Математика

УДК 517.968

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

***Цалюк М. В.*[1], *Цалюк Мих. В.*[2]**

THE INSTABILITY OF SOLUTIONS OF THE SYSTEMS OF QUASILINEAR VOLTERRA EQUATIONS

Tsalyuk M. V., Tsalyuk Mikh. V.

We obtained the conditions for instability of the trivial solution of a quasilinear system of Volterra integral equations. The linear part of the kernel is assumed to be a sum of quasipolynomials with matrix coefficients and matrix-valued function summable on the semiaxis. For a homogeneous kernel with degree — 1, we get the analogous result.

Указаны условия, при которых тривиальное решение квазилинейной системы интегральных уравнений Вольтерра неустойчиво. Линейная часть ядра предполагается разностной и являющейся суммой квазимногочленов с матричными коэффициентами и суммируемой на полуоси матричнозначной функцией. Аналогичный результат получен для однородного степени — 1 ядра.

Рассмотрим систему

$$x(t) = \int_0^t K(t-s)\big[x(s) + g(s, x(s))\big]\,ds + f(t), \quad (1)$$

где

$$K(t) = K_1(t) + K_0(t) = \sum_{j=1}^{m} C_j t^{k_j} e^{\mu_j t} + K_0(t), \quad (2)$$

C_j — $n \times n$ матрицы, $k_j \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{Re}\mu_j \geqslant 0$, $K_0 \in L_1[0,\infty)$, $e^{-\varepsilon t}K_0(t) \in \mathbf{BC}$,

$$\mathbf{BC} = \big\{x(t) \in \mathbf{C}[0,\infty) : \ \sup_{t\geqslant 0}\|x(t)\| < \infty\big\}$$

при любом $\varepsilon > 0$, $g(t,x)$ непрерывна в области $t \in [0,\infty)$, $\|x\| < r_0$, $g(t,0) = 0$ и $f \in \mathbf{BC}$.

Если $K_1(t) \equiv 0$ и $\sup\limits_{t\geqslant 0}\|g(t,x)\| = o(\|x\|)$, $x \to 0$, то из общей теоремы об устойчивости по первому приближению [1,2] следует, что устойчивость K влечет за собой устойчивость тривиального решения (при $f \equiv 0$) системы (1). Так как система (1) эквивалентна системе

$$x(t) = \int_0^t R(t-s)g(s,x(s))\,ds + \left[f(t) + \int_0^t R(t-s)f(s)ds\right], \quad (3)$$

где $R(t)$ — резольвента ядра K, то легко показать, что и в общем случае из устойчивости K следует устойчивость тривиального решения системы (1).

Для системы (1) в работе получена теорема о неустойчивости, подобная классической теореме Ляпунова для дифференциальных уравнений [3].

Рассмотрим некоторые свойства резольвенты R ядра K. Обозначим через $\hat{K}$ преобразование Лапласа ядра K.

Лемма. Пусть матрица $I - \hat{K}(z)$ необратима в некоторых точках λ_j, $\alpha = \max \operatorname{Re}\lambda_j > 0$

[1]Цалюк Марина Вадимовна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры дифференциальных и интегральных уравнений Кубанского государственного университета.

[2]Цалюк Михаил Вадимович, аспирант кафедры дифференциальных и интегральных уравнений Кубанского государственного университета.

и $m+1$ — максимальный порядок полюсов $\big(I-\hat{K}(z)\big)^{-1}$, лежащих на прямой $\operatorname{Re} z=\alpha$.

Тогда

1) при некотором $M>1$ имеем

$$\|R(t)\| \leqslant M(t+1)^m e^{\alpha t},$$

$$\left\|I+\int\limits_0^t R(s)\,ds\right\| \leqslant M(t+1)^m e^{\alpha t}, \quad t \geqslant 0;$$

2) существуют такие $M_0>0$, $w\in\mathbb{R}^n$, $\|w\|=1$ и последовательность отрезков (ξ_k,ν_k), $\xi_k\to\infty$, что при $t\in\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(\xi_k,\nu_k)$ справедлива оценка

$$\left\|w+\int\limits_0^t R(s)\,ds\cdot w\right\| \geqslant M_0(t+1)^m e^{\alpha t}.$$

Доказательство. Пусть

$$\max_{\operatorname{Re}\lambda_j<\alpha}\operatorname{Re}\lambda_j<\varepsilon<\alpha,$$

$\varepsilon>0$, $K_\varepsilon(t)=e^{-\varepsilon t}K(t)$ и R_ε — резольвента ядра K_ε. Так как

$$I-\hat{K}_\varepsilon(z)=I-\hat{K}(z+\varepsilon),$$

то $I-\hat{K}_\varepsilon(z)$ необратима в полуплоскости $\operatorname{Re} z\geqslant 0$ лишь в точках $\lambda_j-\varepsilon$, $\operatorname{Re}\lambda_j=\alpha$. Тогда в силу [4]

$$R_\varepsilon(t)=\sum_{\operatorname{Re}\lambda_j=\alpha}P_{m_j}(t)e^{(\lambda_j-\varepsilon)t}+R_1(t),$$

где P_{m_j} многочлены, порядок которых на 1 меньше порядка полюса λ_j. Более того, как следует из доказательств [4], если $e^{-\varepsilon t}K_0(t)\in\mathbf{BC}$, то $R_1\in\mathbf{BC}$. Отсюда

$$R(t)=e^{\varepsilon t}R_\varepsilon(t)=$$
$$=(t+1)^m e^{\alpha t}\big[A_1e^{ih_1t}+\dots+A_le^{ih_lt}+o(1)\big]$$

и

$$I+\int\limits_0^t R(s)\,ds=(t+1)^m e^{\alpha t}\big[B_1e^{ih_1t}+\dots$$
$$\dots+B_le^{ih_lt}+o(1)\big]. \quad (4)$$

Легко видеть, что найдется такое $M>1$, что

$$\left\|\sum_{j=1}^l A_je^{ih_jt}+o(1)\right\|\leqslant M,$$

$$\left\|\sum_{j=1}^l B_je^{ih_jt}+o(1)\right\|\leqslant M.$$

Так как $B_j\neq 0$, то матрица $\sum\limits_{j=1}^l B_je^{ih_jt}\not\equiv 0$ и, следовательно, существует такой вектор w, что

$$\psi(t)=\left\|\sum_{j=1}^l B_j\,we^{ih_jt}\right\|\not\equiv 0.$$

Функция ψ почти периодична, поэтому $4M_0=\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\psi(t)>0$.

В силу непрерывности ψ найдутся такие интервалы (ξ_k,ν_k), $\xi_k\to\infty$, что $\psi(t)>2M_0$ при $t\in(\xi_k,\nu_k)$, так что при достаточно больших k получим

$$\left\|\sum_{j=1}^l B_j\,we^{ih_jt}+o(1)\,w\right\|\geqslant M_0.$$

□

Далее будем предполагать, что

$$\big\|g(t,x)\big\|\leqslant q_1(t)o\big(\|x\|\big)+q_2(t)\|x\|^{1+a} \quad (5)$$

при $t\geqslant 0$, $\|x\|\leqslant r\leqslant r_0$, $a>0$. Пусть r_γ для $\gamma>0$ таково, что $o\big(\|x\|\big)<\gamma\|x\|$, $\|x\|\leqslant r_\gamma$.

Положим при $t\geqslant 0$

$$g_\gamma(t,x)=\begin{cases} g(t,x), & \|x\|\leqslant r_\gamma,\\ g\Big(t,\frac{x}{\|x\|}r_\gamma\Big), & \|x\|>r_\gamma.\end{cases}$$

Очевидно, что g_γ определена при всех $x\in\mathbb{R}^n$, $t\geqslant 0$,

$$\big\|g_\gamma(t,x)\big\|\leqslant\gamma q_1(t)\|x\|+q_2(t)\|x\|^{1+a} \quad (6)$$

и тривиальное решение системы (1) устойчиво или нет тогда и только тогда, когда таким же является тривиальное решение системы

$$x(t)=\int\limits_0^t K(t-s)\big[x(s)+g_\gamma(s,x(s))\big]\,ds+$$
$$+f(t). \quad (7)$$

Теорема. Пусть $I-\hat{K}(z)$ не обратима в точках λ_j, $\operatorname{Re}\lambda_j\geqslant 0$, $\alpha=\max\operatorname{Re}\lambda_j$ и $m+1$ — максимальный порядок полюсов $\big(I-\hat{K}(z)\big)^{-1}$, лежащих на прямой $\operatorname{Re} z=\alpha$.

Пусть далее $g(t,x)$ удовлетворяет условию (5) и $(1+t)^m q_1(t) \in L_1[0,\infty)$, а

$$\int\limits_0^t e^{-a\alpha(t-s)}(s+1)^{m(1+a)}q_2(s)\,ds \in \mathbf{BC}.$$

Тогда тривиальное решение системы (1) неустойчиво.

Доказательство. Пусть x_c — решение системы (7) со свободным членом $f(t) = cw$, $c > 0$, где вектор w — указанный в утверждении 2) леммы. Функция x_c является также решением уравнения

$$x(t) = \int\limits_0^t R(t-s)g_\gamma(s,x(s))ds + \\ + c\Big(w + \int\limits_0^t R(s)\,ds\cdot w\Big) \quad (8)$$

(см. (3)). Обозначим

$$\bar q_1 = \int\limits_0^\infty (t+1)^m q_1(t)\,dt,$$

$$\bar q_2 = \sup_{t\geqslant 0}\int\limits_0^t e^{-a\alpha(t-s)}(s+1)^{m(1+a)}q_2(s)\,ds$$

и пусть числа P и γ таковы, что $0<\gamma<\frac{1}{\bar q_1 M}$ и $\frac{M}{1-M\gamma\bar q_1} < P < M + M_0$ (см. лемму). Очевидно, при $M < P < M + M_0$ и достаточно малом γ эти неравенства выполняются.

Так как $\|x_c(0)\| = c$, а $P > 1$, то на некотором отрезке $[0,\,T]$ имеем

$$\|x_c(t)\| \leqslant P(t+1)^m e^{\alpha t}c. \quad (9)$$

Будем считать $[0,T]$ максимальным отрезком, на котором выполняется (9). Из (6) и (8) в силу леммы на $[0,\,T]$ имеем

$$\|x_c(t)\| \leqslant M(t+1)^m e^{\alpha t}c + \\ + \int\limits_0^t M(t-s+1)^m e^{\alpha(t-s)}\big[\gamma q_1(s)\|x_c(s)\| + \\ + q_2(s)\|x_c(s)\|^{1+a}\big]\,ds \leqslant M(t+1)^m e^{\alpha t}c + \\ + M(t+1)^m e^{\alpha t}c\int\limits_0^t \big[\gamma P(s+1)^m q_1(s) + \\ + q_2(s)(s+1)^{m(1+a)}P(Pce^{\alpha s})^a\big]\,ds \leqslant \\ \leqslant M(t+1)^m e^{\alpha t}c\Big\{1 + P\big[\gamma\bar q_1 + \bar q_2(Pce^{\alpha t})^a\big]\Big\}.$$

Ясно, что (9) заведомо будет выполнено на таком отрезке $[0,\,T_c]$, на котором (при достаточно малом c) выполняется неравенство

$$M(t+1)^m e^{\alpha t}c\Big\{1 + P\big[\gamma\bar q_1 + \bar q_2(Pce^{\alpha t})^a\big]\Big\} \leqslant \\ \leqslant P(t+1)^m e^{\alpha t}c.$$

Например, в качестве T_c можно принять решение уравнения

$$M\Big\{1 + P\big[\gamma\bar q_1 + \bar q_2(Pce^{\alpha T_c})^a\big]\Big\} = P,$$

то есть

$$Pce^{\alpha T_c} = \left[\frac{P(1-M\gamma\bar q_1) - M}{MP\bar q_2}\right]^{\frac{1}{a}}. \quad (10)$$

Очевидно, T_c является непрерывной функцией c и $T_c \to \infty$ при $c \to 0$. Пусть $c_k \to 0$ таковы, что $T_k = T_{c_k} \in (\xi_k, \nu_k)$ (см. лемму). Тогда, учитывая равенство (10), имеем

$$\|x_{c_k}(T_k)\| \geqslant \left\|w + \int\limits_0^{T_k} R(s)\,ds\,w\right\|c_k - \\ - \int\limits_0^{T_k} M(t_k - s + 1)^m e^{\alpha(T_k - s)}\big[\gamma q_1(s)\|x_{c_k}(s)\| + \\ + q_2(s)\|x_{c_k}(s)\|^{1+\alpha}\big]\,ds \geqslant M_0(T_k+1)^m e^{\alpha T_k}c_k - \\ - M(T_k+1)^m e^{\alpha T_k}c_k P\big[\gamma\bar q_1 + \bar q_2(Pc_k e^{\alpha T_k})^a\big] \geqslant \\ \geqslant \left[\frac{P(1-M\gamma\bar q_1) - M}{MP\bar q_2}\right]^{\frac{1}{a}}\frac{M_0 + M - P}{P} = \\ = L > 0.$$

Таким образом, $\sup\limits_{t\geqslant 0}\|x_{c_k}(t)\| \geqslant L > 0$, хотя $c_k \to 0$. $\square$

Далее рассмотрим нелинейную систему

$$y(t) = \int\limits_1^t \frac{1}{s} Q\Big(\frac{t}{s}\Big)\big[y(s) + g(s,\, y(s))\big]\, ds + f(t), \tag{11}$$

где

$$Q(t) = Q_1(t) + Q_0(t) = \sum_{j=1}^m C_j (\ln t)^{k_j} t^{\mu_j} + Q_0(t),$$

C_j — $n \times n$ матрицы, $k_j \in \mathbb{Z}$, $\operatorname{Re}\mu_j \geqslant 0$, $\dfrac{Q_0(t)}{t} \in L_1[1,\, \infty)$, $t^{-\varepsilon} Q_0(t) \in \mathbf{BC}[1,\, \infty)$ при любом $\varepsilon > 0$, $g(t,\, x)$ непрерывна в области $t \in [1,\, \infty)$, $\|x\| < r_0$, $g(t,\, 0) = 0$ и $f \in \mathbf{BC}[1,\, \infty)$.

Экспоненциальной заменой эта система сводится к системе вида (1), то есть получим

$$x(t) = \int\limits_0^t K(t-s)\big[x(s) + g_1(s,\, x(s))\big]\, ds + f_1(t), \tag{12}$$

где

$$x(t) = y(e^t), \quad f_1(t) = f(e^t), \quad g_1(t,\, x) = g(e^t,\, x), \tag{13}$$

а $K(t) = Q(e^t)$ имеет вид (2). Таким образом, как видно из равенств (13), тривиальные решения систем (11) и (12) одновременно устойчивы или неустойчивы.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. Пусть $I - \int\limits_1^\infty u^{-(z+1)} Q(u)\, du$ не обратима в точках λ_j, $\operatorname{Re}\lambda_j \geqslant 0$, $\alpha = \max \operatorname{Re}\lambda_j$ и $m+1$ — максимальный порядок полюсов $\Big(I - \int\limits_1^\infty u^{-(z+1)} Q(u)\, du\Big)^{-1}$, лежащих на прямой $\operatorname{Re} z = \alpha$.

Пусть, далее, $g(t,\, x)$ удовлетворяет условию

$$\big\|g(t,\, x)\big\| \leqslant p_1(t) o\big(\|x\|\big) + p_2(t)\|x\|^{1+a}, \tag{14}$$

при $t \geqslant 1$, $\|x\| \leqslant r \leqslant r_0$, $a > 0$ и функции p_1 и p_2 таковы, что $\dfrac{1}{t}(\ln t + 1)^m p_1(t) \in L_1[1,\, \infty)$, а $\int\limits_1^t \dfrac{1}{s}\Big(\dfrac{s}{t}\Big)^{a\alpha} (\ln s + 1)^{m(1+a)} p_2(s)\, ds \in \mathbf{BC}[1, \infty)$.

Тогда тривиальное решение системы (11) неустойчиво.

Доказательство. Как уже упоминалось выше, исследование устойчивости тривиального решения системы (11) сводится к решению аналогичной задачи для нелинейной системы (12).

Так как $g_1(t, x) = g(e^t, x)$, то в силу (14) имеем

$$\|g_1(t, x)\| = \|g(e^t,\, x)\| \leqslant \\ \leqslant p_1(e^t) o\big(\|x\|\big) + p_2(e^t)\|x\|^{1+a}.$$

Обозначим $q_i(t) = p_i(e^t)$, $i = 1, 2$, тогда

$$\int\limits_0^\infty (1+t)^m q_1(t)\, dt = \int\limits_0^\infty (1+t)^m p_1(e^t)\, dt = \\ = \int\limits_1^\infty (1 + \ln t)^m \frac{p_1(t)}{t}\, dt < \infty.$$

Кроме того, так как

$$\varphi(t) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_1^t \frac{1}{s}\Big(\frac{s}{t}\Big)^{a\alpha} (\ln s + 1)^{m(1+a)} p_2(s)\, ds \in \\ \in \mathbf{BC}[1, \infty),$$

то

$$\int\limits_0^t e^{-a\alpha(t-s)} (s+1)^{m(1+a)} q_2(s)\, ds = \\ = \int\limits_0^t e^{-a\alpha(t-s)} (s+1)^{m(1+a)} p_2(e^s)\, ds = \\ = \int\limits_0^{e^t} \frac{1}{s}\Big(\frac{s}{e^t}\Big)^{a\alpha} (\ln s + 1)^{m(1+a)} p_2(s)\, ds = \\ = \varphi(e^t) \in \mathbf{BC}.$$

Далее, в силу равенства $K(t) = Q(e^t)$ получим

$$I - \hat{K}(z) = I - \int\limits_1^\infty u^{-(z+1)} Q(u)\, du.$$

Так как выполнены все условия теоремы 1, то тривиальное решение системы (12) неустойчиво, а значит неустойчиво и тривиальное решение системы (11). □

Литература

1. *Цалюк З. Б.* Интегральные уравнения Вольтерра // Итоги науки и техники. Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1977. Т. 15. С. 131–198.
2. *Цалюк З. Б.* Об устойчивости интегральных уравнений типа Вольтерра // Докл. и сообщения научн. конф. физ.-мат. и естеств. факультетов УГПИ. Ижевск, 1965. С. 8–9.
3. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 535 с.
4. *Цалюк З. Б., Цалюк М. В.* Асимптотика резольвенты уравнения Вольтерра с разностным несуммируемым ядром // Дифференциальные уравнения. 2003. Т. 39. № 6. С. 844–847.

Статья поступила 20 декабря 2006 г.
Кубанский государственный университет
© Цалюк М. В., Цалюк Мих. В., 2006