкости.

1. Постановка задачи

Рассмотрим вспомогательную задачу о плоских волнах, вызванных скачком нормального давления $P^*(x)e^{i\omega t}$ на границе раздела двухслойной идеальной жидкости. Считаем, что верхний и нижний слои имеют неограниченную глубину. Выберем начало декартовой системы координат на невозмущенной границе раздела, ось y направим вертикально вверх. Жидкость постоянной плотности ρ_1 занимает верхнее полупространство, а жидкость постоянной плотности ρ_2 — нижнее полупространство $y \leq 0$. Полагаем $\rho_2 \geq \rho_1$.

В рамках линейной теории волн постановка задачи имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial y^2} = 0, \quad n = 1, 2,$$

¹Трепачев Виктор Владимирович, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, доцент кафедры высшей математики Ростовской-на-Дону государственной академии сельскохозяйственного машиностроения.

$$u_n = \frac{\partial \Phi_n}{\partial x} e^{i\omega t}, \quad v_n = \frac{\partial \Phi_n}{\partial y} e^{i\omega t}, \quad n = 1, 2,$$

$$\zeta = \eta(x) e^{i\omega t},$$

$$i\omega \eta(x) = \frac{\partial \Phi_n}{\partial y}, \quad y = 0, \quad n = 1, 2,$$

$$\frac{\partial P_n}{\partial t} = \rho_n \left[(\omega^2 - i\mu\omega) \Phi_n - g \frac{\partial \Phi_n}{\partial y} \right] e^{i\omega t}, \quad (1.1)$$

$$y = 0, \quad n = 1, 2,$$

$$P_2 - P_1 = P^*(x) e^{i\omega t}, \quad y = 0, \quad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\nabla \Phi) r^{1+\delta} = 0, \quad \delta > 0, \quad r = (y^2 + x^2)^{\frac{1}{2}},$$

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{2}+\delta} F = 0, \quad F = \{\Phi_1, \Phi_2, \eta\}, \quad \delta > 0.$$

Здесь Φ_n , u_n , v_n , P_n , ρ_n , $n = 1, 2$ — потенциалы скоростей, горизонтальные скорости, вертикальные скорости, гидродинамические давления, плотности верхнего ($n = 1$) и нижнего слоев ($n = 2$); g — ускорение свободного падения (сила тяжести направлена вертикально вниз); ζ — форма границы раздела; $\mu > 0$ — коэффициент диссипации Рэлея [2]; $T = \frac{2\pi}{\omega}$ — период гармонических колебаний; $P^*(x)$ — известная функция переменной x , которая равна нулю при $|x| > a$, $a > 0$, а на отрезке $[-a, a]$ допускает разложение в ряд Фурье. Движение жидкости в начальный момент времени безвихревое, поэтому и при наличии сил Рэлея соблюдается теорема Лагранжа о сохранении потенциального движения [2].

Применяя к (1.1) преобразование Фурье по координате x и используя теорему о свертке, находим интегральные представления

$$\Phi_1(x, y) = \frac{i\omega}{\pi \rho_2} \int_{-a}^a P^*(s) \times$$

$$\times \left[\int_0^\infty \frac{\cos k(x-s)}{\Delta_1} e^{-ky} dk \right] ds, \quad y \geq 0,$$

$$\Phi_2(x, y) = -\frac{i\omega}{\pi \rho_2} \int_{-a}^a P^*(s) \times$$

$$\times \left[\int_0^\infty \frac{\cos k(x-s)}{\Delta_1} e^{ky} dk \right] ds, \quad y \leq 0,$$

$$\eta(x) = -\frac{1}{\pi \rho_2} \int_{-a}^a P^*(s) \times$$

$$\times \left[\int_0^\infty \frac{k \cos k(x-s)}{\Delta_1} dk \right] ds, \quad (1.2)$$

$$\Delta_1 = g(1 - \gamma)k - (\omega^2 - i\mu\omega)(1 + \gamma), \quad \gamma = \frac{\rho_1}{\rho_2},$$

$$g_1 = g(1 - \gamma), \quad g_1 > 0, \quad g > 0, \quad 0 \leq \gamma < 1,$$

где k — волновое число; g_1 — редуцированное ускорение силы тяжести [7]. Безразмерное приращение плотности $\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}$ определяет эффект силы тяжести на границе раздела двухслойной жидкости. Устойчивое состояние неоднородной жидкости соответствует $g_1 > 0$. Приравняем Δ_1 к нулю, считая k положительным действительным числом $\frac{2\pi}{\lambda}$, где λ — длина волны возмущения. Получим характеристическое уравнение для собственных частот волновых возмущений

$$\omega^2 - i\mu\omega - g_1 k / (1 + \gamma) = 0, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda},$$

$$\omega_{1,2} = 0,5 i\mu \pm \sqrt{g_1 \frac{2\pi}{\lambda(1+\gamma)} - 0,25\mu^2}.$$

Мнимая часть корней удовлетворяет неравенствам

$$\text{Im } \omega_n > 0, \quad n = 1, 2, \quad \mu > 0, \quad g_1 > 0; \quad (1.3)$$

$$\text{Im } \omega_1 > 0, \quad \text{Im } \omega_2 = 0, \quad \mu > 0, \quad g_1 = 0; \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \omega_1 > 0, \quad \operatorname{Im} \omega_2 < 0, \\ \mu > 0, \quad g_1 < 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Учтем, что решение содержит множитель $e^{i\omega t}$. В случае (1.3) волновые возмущения затухают при $t \rightarrow \infty$. При $g_1 = 0$ согласно (1.4) нет возмущений, которые нарастают с течением. Отметим, что в (1.5) $\operatorname{Re} \omega_n = 0$, $n = 1, 2$. При $g_1 < 0$ волновое возмущение границы раздела, соответствующее ω_2 , нарастает с течением времени по экспоненциальному закону при любых значениях длины волны.

Пусть $g_1 > 0$ в (1.2). Воспользуясь определением дельта-функции Дирака

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(xy) dy,$$

получим

$$\begin{aligned} P^*(x) = -\rho_2 g_1 \eta(x) - \frac{(\omega^2 - i\mu\omega)(1 + \gamma)}{\pi} \times \\ \times \int_{-a}^a P^*(s) K(x - s) ds, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$K(x - s) = \int_0^{\infty} \frac{\cos k(x - s)}{\Delta_1} dk,$$

$$g_1 > 0, \quad |x| < \infty,$$

где Δ_1 определено в (1.2). Формула (1.6) при известной функции $P^*(x)$ представляет собой линейное уравнение, которое применяется при определении формы границы раздела тяжелой жидкости, имеющей скачок плотности.

Пусть $g_1 = 0$. Модифицированное ускорение обращается в нуль в двух различных ситуациях: $g = 0$ (невесомость), $\rho_2 = \rho_1$ (однородная жидкость). Отметим, что (1.6) при $g_1 = 0$ обращается в тождество $P^*(x) = P^*(x)$. Подставив $g_1 = 0$ в (1.2), найдем значения потенциалов скорости на границе раздела

$$\begin{aligned} \Phi_n(x, \pm 0) = \mp \frac{iP^*(x)}{\rho_2(\omega - i\mu)(1 + \gamma)}, \\ n = 1, 2, \quad g_1 = 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Поскольку $P^*(x) = 0$, $|x| > a$, то из (1.7) следуют краевые условия

$$\begin{aligned} \Phi_n(x, 0) = 0, \quad n = 1, 2, \\ |x| > a, \quad g_1 = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Продифференцировав (1.8) по переменной x , имеем $u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = 0$. В невесомости отсутствует относительное скольжение слоев жидкости на границе раздела, имеющей скачок плотности.

2. Решение задачи в случае невесомой жидкости

Рассмотрим краевую задачу, соответствующую случаю $g_1 = 0$. Считаем, что профиль тонкой пластины $\eta^*(x)$ известен при $|x| < a$ и допускает разложение в виде тригонометрического ряда по косинусам

$$\begin{aligned} \eta(x) = -\eta^*(x), \quad |x| < a, \\ x = a \cos \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \end{aligned}$$

$$\eta^*(a \cos \theta) = \frac{\eta_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \eta_m \cos(m\theta), \quad (2.1)$$

где

$$\eta_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \eta^*(a \cos \theta) \cos(m\theta) d\theta.$$

Применим теорию вибрации тонкого крыла [4]. Имеем краевую задачу для потенциала $\Phi_2(x, y)$, который продолжен на всю плоскость. Потенциал $\Phi_2(x, y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа и условию убывания на бесконечности, которые описаны в (1.1), а также условиям на оси x

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = -i\omega \eta^*(x), \quad |x| < a, \quad y = 0, \quad (2.2)$$

$$\Phi_2 = 0, \quad |x| > a, \quad y = 0, \quad (2.3)$$

где $\eta^*(x)$ определено в (2.1). Условие (2.3) соответствует доказанному соотношению (1.8). Считаем, что функция $\Phi_2(x, y)$ конечна и непрерывна везде вне отрезка $y = 0$, $|x| \leq 1$ [4]. Опуская известные выкладки [4], имеем закон распределения потенциала скорости на нижней грани пластины:

$$\Phi_2(x, -0) = \frac{i\omega}{2} \sqrt{a^2 - x^2} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\eta_{n-1} - \eta_{n+1}}{n} u_{n-1}(x), \quad (2.4)$$

где $|x| < a$, $u_n(x)$ — многочлены Чебышева второго рода. Скачок давления на пластине $P^*(x)$ определяется с помощью формулы (1.7) в виде

$$\begin{aligned} P^*(x) &= -i(\omega - i\mu)(1 + \gamma)\Phi_2(x, -0)\rho_2 = \\ &= -i(\omega - i\mu)[\rho_2\Phi_2(x, -0) - \\ &\quad - \rho_1\Phi_1(x, +0)], \quad (2.5) \end{aligned}$$

где $\Phi_1(x, +0) = \Phi_2(x, -0)$.

Полагая $\rho_1 = 0$ в (2.5), учитывая (2.4), получим решение задачи о плоском ударе о свободную поверхность однослойной бесконечно глубокой жидкости [4]. Решение (2.5) соответствует случаю, когда контактное напряжение не имеет на крае бесконечной особенности [4, 8].

Сила и момент, действующие на пластину, имеющую единичную ширину (в направлении, ортогональном к плоскости), равны

$$\begin{aligned} Y &= 0,25i\pi(\rho_1 + \rho_2) \times \\ &\quad \times (\omega^2 - i\mu\omega)a^2(\eta_0 - \eta_2), \\ M &= 0,0625i\pi(\rho_1 + \rho_2) \times \\ &\quad \times (\omega^2 - i\mu\omega)a^3(\eta_1 - \eta_3). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Наличие диссипации энергии увеличивает абсолютную величину нагрузок $|Y|$, $|M|$. Например, силовая нагрузка, действующая на плоскую пластину ($\eta_*(x) = \eta_{00}$, $|x| < a$, $\eta_{00} = \text{const}$), равна $|Y| = 0,5\pi(\rho_1 + \rho_2)\omega^2|\eta_{00}|a^2\sqrt{1 + \left(\frac{\mu}{\omega}\right)^2}$.

Качественно определим область применимости результатов при описании колебаний пластины в тяжелой жидкости ($g_1 \neq 0$). При низкочастотных колебаниях главный вклад в силу, действующую на пластину, вносит гидростатическая часть давления [1, 5, 6], что видно из (1.6), рассматриваемого как интегральное уравнение. Найдем отношение статической составляющей силы давления к динамической составляющей силы давления на плоской пластине:

$$E_u = \frac{4g_1}{\pi(1 + \gamma)\omega^2 a \sqrt{1 + (\mu/\omega)^2}}. \quad (2.7)$$

Безразмерная функция (2.7) называется числом подобия Эйлера [9]. Воспользуясь дисперсионным уравнением, рассмотренным ранее, преобразуем (2.7):

$$E_u = \frac{4}{\pi^2} \frac{\lambda}{2a} = 0,40528 \frac{\lambda}{2a}, \quad (2.8)$$

где $\lambda = \frac{2\pi}{\text{Re}(k_0)}$ — длина внутренней волны, $2a$ — длина пластины.

Расчеты показали, что уравнение (2.8) может быть использовано для оценки области применимости результатов в коротковолновой области, т.е. при малых значениях $\lambda^* = \lambda/2a$.

3. Низкочастотные колебания плоской пластины

Пусть $g_1 > 0$, а профиль пластины задан в виде известной функции (2.1). Приравняв в (1.2) функцию Δ_1 к нулю, найдем комплексное значение волнового числа

$$k_0 = \frac{(\omega^2 - i\mu\omega)(1 + \gamma)}{g_1}, \quad \text{Im}(k_0) < 0, \quad \mu > 0, \quad \omega > 0. \quad (3.1)$$

Подставив (2.1) в (1.6) и учитывая (3.1), имеем линейное неоднородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода с разностным симметричным ядром:

$$\begin{aligned} P^*(x) &= \rho_2 g_1 \eta^*(x) + \\ &\quad + \frac{k_0}{\pi} \int_{-a}^a P^*(s) K^*(x - s) ds, \quad (3.2) \end{aligned}$$

$$K^*(x - s) = K^*(s - x) = - \int_0^\infty \frac{\cos k(x - s)}{k - k_0} dk,$$

где $P^*(x)$ — неизвестная функция, имеющая смысл контактного давления на пластине [5, 6, 8]. Контактное давление в поле внутренних волн равно разности давлений, оказываемых нижним и верхним слоями жидкости на пластину. В случае поверхностных волн давление

верхнего слоя жидкости на пластину отсутствует, что видно из динамического условия в (1.1) при $\rho_1 = 0$.

Воспользуясь тождеством, справедливым при любых действительных значениях k

$$\frac{1}{k - k_0} = \frac{2k_0}{k^2 - k_0^2} + \frac{1}{k + k_0}, \quad \text{Im}(k_0) < 0,$$

преобразуем подынтегральную функцию ядра. Учитывая табличный интеграл 3.7223 [10], имеем

$$K^*(x - s) = \pi i e^{-ik_0|x-s|} + \left[\sin(k_0|x-s|) \text{si}(k_0|x-s|) + \cos(k_0|x-s|) \text{ci}(|x-s|k_0) \right]. \quad (3.3)$$

Здесь $\text{si}(x)$, $\text{ci}(x)$ — интегральные синус и косинус [10].

При $\rho_1 = 0$, $\eta^*(x) = \eta_0 = \text{const}$ интегральное уравнение (3.2) представляет собой интегральное уравнение в теории поверхностных волн, вызванных колебаниями плоской пластины [5, 6]. Воспользуемся формулами 8.230 [10], определяющими функции $\text{ci}(x)$ и $\text{si}(x)$, представим ядро (3.3) в виде

$$K^*(k_0\tau) = \pi i e^{-ik_0\tau} + \sin(k_0\tau) \left[\int_0^{k_0\tau} \frac{\sin s}{s} ds - \frac{\pi}{2} \right] + \cos(k_0\tau) \left[C + \int_0^{k_0\tau} \frac{\cos s - 1}{s} ds \right] + \cos(k_0\tau) \ln(k_0\tau), \quad \tau = |x - s|, \quad (3.4)$$

$$C = 0,5772\dots; \quad 0 \leq \tau \leq 2a, \\ |x| \leq a, \quad |s| \leq a.$$

Ядро (3.4) удовлетворяет оценке, полученной способом, предложенным в [6]:

$$|K^*(k_0\tau) - \pi i e^{-ik_0\tau}| \leq \frac{\pi}{2}(1 + \Delta z) + C + |\ln z_0| + \frac{z_0^2}{4} + \frac{1}{2}, \quad (3.5)$$

$$z_0 = \tau \text{Re } k_0 > 0, \quad \Delta z = \tau |\text{Im}(k_0)|, \\ \text{Re}(k_0) > |\text{Im}(k_0)| > 0.$$

Из (3.5) следует квадратичная суммируемость ядра и применимость последовательных приближений к уравнению (3.2) в низкочастотной области [1, 5, 6].

Первые три слагаемых (3.4) — регулярные функции аргумента $k_0\tau$, последнее слагаемое ядра равно произведению регулярной четной функции на логарифмическую функцию. К уравнениям с ядром такого типа применим метод больших $\lambda^* = \lambda/(2a)$ [8, 11]. При обращении интегрального оператора с логарифмической функцией, применяемого в этом методе, удобно использовать формулу Карлемана [12, (217)] и безразмерную переменную интегрирования $x_1 = x/a$. В этом случае длина промежутка фиксированна и не равна 4, что позволяет однозначно решить задачу обращения по указанной формуле. При этом малыми параметрами являются комбинации вида $(\ln \lambda^*)^i / (\lambda^*)^j$, $i = 0, 1, \dots$, $j = 1, 2, \dots$, что видно из конкретных примеров в данной задаче [1, 5, 6].

Циркуляция скорости $\Gamma(t)$ вдоль замкнутого контура C согласно [4] определяется криволинейным интегралом

$$\Gamma(t) = \oint_C v_s ds,$$

где v_s — компонента скорости, касательная к C .

Величина $\Gamma(t) = 0$, если C расположен целиком в верхнем, либо в нижнем слое жидкости. Пусть контур C^* охватывает пластину, тогда

$$\Gamma^*(t) = 2e^{i\omega t} [\Phi_2(a, 0) - \Phi_2(-a, 0)], \quad (3.6)$$

где $(\pm a, 0)$ — точки пересечения контура C^* с границей раздела. Циркуляция скорости на пластине $\Gamma^*(t)$ равна нулю, если выполнено условие

$$\Phi_2(a, 0) = \Phi_2(-a, 0). \quad (3.7)$$

Условие (3.7) удовлетворяется автоматически в случае четной функции, описывающей форму колеблющейся пластины, т.е. при $\eta^*(x) = \eta^*(-x)$, что обусловлено четностью потенциала скорости на пластине.

Рассмотрим интегральное уравнение (3.2) при больших значениях параметра $\lambda^* = 1/\text{Re}(k_0a)$. Подставив в ядро (3.4) представления функций $\text{ci}(x)$, $\text{si}(x)$ при малых значениях аргумента z , имеем

$$P^*(x) = \rho_2 g_1 \eta^*(x) + \frac{\varepsilon}{\pi} \int_{-1}^1 P^*(s) \left[\pi i + \frac{\pi}{2} \varepsilon \left| \frac{x}{a} - s \right| + \ln \gamma \varepsilon |x - s| \right] ds + O(\varepsilon^3 \ln \varepsilon), \quad (3.8)$$

$\varepsilon = k_0 a \rightarrow 0$, $C = \ln \gamma_0$, $\gamma_0 = 1,7811\dots$, где C — постоянная Эйлера.

Определим давление на плоской горизонтальной пластине, совершающей вертикальные колебания с амплитудой $\eta_0/2 = \eta_{00} = \text{const}$. Считаем, что в краевом условии на пластине (2.1) величины $\eta_m = 0$ при $m = 1, 2, \dots$. Применим к интегральному уравнению (3.8) метод итераций дважды, считая, что в начальном приближении давление распределено по гидростатическому закону $P^* = \rho g$, $\eta_{00} = P_0$, $|x| < a$. В результате имеем закон распределения нормального давления под плоской пластиной

$$\begin{aligned} \frac{P^*(x)}{P_0} = & 1 + \frac{\varepsilon}{\pi} \left[q_0 + (1+y) \ln(1+y) + \right. \\ & \left. + (1-y) \ln(1-y) + \frac{\varepsilon \pi}{2} (1+y^2) \right] + \\ & + \left(\frac{\varepsilon}{\pi} \right)^2 \left\{ \left[2q_0(q_1 - 1) + \frac{2}{3} q_1 \left(1 + \frac{3}{5} q_2 \right) \right] + \right. \\ & + \ln(1+y) \left[q_0(1+y) + \frac{1}{3} (1+y^3) + \frac{1}{5} q_2 (1+y^5) \right] + \\ & + \ln(1-y) \left[q_0(1-y) + \frac{1}{3} (1-y^3) + \frac{1}{5} q_2 (1-y^5) \right] - \\ & \left. - \frac{2}{9} (1+3y^2) - \frac{2}{75} q_2 (3+5y^2+15y^4) \right\} + \\ & + O(\varepsilon^3 \ln \varepsilon), \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3.9) \end{aligned}$$

где $y = x/a$, $|y| < 1$, а постоянные q_0, q_1, q_2 равны $q_0 = 2[\ln(\gamma_0 \varepsilon) - 1 + \pi i]$, $q_1 = \pi i + \ln(\gamma_0 \varepsilon)$, $q_2 = 2 \ln 2 - 1 = 0,38629\dots$

В (3.9) первая поправка закона распределения скачка давления на пластине содержит общий множитель ε/π , а вторая поправка — $(\varepsilon/\pi)^2$. При вычислении второй поправки использована аппроксимация функции $(1-y) \ln(1-y) + (1+y)$, имеющая согласно [11,(225)] следующий вид $y^2(1+q_2 y^2)$.

Вторая поправка в (3.9) уточняет асимптотические результаты [1,6]. Увеличение частоты колебаний (в области низких частот) приводит к падению амплитуды $|P^*|$ на краях пластины $x = \pm a \mp 0$. Вывод качественно соответствует результатам расчетов в теории поверхностных волн [5]. Из уравнения (3.2), формул (3.4), (3.5), (3.9) следует, что $P^*(x)$ и $\eta(x)$ имеют разрыв первого рода в точках $x = \pm a$. Способы практического применения морских волнопродукторов в задачах диагностики пикноклина обсуждались в работе [13].

Литература

1. Хаскинд М.Д. Гидродинамическая теория качки корабля. М.: Наука, 1973. 328 с.
2. Сметенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Машиностроение, 1985. 263 с.
3. Leppington F.G. On the radiation and scattering of short surface waves // J. Fluid Mech. 1972. Pt. 1. P. 101–119.
4. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1971. 440 с.
5. Трепачев В.В. Влияние геометрии барических возмущений на поведение капиллярно-гравитационных волн // Теоретические и экспериментальные исследования поверхностных и внутренних волн. Севастополь: Изд-во Морского гидрофиз. ин-та АН УССР, 1980. С.54–64.
6. Потетюнко Э.Н. Плоские волны на поверхности жидкости, вызванные гармоническими возмущениями граничных условий // ПММ. Т. 58. Вып. 2. С. 241–248.
7. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977. 431 с.
8. Воробич И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1971. 455 с.
9. Шашин В.М. Гидромеханика. М.: Высшая школа, 1990. 384 с.
10. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
11. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488 с.
12. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
13. Островский Л.А. Поверхностные внутренние волны как средства диагностики океана // Методы гидрофизических исследований. Горький: Изд-во ИПФ АН СССР, 1984. С. 185–203.