

УДК 533, 531

РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА ВДОЛЬ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЙ В СПЕЦИАЛЬНОЙ МЕТРИКЕ ДЛЯ УМЕНЬШЕНИЯ РИСКА НА ГАЗОПРОВОДАХ¹

Буныкин А. В.²

SOLUTION OF THE SYSTEM OF GAS FLOW EQUATIONS ALONG GEODESIC LINES IN SPECIAL METRIC TO REDUCE RISKS AT GAS PIPELINES

Bunyakin A. V.

The work describes modification of the characteristics method, which consists in integrating of a 4D system of ordinary differential equations along phase paths. These paths can be interpreted as geodesic lines in special metric. The integration problem can be formulated as an extremal one, and its solution (along the curve) reduces the computation problem in comparison with the characteristics method, which uses two-dimensional region for the solution.

Введение

В работе представлена модификация метода характеристик, сводящаяся к интегрированию четырехмерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль фазовых траекторий. Эти траектории можно интерпретировать, как геодезические линии в специальной метрике, задачу интегрирования можно сформулировать как экстремальную, а ее решение (нахождение решения вдоль кривой) требует на порядок меньше вычислений, чем метод характеристик, при применении которого решение ищется в двумерной области.

Данный метод позволяет решать обратные задачи для газопроводных сетей (нахождение параметров начального состояния сети, при которых должно получиться заданное состояние по прошествии некоторого времени).

1. Подготовительные преобразования

Рассмотрим одномерную систему уравнений неустановившегося движения идеального газа (x — пространственная координата, t — время, $V(x, t)$ — скорость течения, $\rho(x, t)$ — плотность газа)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + V \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial V}{\partial x} = 0.$$

Скорость звука a считается постоянной. После преобразования к инвариантам Римана эта система принимает вид (ρ_0 — константа):

$$U = a \ln \frac{\rho}{\rho_0}, \quad \frac{\partial}{\partial t} (V \pm U) + (V \pm a) \frac{\partial}{\partial x} (V \pm U) = 0. \quad (1.1)$$

Решение системы (1.1) представляется в виде суммы двух составляющих $V = v + V_0$; $U = u + U_0$, одна из которых удовлетворяет линейной системе уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} (V_0 \pm U_0) \pm a \frac{\partial}{\partial x} (V_0 \pm U_0) = 0, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial(v \pm u)}{\partial t} + (v + V_0 \pm a) \frac{\partial(v \pm u)}{\partial x} + (v + V_0) \frac{\partial}{\partial x} (V_0 \pm U_0) = 0. \quad (1.3)$$

Уравнения (1.2) имеют решение

$$V_0 = \frac{1}{2} (P_0(x - at) + Q_0(x + at)),$$

$$U_0 = \frac{1}{2} (P_0(x - at) - Q_0(x + at)). \quad (1.4)$$

Функции V_0, U_0 могут удовлетворять граничным и начальным условиям для системы (1.1),

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ р2003юг (03-01-96690).

²Буныкин Алексей Вадимович, канд. физ.-мат. наук, доцент Кубанского государственного технологического университета.

тогда соответствующие условия для системы (1.3) могут быть нулевыми.

Сделаем замену неизвестных в (1.3), (1.4): $p = v + u$; $q = v - u$, $P_0 = V_0 + U_0$; $Q_0 = V_0 - U_0$, получим

$$V = \frac{p + q + P_0 + Q_0}{2},$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (V + a) \frac{\partial p}{\partial x} + V \frac{\partial P_0}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + (V - a) \frac{\partial q}{\partial x} + V \frac{\partial Q_0}{\partial x} = 0.$$

Введем комплексные переменные $w = p + iq$; $W_0 = P_0 + iQ_0$, после умножения второго уравнения на мнимую единицу и сложения с первым, найдем

$$\frac{\partial w}{\partial t} + V \frac{\partial(w + W_0)}{\partial x} + a \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = 0. \quad (1.5)$$

Введем комплексный аргумент (черта означает сопряжение) $z = x + it$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}; \quad \frac{\partial}{\partial t} = ia \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right).$$

Уравнение (1.5) можно переписать в виде

$$ia \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \right) + V \times \\ \times \left(\frac{\partial(w + W_0)}{\partial z} + \frac{\partial(w + W_0)}{\partial \bar{z}} \right) + \\ + a \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) = 0. \quad (1.6)$$

Уравнение (1.6) представим в матричной форме

$$\begin{pmatrix} 1 + \alpha & -1 \\ 1 & -1 + \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \operatorname{Im} \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 1 + \alpha & 1 \\ -1 & -1 + \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \\ \operatorname{Im} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix} = \\ = -\alpha \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial W_0}{\partial z} + \frac{\partial W_0}{\partial \bar{z}} \right) \\ \operatorname{Im} \left(\frac{\partial W_0}{\partial z} + \frac{\partial W_0}{\partial \bar{z}} \right) \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

где

$$\alpha = \frac{V}{a} = \frac{\operatorname{Re}(w + W_0) + \operatorname{Im}(w + W_0)}{2a}.$$

Рассмотрим четыре матрицы, образующие мультипликативную группу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{I},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{J}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{K}.$$

Правила умножения в этой группе

$$\begin{aligned} \mathbf{IJ} &= -\mathbf{JI} = \mathbf{K}, \\ \mathbf{KI} &= -\mathbf{IK} = \mathbf{J}, \\ \mathbf{KJ} &= -\mathbf{JK} = \mathbf{I}, \\ \mathbf{I}^2 &= -\mathbf{E}, \quad \mathbf{J}^2 = \mathbf{K}^2 = \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Только единичная матрица коммутирует с остальными. Линейное пространство над полем вещественных чисел с базисом из этих матриц обозначим как H_* (представляет все множество вещественных матриц 2×2).

Используем следующие обозначения для элементов H_* : $\mathbf{s} = \mathbf{E}x + \mathbf{I}at + \mathbf{J}d + \mathbf{K}e$; $\mathbf{H} = \mathbf{E}p + \mathbf{I}q + \mathbf{J}f + \mathbf{K}g$.

Аналогом сопряжения является: $\bar{\mathbf{H}} = \mathbf{E}p - \mathbf{I}q + \mathbf{J}f + \mathbf{K}g$.

Матрицы в левой части (1.7) могут быть записаны как $\alpha \mathbf{E} + \mathbf{I} + \mathbf{J}$, $\alpha \mathbf{E} - \mathbf{I} + \mathbf{J}$.

Случай, когда коэффициенты разложения по базису H_* d, e, f, g равны нулю соответствует матрицам вида $\begin{pmatrix} p & -q \\ q & p \end{pmatrix}$, алгебра которых изоморфна комплексным числам $p + iq$. Если в дальнейшем H, s будут написаны не жирным шрифтом, то подразумевается отождествление в силу этого изоморфизма, то есть $s = z$, $w = H$, заменим в (1.7) вектор-столбцы на матрицы вида

$$\begin{pmatrix} \operatorname{Re} \frac{\partial w}{\partial z} & \operatorname{Re} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \\ \operatorname{Im} \frac{\partial w}{\partial z} & \operatorname{Im} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{2} \mathbf{L}^+ \operatorname{Re} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \mathbf{L}^- \operatorname{Im} \frac{\partial w}{\partial z}. \quad (1.9)$$

Здесь

$$\mathbf{L}^\pm = \mathbf{E} \mp \mathbf{I} \pm \mathbf{J} + \mathbf{K}.$$

Тогда система (1.7) запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} (\alpha \mathbf{E} + \mathbf{I} + \mathbf{J}) \left(\mathbf{L}^+ \left(\frac{\partial H}{\partial s} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{s}} \right) - \right. \\ \left. - \mathbf{L}^- \mathbf{I} \left(\frac{\partial H}{\partial s} - \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{s}} \right) \right) + \\ + \frac{1}{4} (\alpha \bar{\mathbf{E}} + \mathbf{I} + \mathbf{J}) \left(\mathbf{L}^+ \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{s}} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial s} \right) - \right. \\ \left. - \mathbf{L}^- \mathbf{I} \left(\frac{\partial H}{\partial \bar{s}} - \frac{\partial \bar{H}}{\partial s} \right) \right) = \\ = -\frac{\alpha}{2} \left(\mathbf{L}^+ \left(\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \right) P_0 + \right. \\ \left. + \mathbf{L}^- \left(\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \right) Q_0 \right). \quad (1.10) \end{aligned}$$

Обозначим $(\cdot)'$ производную функции одной переменной, тогда

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \right) P_0 &= P'_0, \\ \left(\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \right) Q_0 &= Q'_0, \\ x &= \frac{s + \bar{s}}{2}, \quad at = -i \frac{s - \bar{s}}{2}. \end{aligned}$$

После умножения по правилам (1.8) в левой части уравнения (1.10) и приравнивания членов при базисных матрицах в обеих частях равенства, получаем систему

$$\begin{pmatrix} \alpha + 1 & \alpha - 1 & 1 & 1 \\ -\alpha + 1 & -\alpha - 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha + 1 & \alpha - 1 \\ 1 & 1 & \alpha - 1 & \alpha + 1 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} \partial H / \partial s \\ \partial H / \partial \bar{s} \\ \partial \bar{H} / \partial s \\ \partial \bar{H} / \partial \bar{s} \end{pmatrix} = -\alpha \begin{pmatrix} P'_0 + Q'_0 \\ -P'_0 + Q'_0 \\ P'_0 - Q'_0 \\ P'_0 + Q'_0 \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Здесь

$$\alpha = \bar{\alpha} = \frac{1}{4a} (H + W_0 + \bar{H} + \bar{W}_0 - i(H + W_0 - \bar{H} - \bar{W}_0)).$$

После тождественных преобразований системы (1.11) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial s} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{s}} &= -\frac{\alpha}{2} ((\alpha + 1)^{-1} P'_0 + Q'_0) = \lambda_1, \\ \frac{\partial H}{\partial \bar{s}} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial s} &= -\frac{\alpha}{2} ((\alpha + 1)^{-1} P'_0 - Q'_0) = \lambda_2. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Используя уравнения (1.11), (1.12) и учитывая, что s, H — комплексные числа, приходим к соотношению

$$\begin{aligned} W_0 &= P_0 \left(\frac{s + \bar{s}}{2} + i \frac{s - \bar{s}}{2} \right) + \\ &+ i Q_0 \left(\frac{s + \bar{s}}{2} - i \frac{s - \bar{s}}{2} \right) \end{aligned}$$

и получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial s} = \frac{1}{4a} ((1 + i)(P'_0 + \\ + \lambda_2) + (1 - i)(Q'_0 + \lambda_1)), \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \bar{s}} = \overline{\frac{\partial \alpha}{\partial s}}.$$

Условием того, что (λ_1, λ_2) есть вектор градиента (условием совместности для уравнений системы (1.12)), является

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial \bar{s}} = \frac{\partial \lambda_2}{\partial s}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \alpha \left(\frac{P'_0}{\alpha + 1} + Q'_0 \right) &= \\ = \frac{\partial}{\partial s} \alpha \left(\frac{P'_0}{\alpha + 1} - Q'_0 \right). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Функции P_0, Q_0 зависят от разных аргументов, поэтому уравнения (1.14) (после разделения на вещественную и мнимую части) не могут быть выполнены на множестве точек плоскости s меры, не равной нулю. Однако можно фиксировать кривую $s(\tau)$ и интегрировать уравнение

$$(\cdot)' = \frac{d}{d\tau}, \quad H' = s' \lambda_1 + \bar{s}' \lambda_2 \quad (1.15)$$

вдоль нее. Тогда получается решение системы (1.1) при условиях (1.14). Функции P_0, Q_0 можно определить из системы дифференциально-функциональных уравнений (1.14) при $s = s(\tau)$. Иными словами, условия (1.14) означают существование функции $H(s, \bar{s})$, которая на кривой $s(\tau)$ совпадает с аддитивной частью решения системы (1.1).

Дальнейшая цель состоит в том, чтобы функции P_0 и Q_0 могли быть произвольными, а путь интегрирования $s(\tau)$ на комплексной плоскости, обеспечивающий условия (1.14), находился бы в процессе интегрирования (1.15).

2. Решения вдоль геодезических линий

Будем искать $s(\tau)$ как фазовые траектории специальной системы дифференциальных уравнений.

Рассмотрим двумерную динамическую систему над полем комплексных чисел, первая координата ее есть уравнение (1.15)

$$\mathbf{P}(\tau) = (p_1, p_2), \quad \mathbf{Q}(\tau) = (q_1, q_2) = (s, \bar{s}),$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \mathbf{\Lambda}^*, \quad \mathbf{P} = \mathbf{Q}' \mathbf{\Lambda}, \quad (2.1)$$

$$p_1 = H'.$$

Сформулируем задачу нахождения фазовых траекторий $s(\tau)$ как решение системы уравнений Лагранжа (обозначение $\partial S/\partial \mathbf{X}^*$ — это вектор-строка градиента квадратичной формы $S = \frac{1}{2} \mathbf{X} \mathbf{A} \mathbf{X}^*$ с матрицей $\mathbf{A}$)

$$F = \frac{1}{2} \mathbf{Q}' \mathbf{A} \mathbf{Q}'^*, \quad (\partial F / \partial \mathbf{Q}'^*)' - \partial F / \partial \mathbf{Q}^* = 0.$$

Звездочка (*) обозначает эрмитово сопряжение матрицы или вектора ($\mathbf{X}$ — вектор-строка, $\mathbf{X}^*$ — комплексно сопряженный вектор-столбец).

После преобразования Лежандра

$$F = \frac{1}{2} \mathbf{Q}' \mathbf{A} \mathbf{Q}'^* \leftrightarrow G = \frac{1}{2} \mathbf{P} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{P}^*,$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\lambda_2 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}' \mathbf{A} = \partial F / \partial \mathbf{Q}'^*, \quad \mathbf{Q}' = \mathbf{P} \mathbf{A}^{-1} = \partial G / \partial \mathbf{P}^*,$$

$$F + G = \mathbf{P} \mathbf{Q}'^*$$

из уравнений (2.1) получится система уравнений Гамильтона

$$\mathbf{P}' = -\partial G / \partial \mathbf{Q}^*, \quad \mathbf{Q}' = \partial G / \partial \mathbf{P}^*. \quad (2.2)$$

Для этой системы применим метод канонических преобразований.

Так как потенциальная энергия в гамильтониане отсутствует (это является следствием того, что исходная система (1.1) описывает движение газа без поля внешних сил), то канонические преобразования сводятся к алгебраическим операциям. Поэтому они могут быть выполнены не только в поле комплексных чисел, но и в расширении H_* (при этом $\frac{\partial H}{\partial s}, \frac{\partial H}{\partial \bar{s}}$ надо понимать не как частные производные, а как симметричные матрицы $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$). Для демонстрации этого факта обозначим « $\cdot \backslash \cdot$ » и « $\cdot / \cdot$ » как левостороннюю и правостороннюю производные матричных функций, (*) — транспонирование с сопряжением в H_* (в комплексном случае — это обычная производная и эрмитово сопряжение).

Рассмотрим преобразование координат $(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) \mapsto (\Phi, \mathbf{I})$. Пусть $\mathbf{E}$ — это единичная, $\mathbf{O}$ — нулевая матрицы, соответственно $(\cdot \backslash \cdot)$ и $(\cdot / \cdot)$ лево- и правосторонние матрицы Якоби. « $\partial G / \partial \mathbf{P}^*$ » есть вектор-строка градиента квадратичной формы G ($\mathbf{P}$ — вектор-строка аргумента), который может быть определен алгебраически, тогда $\partial \mathbf{P} \backslash \partial G = (\partial G / \partial \mathbf{P}^*)^*$ — вектор-столбец.

Наложение следующих условий при $\det \mathbf{A} \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} (\partial \mathbf{P} \backslash \partial \Phi) & (\partial \mathbf{P} \backslash \partial \mathbf{I}) \\ (\partial \mathbf{Q} \backslash \partial \Phi) & (\partial \mathbf{Q} \backslash \partial \mathbf{I}) \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} (\partial \Phi \backslash \partial \mathbf{P}) & (\partial \Phi \backslash \partial \mathbf{Q}) \\ (\partial \mathbf{I} \backslash \partial \mathbf{P}) & (\partial \mathbf{I} \backslash \partial \mathbf{Q}) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{D} \\ -\mathbf{A} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}^* & -\mathbf{D}^* \\ \mathbf{A}^* & \mathbf{C}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

равносильно тому, что матрицы $\mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ есть решения системы уравнений

$$\mathbf{A} \mathbf{D}^* + \mathbf{B} \mathbf{C}^* = \mathbf{E} = \mathbf{D} \mathbf{A}^* + \mathbf{C} \mathbf{B}^*,$$

$$\mathbf{A} \mathbf{B}^* - \mathbf{B} \mathbf{A}^* = \mathbf{O} = \mathbf{C} \mathbf{D}^* - \mathbf{D} \mathbf{C}^*.$$

Это преобразование сохраняет уравнения Гамильтона, это верно и при отсутствии коммутативности в H_* . Действительно, поскольку

$$\mathbf{A} = (\partial \mathbf{P}^* / \partial \mathbf{I}^*) = -(\partial \mathbf{Q} \backslash \partial \Phi),$$

$$\mathbf{C} = (\partial \mathbf{Q}^* / \partial \mathbf{I}^*) = (\partial \mathbf{P} \backslash \partial \Phi),$$

$$\mathbf{B} = (\partial \mathbf{P}^* / \partial \Phi^*) = (\partial \mathbf{Q} \backslash \partial \mathbf{I}),$$

$$\mathbf{D} = -(\partial \mathbf{Q}^* / \partial \Phi^*) = (\partial \mathbf{P} \backslash \partial \mathbf{I}),$$

то из (2.2), (2.3) имеем

$$\begin{aligned} \Phi' &= \mathbf{P}' (\partial \mathbf{P} \backslash \partial \Phi) + \mathbf{Q}' (\partial \mathbf{Q} \backslash \partial \Phi) = \\ &= -\partial G / \partial \mathbf{P}^* (\partial \mathbf{P}^* / \partial \mathbf{I}^*) - \\ &- \partial G / \partial \mathbf{Q}^* (\partial \mathbf{Q}^* / \partial \mathbf{I}^*) = -\partial h / \partial \mathbf{I}^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{I}' &= \mathbf{P}' (\partial \mathbf{P} \backslash \partial \mathbf{I}) + \mathbf{Q}' (\partial \mathbf{Q} \backslash \partial \mathbf{I}) = \\ &= \partial G / \partial \mathbf{P}^* (\partial \mathbf{P}^* / \partial \Phi^*) + \\ &+ \partial G / \partial \mathbf{Q}^* (\partial \mathbf{Q}^* / \partial \Phi^*) = \partial h / \partial \Phi^*, \end{aligned}$$

где h — преобразованная функция Гамильтона.

Такое каноническое преобразование имеет производящую функцию T

$$T = \mathbf{R}(\mathbf{Q}) \mathbf{I}^*,$$

$$\mathbf{P}^* = \partial \mathbf{Q} \backslash \partial T = (\partial \mathbf{Q} \backslash \partial \mathbf{R}) \mathbf{I}^*,$$

$$\Phi = -\partial T / \partial \mathbf{I}^* = -\mathbf{R},$$

$$(\partial \mathbf{P}^* / \partial \mathbf{I}^*) = (\partial \mathbf{Q} \backslash \partial \mathbf{R}) = -(\partial \mathbf{Q} \backslash \partial \Phi) = \mathbf{A}.$$

Здесь $\mathbf{A}$ — левосторонняя матрица Якоби для отображения $\mathbf{Q} \mapsto \mathbf{R}$. Отсюда получаем, что условие

$$G = \frac{1}{2} \mathbf{P} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{P}^* = \frac{1}{2} \mathbf{I} \mathbf{I}^* = h,$$

есть следствие того, что $\mathbf{A}^* \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{E}$.

Таким образом, $\mathbf{A}$ — матрица преобразования квадратичной формы G к нормальному виду

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1 + \lambda_2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2} \end{pmatrix}.$$

Система (2.2) принимает вид

$$\Phi' = -\mathbf{I}, \quad \mathbf{I}' = 0,$$

$\Phi, \mathbf{I}$ — переменные типа действие-угол для гамильтоновой системы (2.2).

Из вида матрицы $\mathbf{A}$ и из (1.12), возвращаясь в поле комплексных чисел, получаем

$$a_1 = \sqrt{\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}} = \overline{a_1}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2}} = \overline{a_2},$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_1 & -a_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \partial\varphi_1/\partial q_1 & \partial\varphi_2/\partial q_1 \\ \partial\varphi_1/\partial q_2 & \partial\varphi_2/\partial q_2 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{\alpha}{\alpha + 1} P'_0, \quad \lambda_1 - \lambda_2 = -\alpha Q'_0.$$

Отсюда видно, что условия существования функций φ_1, φ_2 могут быть переписаны в виде следующих уравнений:

$$\frac{\partial a_1}{\partial q_2} = \frac{\partial a_1}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial a_2}{\partial q_2} = -\frac{\partial a_2}{\partial q_1},$$

что равносильно

$$\frac{\partial a_1}{\partial s} - \frac{\partial a_1}{\partial \bar{s}} = \frac{\partial a_1}{i\partial \operatorname{Im} s} = 0,$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial s} + \frac{\partial a_2}{\partial \bar{s}} = \frac{\partial a_2}{\partial \operatorname{Re} s} = 0$$

или

$$\frac{\partial}{\partial s} (\lambda_1 \pm \lambda_2) = \pm \frac{\partial}{\partial \bar{s}} (\lambda_1 \pm \lambda_2).$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha} P'_0 \right) &= \frac{\partial}{\partial \bar{s}} \left(\frac{\alpha}{1 + \alpha} P'_0 \right), \\ \frac{\partial \alpha Q'_0}{\partial s} &= -\frac{\partial \alpha Q'_0}{\partial \bar{s}}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

С учетом (1.13) после разделения вещественной и мнимой частей можно показать, что (1.14) есть то же, что и (2.4).

Итак, явный вид матрицы $\mathbf{A}$, невырожденной в общем случае, говорит о существовании канонической замены. Из этого следует существование производящей функции T , то есть функции $\mathbf{R}(\mathbf{Q})$ [1]. Условия (2.4) равносильны существованию матрицы Якоби этой функции

и равносильны условию совместности (1.14) для системы (1.12).

Учитывая, что $\Phi' = -\mathbf{I}, \mathbf{I}' = 0, \mathbf{I} = (I_1, I_2)$ из (2.4) получаем

$$(q'_1 + q'_2)a_1 = 2 \operatorname{Re} s' \sqrt{-\frac{\alpha}{2(\alpha + 1)}} P'_0 = I_1 = -\varphi'_1,$$

$$(q'_1 - q'_2)a_2 = 2i \operatorname{Im} s' \sqrt{-\frac{\alpha Q'_0}{2}} = I_2 = -\varphi'_2.$$

Значения I_1, I_2 — постоянные при интегрировании этой системы, которая переписывается в виде дифференциального уравнения для геодезических линий в метрике $F = \frac{1}{2} \mathbf{Q}' \mathbf{A} \mathbf{Q}'^*$

$$s' = I_1 \sqrt{-\frac{\alpha + 1}{2\alpha P'_0}} + \frac{I_2}{\sqrt{-2\alpha Q'_0}}. \quad (2.5)$$

Интегрирование этого уравнения в системе с (1.15) обеспечивает условия (1.14) вдоль фазовых траекторий $s(\tau)$ и дает решение системы (1.1) при любых P_0, Q_0 (для произвольных граничных условий).

Необходимо заметить, что при реализации численного интегрирования уравнения (2.5) для течения газа по трубопроводным сетям (которое заведомо дозвуковое, α — это число Маха) гарантировано отсутствие особых точек фазового потока системы (1.15), (2.5), если P'_0, Q'_0 не обращаются в нуль и не стремятся к бесконечности.

3. Структура решений вдоль геодезических линий

Уравнение (2.5) может быть получено и иначе

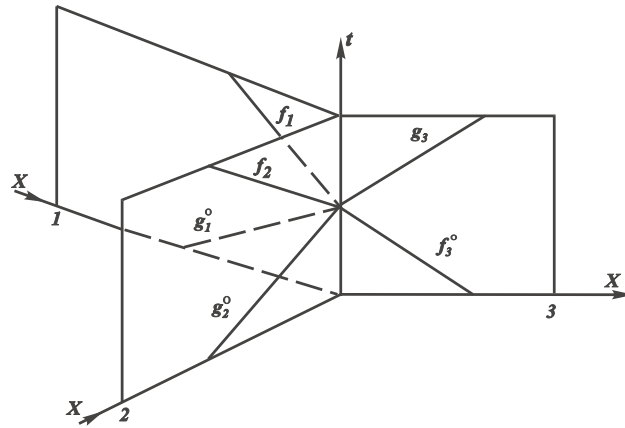
$$\begin{aligned} \mathbf{P}^* &= \mathbf{A} \mathbf{I}^*, \quad \mathbf{P} = \mathbf{I} \mathbf{A}^* = \mathbf{Q}' \mathbf{A}, \quad \mathbf{Q}' = \mathbf{I} \mathbf{A}^* \mathbf{A}^{-1}, \\ \mathbf{A}^* \mathbf{A}^{-1} \mathbf{A} &= \mathbf{E}, \quad \mathbf{A}^* \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}, \quad \mathbf{Q}' = \mathbf{I} \mathbf{A}^{-1}, \\ \mathbf{A}^{-1} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_1^{-1} & a_1^{-1} \\ a_2^{-1} & -a_2^{-1} \end{pmatrix}, \quad (s', \bar{s}') = \mathbf{I} \mathbf{A}^{-1}. \end{aligned}$$

Первый элемент этой системы соответствует соотношению (2.5).

$$s' = \frac{I_1}{2} a_1^{-1} + \frac{I_2}{2} a_2^{-1}. \quad (3.1)$$

Из уравнения (1.15) получаем

$$\begin{aligned} H' &= \left(\frac{I_1}{2} a_1^{-1} + \frac{I_2}{2} a_2^{-1} \right) (a_1^2 + a_2^2) + \\ &+ \left(\frac{I_1}{2} a_1^{-1} - \frac{I_2}{2} a_2^{-1} \right) (a_1^2 - a_2^2) = \\ &= I_1 a_1 + I_2 a_2. \end{aligned}$$



Это есть первый столбец системы $\mathbf{P} = \mathbf{I}\mathbf{A}^*$.

Комплексное уравнение (3.1), согласно условиям (2.4), разделяется на два вещественных

$$\operatorname{Re} s' = \frac{I_1}{2a_1(\operatorname{Re} s)}, \quad \operatorname{Im} s' = \frac{I_2}{2ia_2(\operatorname{Im} s)}. \quad (3.2)$$

Поэтому задание функций a_1, a_2 (вместо P_0, Q_0) также определяет решение системы (1.1) вдоль геодезической линии. Система (3.2) при этом имеет следующее решение:

$$\int a_1(\operatorname{Re} s) d\operatorname{Re} s = \frac{I_1 \tau}{2},$$

$$\int a_2(\operatorname{Im} s) d\operatorname{Im} s = \frac{I_2 \tau}{2i}.$$

Соответственно, получаем

$$H = \int a_1(\operatorname{Re} s) I_1 d\tau + \int a_2(\operatorname{Im} s) I_2 d\tau =$$

$$= 2 \int a_1^2(\operatorname{Re} s) d\operatorname{Re} s + 2i \int a_2^2(\operatorname{Im} s) d\operatorname{Im} s.$$

Связь между функциями a_1, a_2 и P_0, Q_0 — это система интегро-дифференциально-функциональных уравнений $\alpha(H, s)$

$$2a_1^2(\operatorname{Re} s) = -\frac{\alpha}{\alpha + 1} P'_0(\operatorname{Re} s - \operatorname{Im} s),$$

$$2a_2^2(\operatorname{Im} s) = -\alpha Q'_0(\operatorname{Re} s + \operatorname{Im} s).$$

4. Применение метода геодезических линий при решении обратных задач для уменьшения риска при воздействии на газопроводные сети

Под газопроводной сетью понимается система трубопроводов, соединенных между собой. Для определенности полагаем, что в каждом промежуточном узле сети соединяются

три звена, замкнутых циклов нет. Каждое звено — трубопровод, движение сжимаемой среды (газа) в каждом из звеньев описывается уравнениями (1.1), причем направление оси X соответствует ориентации графа.

Расположим граф сети на горизонтальной плоскости и из каждого узла (концевого и промежуточного) проведем вертикально вверх ось t (рисунок). Полученный двумерный граф является пространством фазовых координат газопроводной сети. В промежуточных узлах происходит состыковка граничных условий — давление в концах звеньев, сходящихся в узле, одинаково, а сумма расходов с учетом их знаков равна нулю.

Решением системы уравнений движения для газопроводной сети называются функции U_k, V_k , удовлетворяющие уравнениям (1.1) на каждом (k -м) звене и условиям состыковки в каждом промежуточном узле.

Задача состоит в том, чтобы найти решение на некотором множестве точек $\{x_0\}$ сечения графа сети, соответствующего моменту времени $t_0 < t$ так, чтобы в момент t в произвольной внутренней точке сети x , значения U, V были бы заданными.

Такая задача имеет заведомо неединственное решение [2]. Множество параметров, от которых зависит решение, разобьем на две части — заранее заданные (x, U, V — решение в момент времени t , граф сети и длины его звеньев), и те, которые задаются в процессе решения (фиксируют неоднозначность решения). В дальнейшем, если про какие-либо параметры будет сказано «задаются (заданы)», то подразумевается добавление их к множеству параметров, фиксирующих неоднозначность решения.

Точку с фазовыми координатами x, t , где решение должно иметь значения U, V , назовем «конечной».

Алгоритм решения поставленной задачи с помощью интегрирования вдоль геодезических линий заключается в следующем:

Из конечной точки выпускается геодезическая линия, то есть система (1.15), (2.5) интегрируется численно при значениях $U = U_0, V = V_0, H = 0, s = (x, at)$. Параметры I_1, I_2 задаются так, чтобы движение по геодезической линии происходило с убыванием времени. Параметры функций P_0, Q_0 задаются так, чтобы в процессе интегрирования значения P'_0, Q'_0 не обращались в нуль и не стремились к бесконечности, тогда при условии $|\alpha| < 1$ (дозвуковое течение) система уравнений (1.15), (2.5) не будет иметь особенностей.

На рисунке показаны характеристики $x \pm at = c$ системы (1.2), снабженные постоянными вдоль них величинами. Если, например, геодезическая линия подошла к промежуточному узлу со стороны «1», то обозначим значения $(P_0 + p)_1 = g_1, (Q_0 + q)_1 = f_1$ в этом узле и в этот момент времени. Припишем величинам f_k, g_k индексы, нумерующие другие концы звеньев, с которыми соединяется данный промежуточный узел. Верхний индекс «0» у значений f_k^0, g_k^0 соответствует состоянию до взаимодействия характеристик в промежуточном узле (меньшему t). В промежуточных узлах сети могут «зарождаются» разрывы решения, а условиями его непрерывности являются $g_k^0 = g_k, f_k^0 = f_k, k = 1, 2, 3$.

Используя половину этих условий $g_1^0 = g_1, g_2^0 = g_2, f_3^0 = f_3$, соответствующую рисунку, запишем условия стыковки в промежуточном узле (d_k — диаметры звеньев)

$$2U = g_1^0 - f_1 = g_2^0 - f_2 = g_3 - f_3^0, \\ (g_1^0 + f_1)d_1^2 + (g_2^0 + f_2)d_2^2 = (g_3 + f_3^0)d_3^2.$$

На основе этих соотношений имеем

$$U = \frac{g_3d_3^2 - f_1d_1^2 - f_2d_2^2}{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}, \\ g_1^0 = f_1 + 2U, \quad g_2^0 = f_2 + 2U, \\ f_3^0 = g_3 - 2U. \quad (4.1)$$

Как видно из системы уравнений (4.1), может быть задан только один из параметров f_2, g_3 (f_1, g_1 — известны заранее), поскольку при условии непрерывности решения, они связаны соотношением

$$g_1 = f_1 + 2 \frac{g_3d_3^2 - f_1d_1^2 - f_2d_2^2}{d_1^2 + d_2^2 + d_3^2}.$$

Таким образом, параметры f_k^0, g_k^0 находятся из уравнений (4.1) и из оставшихся условий непрерывности решения

$$f_1^0 = f_1, \quad f_2^0 = f_2, \quad g_3^0 = g_3.$$

Эти параметры используются для задания параметров функций P_0, Q_0 , так как $(P_0)_k = g_k, (Q_0)_k = f_k$ на каждом из трех звеньев ($k = 1, 2, 3$), сходящихся в узле, после чего находятся $U = U_0, V = V_0, H = 0, s = (x, at)$ (индекс k опущен) для продолжения интегрирования по каждому из них. То есть, после прохождения над промежуточными узлами, сеть геодезических линий разветвляется — одна линия на три, и задается один параметр.

На каждом из трех звеньев параметры I_1, I_2 снова задаются так, чтобы при интегрировании вдоль геодезической линии движение осуществлялось с уменьшением времени. Совокупность точек, соответствующих t_0 на геодезических линиях, образует множество $\{x_0\}$, при этом будут найдены P_0, Q_0 на соответствующих ребрах, и, следовательно, найдено одно из решений поставленной задачи.

Необходимо заметить, что алгоритм решения этой задачи не итерационный, и он сводится к конечному числу шагов с учетом ограничений на точность численного интегрирования.

Можно модифицировать представленный метод добавлением в систему (1.1) (в левую часть первого уравнения) члена типа гидравлических потерь $\lambda \frac{V^2}{2d}$ (постоянные d, λ — диаметр трубопровода и коэффициент гидравлического трения), при этом изменится вид правой части системы (1.11).

Изложенный метод может быть использован для предотвращения аварийных ситуаций на газопроводных сетях. Положим, что конечная точка x, U, V соответствует недопустимому состоянию данного элемента газопроводной сети, тогда решение поставленной задачи может дать информацию о множестве таких начальных состояний сети, которые приводят к этому. Причем это множество находится с достаточно широким для вариации произволом посредством численного интегрирования вдоль одномерного многообразия (вдоль геодезических линий).

На территории Краснодарского края имеются уникальные объекты, например, газопровод «Россия – Турция», имеющий на выходе из компрессорной станции «Береговая» проектное давление более 250 атм, на шельфе

Азовского моря есть скважины с пластовым давлением более 450 атм. Увеличение плотности газа, выгодное с точки зрения экономии энергии при его транспортировке, неминуемо повышает опасность аварийных ситуаций и ограничивает возможность использования упрощенных методик расчета течений в газопроводных сетях. Для предотвращения аварий на подобных объектах необходимо разрабатывать новые методы их моделирования, диагностики и прогнозирования их поведения.

Литература

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989. 468 с.
2. *Бунякин А. В.* Решение системы уравнений одномерного неуставившегося движения газа вдоль геодезических линий в специальной метрике // Заключ. конф. регионального конкурса р2003юг: Тез. докладов. 2005. С. 22–24.

Статья поступила 18 марта 2006 г.

Кубанский государственный технологический университет, г. Краснодар

© Бунякин А. В., 2006