Механика

УДК 539.3:534.1

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМЫ ПОКРЫТИЕ – ПОДЛОЖКА[1]

Александров В. М.[2]***, Зарубов Д. И.***[3]

AXIALLY SYMMETRICAL PROBLEM ABOUT STABILITY OF A COATING-SUBSTRATE SYSTEM

Alexandrov V. M., Zarubov D. I.

The problem of stability is analyzed for an infinite plate (coating) under the action of a three-dimensional longitudinal force during axially cylindrical curving. The plate has bilateral contact with an elastic layer (substrate) whose base is fixed. It is determined that as the properties of the material approach those of an incompressible material, the critical force becomes considerably smaller than that calculated by replacing the elastic layer by the equivalent Fuss-Winkler foundation. The results can be used for the analysis of properties of coated bodies and laminated composites, as well as in geophysics.

Исследована задача об устойчивости бесконечной пластины (покрытия), находящейся под действием всестороннего продольного усилия в условиях осесимметричного изгиба в двухстороннем контакте с упругим слоем (подложкой), защемленным по основанию. При приближении свойств материала слоя к несжимаемому установлен эффект существенного снижения величины критического усилия по сравнению с критическим усилием, рассчитанным с заменой упругого слоя эквивалентным основанием Фусса–Винклера. Результаты могут найти применение при расчете работоспособности тел с покрытиями, слоистых композитов, в вопросах геофизики.

Ранее задача об устойчивости бесконечной пластины при продольном сжатии, находящейся в условиях цилиндрического изгиба в двухстороннем контакте с упругим основанием, рассматривалась в [1] (основание Фусса-Винклера) и [2] (упругий слой, защемленный по основанию).

1. Пусть бесконечная упругая пластина (покрытие) толщины $2h$ находится во взаимодействии с бесконечным упругим слоем (подложкой) толщины H. Будем предполагать, что между нижней гранью пластины и верхней гранью слоя осуществлено полное сцепление. Пусть также пластина всесторонне сжата в продольном направлении усилием N так, что задача осесимметрична. Будем еще предполагать, что нижняя грань слоя жестко защемлена. Рассмотрение будем вести в цилиндрической системе координат r, ϑ, z.

Слой с упругими характеристиками G и ν будем описывать моделью линейной теории упругости, а для описания осесимметричной деформации пластины будем использовать уравнения

$$4\theta h^2 \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right)u_{\pm}^*\right] = \mp(\sigma_1 - \sigma_2) - \\ - \frac{h}{r}\frac{d}{dr}\{r[\tau_1 - \tau_2 \pm 3(\tau_1 + \tau_2)]\}, \quad (1)$$

$$\Delta = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr},$$

$$4\theta h^3 \Delta^2 w^* + 3N\Delta w^* = \\ = 3(\sigma_1 - \sigma_2) + \frac{3h}{r}\frac{d}{dr}[r(\tau_1 + \tau_2)],$$

полученные отбрасыванием членов порядка h^2 и выше в правых частях уточненных уравне-

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (05-01-00002), РФФИ_р_юг (06-01-96804_офи).

[2]Александров Виктор Михайлович, д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник лаборатории моделирования в механике деформируемого твердого тела Института проблем механики РАН.

[3]Зарубов Дмитрий Иванович, соискатель кафедры теории пластичности Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

ний осесимметричного изгиба плиты [3] и добавлением к левой части второго уравнения известного моментного члена вида $3N\Delta w^*$, описывающего всестороннее продольное сжатие пластины усилием N. В формулах (1) контактная жесткость $\theta = G_*(1-\nu_*)^{-1}$, G_* и ν_* — упругие характеристики пластинки, w^* — перемещение граней пластинки по оси z, $u^*_\pm$ — перемещения по оси r соответственно верхней и нижней граней пластинки, σ_k $(k = 1, 2)$ — нормальные усилия, τ_k $(k = 1, 2)$ — касательные усилия по направлениям оси r, действующие соответственно на верхнюю и нижнюю грани пластинки. Далее будем предполагать, что верхняя грань пластинки свободна от усилий, т. е. $\sigma_1(r) = \tau_1(r) \equiv 0$.

В силу условий полного механического контакта между поверхностями пластины и слоя будем на основании (1) для слоя иметь следующие граничные условия
при $z = H$:

$$4\theta h^2 \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right)u(r,H)\right] = \\ = -3\sigma(r) + \frac{4h}{r}\frac{d}{dr}[r\tau(r)], \quad (2)$$

$$4\theta H^3\Delta^2 w(r,H) + 6nh\Delta w(r,H) = \\ = -3\sigma(r) + \frac{3h}{r}\frac{d}{dr}[r\tau(r)] \quad (n = N/(2h)),$$

при $z = 0$:

$$u(r,0) = w(r,0) = 0. \quad (3)$$

В (2) $\sigma(r)$ и $\tau(r)$ — контактные напряжения, действующие между поверхностями пластинки и слоя.

Введем безразмерные координаты и перемещения

$$r' = \frac{r}{h}, \quad z' = \frac{z}{h}, \quad H' = \frac{H}{h}, \\ u' = \frac{u}{h}, \quad w' = \frac{w}{h} \quad (4)$$

(ниже штрихи опускаем) и будем искать решение уравнений Ламе для слоя, записанных в цилиндрической системе координат, в виде

$$u(r,z) = U(\alpha,z)\mathrm{J}_1(\alpha r), \\ w(r,z) = W(\alpha,z)\mathrm{J}_0(\alpha r), \quad (5)$$

где $\alpha > 0$ — параметр, характеризующий волнистость по r, $\mathrm{J}_1(x)$ и $\mathrm{J}_0(x)$ — функции Бесселя. Общее решение имеет вид

$$U = (c_1 + c_2\alpha z)\,\mathrm{ch}\,\alpha z + (d_1 + d_2\alpha z)\,\mathrm{sh}\,\alpha z, \quad (6)$$

$$W = (æc_2 - d_1 - d_2\alpha z)\,\mathrm{ch}\,\alpha z + \\ + (æd_2 - c_1 - c_2\alpha z)\,\mathrm{sh}\,\alpha z,$$

где c_i и d_i $(i = 1, 2)$ — произвольные функции от α, $æ = 3 - 4\nu$. По формулам закона Гука для используемых в дальнейшем напряжений в слое найдем

$$\tau_{rz} = T_{rz}(\alpha,z)\mathrm{J}_1(\alpha r), \quad \sigma_z = \Sigma_z(\alpha,z)\mathrm{J}_0(\alpha r),$$

$$T_{rz} = G\alpha[((1-æ)c_2 + 2d_1 + 2d_2\alpha z)\,\mathrm{ch}\,\alpha z + \\ + ((1-æ)d_2 + 2c_1 + c_2\alpha z)\,\mathrm{sh}\,\alpha z], \quad (7)$$

$$\Sigma_z = G\alpha[((1+æ)d_2 - 2c_1 - 2c_2\alpha z)\,\mathrm{ch}\,\alpha z + \\ + ((1+æ)c_2 - 2d_1 - 2d_2\alpha z)\,\mathrm{sh}\,\alpha z].$$

2. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу для слоя: при $z = H$

$$u(r,H) = a(\alpha)\mathrm{J}_1(\alpha r), \\ W(r,H) = b(\alpha)\mathrm{J}_0(\alpha r), \quad (8)$$

при $z = 0$ выполнены условия (3). С помощью формул (6) и (7) найдем

$$\tau(r) = T_{rz}(\alpha,H)\mathrm{J}_1(\alpha r) = T(\alpha)\mathrm{J}_1(\alpha r), \quad (9)$$

$$\sigma(r) = \Sigma_z(\alpha,H)\mathrm{J}_0(\alpha r) = \Sigma(\alpha)\mathrm{J}_0(\alpha r).$$

Определяя c_i, d_i $(i = 1, 2)$ по граничным условиям (3) и (8), имеем

$$\Sigma(\alpha) = G\alpha[M_{12}(\alpha H)a + N_1(\alpha H)b], \quad (10)$$

$$T(\alpha) = G\alpha[N_2(\alpha H)a + M_{21}(\alpha H)b],$$

$$N_k(u) = \frac{æ+1}{2}\frac{æ\,\mathrm{sh}\,2u - (-1)^k 2u}{æ^2\,\mathrm{sh}^2\,u - u^2} \quad (k = 1, 2),$$

$$M_{12}(u) = M_{21}(u) = \frac{2u^2 - æ(æ-1)\,\mathrm{sh}^2\,u}{æ^2\,\mathrm{sh}^2\,u - u^2}.$$

Подставляя (8)–(10) в формулы (2), придем к линейной однородной системе алгебраических уравнений относительно функций $a(\alpha)$ и $b(\alpha)$. В безразмерных величинах $\theta' = \theta/G$ и $n' = n/G$ (штрихи далее опущены) система будет иметь вид

$$f_1(\alpha)a + f_2(\alpha)b = 0,$$

$$f_3(\alpha)a + [f_4(\alpha) - 6n\alpha]b = 0,$$

$$f_1(\alpha) = 4\theta\alpha^2 + 4N_2(\alpha H)\alpha - 3M_{12}(\alpha H), \\ f_2 = 4M_{12}(\alpha H)\alpha - 3N_1(\alpha H), \quad (11)$$

H	8	4	2	1
		$\nu = 0,4845$		
α_1	0,0542	0,0659	0,0787	0,0937
α_2	0,0500	0,0635	0,0779	0,0934
α_3	0,0556	0,0661	0,0786	0,0935
n_1	1119,5	1756,3	2608,1	3760,8
n_2	923,74	1542,2	2442,2	3660,1
n_3	1344,8	1901,8	2689,6	3803,7
		$\nu = 0,4895$		
α_1	0,0578	0,0718	0,0864	0,1029
α_2	0,0518	0,0673	0,0844	0,1022
α_3	0,0611	0,0726	0,0864	0,1027
n_1	1234,6	2020,0	3087,9	4515,2
n_2	972,65	1681,0	2777,2	4304,1
n_3	1628,7	2303,3	3257,4	4606,7
		$\nu = 0,4945$		
α_1	0,0626	0,0809	0,1001	0,1204
α_2	0,0538	0,0720	0,0940	0,1177
α_3	0,0716	0,0851	0,1012	0,1204
n_1	1381,9	2422,3	3957,5	6032,2
n_2	1027,2	1850,9	3258,8	5416,6
n_3	2243,1	3172,2	4486,2	6344,4
		$\nu = 0,4995$		
α_1	0,0686	0,0959	0,1329	0,1809
α_2	0,0560	0,0778	0,1084	0,1504
α_3	0,1299	0,1545	0,1837	0,2185
n_1	1570,2	3066,8	5947,3	11286
n_2	1087,8	2057,9	3965,5	7662,7
n_3	7415,0	10486	14830	20973

$$f_3(\alpha) = 3M_{12}(\alpha H) - 3N_2(\alpha H)\alpha,$$

$$f_4(\alpha) = 4\theta\alpha^3 + 3N_1(\alpha H) - 3M_{12}(\alpha H)\alpha.$$

Для существования нетривиального решения системы (11) необходимо, чтобы

$$f_1(\alpha)[f_4(\alpha) - 6n\alpha] - f_2(\alpha)f_3(\alpha) = 0. \qquad (12)$$

Задавая разные значения α, т. е. разную волнистость по r, можно получить любое значение для безразмерного критического усилия потери устойчивости n. Однако существует значение α_*, при котором критическое усилие n_* минимально. Значения α_* и n_* соответствуют кратному корню уравнения (12), т. е. α_* и n_* могут быть одновременно найдены из системы уравнений (12) и

$$f_1'(\alpha)[f_4(\alpha) - 6n\alpha] + f_1(\alpha)[f_4'(\alpha) - 6n] - \\ - f_2'(\alpha)f_3(\alpha) - f_2(\alpha)f_3'(\alpha) = 0. \qquad (13)$$

Далее полученным таким образом значениям α_* и n_* будем придавать индекс 1.

3. Для случая проскальзывания без трения поверхностей пластины и слоя, т. е. отслоения покрытия от подложки (проскальзывания в горизонтальном направлении при сохранении их двухсторонней связи в вертикальном), решая вспомогательную задачу: при $z = 0$

$$u(r, 0) = w(r, 0) = 0, \qquad (14)$$

$$\tau_{rz}(r, H) = \tau(r) = 0,$$

$$w(r, H) = b(\alpha)\mathrm{J}_0(\alpha r),$$

с помощью формул (6) и (7) найдем

$$\sigma_z(r, H) = \sigma(r) = G\alpha b M(\alpha H)\mathrm{J}_0(\alpha r), \qquad (15)$$

$$M(u) = \frac{4}{æ + 1}\frac{æ^2 + 1 + 2æ\,\mathrm{ch}\,2u + 4u^2}{2æ\,\mathrm{sh}\,2u - 4u}.$$

Подставляя (14) и (15) во вторую формулу (2) в безразмерных величинах, будем иметь

$$[4\theta\alpha^3 - 6n\alpha + 3M(\alpha H)]b = 0. \qquad (16)$$

Для указанного случая проскальзывания без трения α_* и n_* найдем из системы уравнений (16) и

$$[12\theta\alpha^2 - 6n + 3M'(\alpha H)H]b = 0. \qquad (17)$$

Далее полученным таким образом значениям α_* и n_* будем придавать индекс 2.

Наконец, рассмотрим задачу в простейшей постановке [1], когда вместо упругого слоя

пластина взаимодействует без трения, но с сохранением двухсторонней связи в вертикальном направлении, с равносильным основанием Фусса–Винклера. При этом в (16) и (17) нужно положить

$$M(\alpha H) = \frac{æ + 1}{(æ - 1)\alpha H} \tag{18}$$

и тогда для α_* и n_* нетрудно получить замкнутые выражения

$$\alpha_* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{3(æ + 1)}{\theta H(æ - 1)} \right)^{1/4},$$

$$n_* = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{\theta(æ + 1)}{H(æ - 1)} \right)^{1/2}. \tag{19}$$

Далее этим значениям α_* и n_* будем придавать индекс 3.

Во всех трех случаях поверхность пластинки приобретает рельеф: чередование кольцевых складок с убывающей, как $r^{-1/2}$, от центра амплитудой. Расстояние в метрах между складками определяется формулой $l_s = j_s h/\alpha_*$, где j_s $(s = 1, 2, \ldots)$ — нули функции $\mathrm{J}_0(x)$. О горизонтальных смещениях верхней границы пластинки в случае полного сцепления ее нижней границы со слоем можно получить представление с помощью первой строчки формулы (1) и формул (9), (10).

4. Произведем сравнение результатов (таблица), полученных для трех приведенных здесь постановок задачи. При расчетах принято $E = 0,981$ МПа, $\nu = 0,4845 - 0,4995$ (материал типа резины), $E_* = 1,962 \cdot 10^5$ МПа, $\nu_* = 0,3$ (сталь), $G = 2E(1 + \nu)$, $G_* = 2E_*(1 + \nu_*)$.

Из таблицы видно, что для всех трех теорий критическое усилие увеличивается, а длина l_s, характеризующая собой форму потери устойчивости, уменьшается при увеличении ν. В то же время критическое усилие по теории 3 больше соответствующих значений по теориям 1 и 2, причем тем значительнее, чем ν ближе к 0,5. Критическое усилие по теории 1 всегда больше соответствующих значений по теории 2 (при $\nu = 0,4995$ оно в среднем больше на 31,6 %). Вычислениями также установлено, что при $\nu \leqslant 0,4$ результаты по всем трем теориям практически совпадают.

Литература

1. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979. 744 с.
2. *Александров В. М.* Устойчивость системы покрытие–подложка при продольном сжатии покрытия // Изв. РАН, МТТ. 2001. №4. С. 76–79.
3. *Авилкин В. И., Александров В. М., Коваленко Е. В.* Об использовании уточненных уравнений тонких покрытий в теории осесимметричных контактных задач для составных оснований // ПММ. 1985. Т. 49. Вып. 6. С. 1010–1018.

Статья поступила 21 марта 2006 г.
Институт проблем механики РАН
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
© Александров В. М., Зарубов Д. И., 2006