Математика

УДК 519.6

О ВОССТАНОВЛЕНИИ ПЛОТНОСТИ ОБЪЕМНОГО ПОТЕНЦИАЛА[1]

М. И. Дроботенко[2]

ABOUT RESTORING THE DENSITY OF A VOLUMETRIC POTENTIAL

Drobotenko M. I.

The class of uniqueness has been determined for the inverse problem of the volumetric potential theory. The approximate solution is considered. The latter is developed according to the finite number of potential values, specified with an error. The evaluation of exactness has been conducted.

Введение

Возникающая в гравитации задача определения плотности тела по гравитационному потенциалу приводит к обратной задаче теории потенциала.

Известно, что ненулевая масса может иметь нулевой внешний гравитационный потенциал, решение обратной задачи (ОЗ) гравиметрии неединственно [1, 2], поэтому важным становится построение классов единственности.

В настоящей работе показано, что в качестве такого класса единственности можно выбрать множество гармонических функций, придав при этом решению ОЗ некоторый энергетический смысл.

Другой проблемой в ОЗ гравиметрии является необходимость отыскания её решения по конечному числу значений внешнего потенциала, заданных неточно. В статье строится приближённое решение, определяемое этими значениями, приводятся полученные оценки точности, предлагаются способы выбора множества точек, в которых задается внешний потенциал.

1. Обозначения и вспомогательные результаты

В работе используются следующие обозначения: $\mathbf{R}^n$, $n = 2, 3$ — евклидово пространство векторов $x = (x^1, \ldots, x^n)$; $|x|^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (x^i)^2$; $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченная область с кусочно-непрерывной границей, такая что область $\Omega^+ = \mathbf{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ — односвязная; $|\Omega|$ — мера области Ω;

$X = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $x_i \in \Omega^+$, $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$;

$\varphi(x, y) = \dfrac{1}{2\pi} \ln \dfrac{1}{|x - y|}$ при $n = 2$ и $\varphi(x, y) = -\dfrac{1}{4\pi} \dfrac{1}{|x - y|}$ при $n = 3$; $\varphi_i(y) = \varphi(x_i, y)$, $i = \overline{1, \infty}$;

$L_2 = L_2(\Omega)$; $(\cdot, \cdot)$, $\|\cdot\|$ — скалярное произведение и норма в L_2; $\mathcal{L}(M)$ — линейная оболочка множества $M \subset L_2$; U — множество функций, гармонических в Ω.

Сформулируем в виде леммы свойства функций φ_i, $i = \overline{1, \infty}$.

Лемма 1

1. $\varphi_i \in L_2 \bigcap U$, $i = \overline{1, \infty}$;

2. Множество $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ линейно независимо в L_2.

[1]Работа выполнена при поддержке Минобразования России (ТО2-14.1-2492).

[2]Дроботенко Михаил Иванович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры численного анализа Кубанского государственного университета.

Здесь $\{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — ортонормированное множество функций, полученное из $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$;

$L = \overline{\mathcal{L}\left(\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}\right)}$, $L^{\perp}$ — ортогональное дополнение L в L_2;

$L^m = \mathcal{L}(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = \mathcal{L}(\psi_1, \ldots, \psi_m)$.

Определение 1. Пусть $\sigma \in L_2$. Функцию $V(x) = (\sigma, \varphi)(x) = \int_{\Omega} \sigma(y)\varphi(x, y)\, dy$, $x \in \mathbf{R}^n$ будем называть *объемным потенциалом* (или просто *потенциалом*), а σ — его *плотностью*.

Определим множество

$$H = \left\{\sigma \in L_2,\ (\sigma, \varphi)(x) = 0,\ x \in \Omega^+\right\}.$$

Лемма 2. Множество H — подпространство пространства L_2.

Доказательство. Линейность множества H очевидна. Докажем его замкнутость. Пусть $\sigma_k \in H$, $\sigma_k \to \sigma$ при $k \to \infty$. Тогда для произвольного $x \in \Omega^+$ получим

$$|(\sigma, \varphi)(x)| = |(\sigma - \sigma_k, \varphi)(x)| \leq \\ \leq \|\sigma - \sigma_k\| \left(\int_{\Omega} \varphi^2(x, y)\, dy\right)^{1/2} \to 0$$

при $k \to \infty$, поэтому $\sigma \in H$. Лемма доказана.

Следствие. L_2 можно представить в виде прямой суммы

$$L_2 = H \oplus H^{\perp},$$

где $H^{\perp}$ – ортогональное дополнение к H.

Для $\sigma \in L_2$ потенциал $(\sigma, \varphi)(x)$ — гармоническая в Ω^+ функция [3]. Пусть $M \subset \Omega^+$ — такое множество, что из $(\sigma, \varphi) = 0$ на M следует $(\sigma, \varphi) = 0$ в Ω^+. Для $n = 2, 3$ в качестве M можно взять, например, множество, содержащее внутреннюю точку [4], а для $n = 3$, кроме того, сферу, объемлющую область Ω [5]. Пусть теперь $X \subset M$ — плотное в M счетное множество. В силу непрерывности потенциала $(\sigma, \varphi)(x)$ в Ω^+ из $(\sigma, \varphi)(x_i) = 0$, $x_i \in X$, $i = \overline{1, \infty}$ следует $(\sigma, \varphi)(x) = 0$, $x \in M$, откуда $(\sigma, \varphi)(x) = 0$, $x \in \Omega^+$. Таким образом, в определении множества H условие $(\sigma, \varphi) = 0$ в Ω^+ можно заменить условием $(\sigma, \varphi_i) = 0$, $i = \overline{1, \infty}$.

Определение 2. Будем говорить, что множество X удовлетворяет *условию единственности*, если из $(\sigma, \varphi_i) = 0$, $i = \overline{1, \infty}$ следует $(\sigma, \varphi) = 0$ на Ω^+.

Установим теперь связь между подпространствами L и H.

Лемма 3. Пусть множество X удовлетворяет условию единственности, тогда $L = H^{\perp}$. Верно и обратное: если $L = H^{\perp}$, то X удовлетворяет условию единственности.

Доказательство. Пусть X удовлетворяет условию единственности, тогда из $(\sigma, \varphi_i) = 0$, $i = \overline{1, \infty}$ следует $(\sigma, \varphi) = 0$ на Ω^+, поэтому H можно определить в виде

$$H = \left\{\sigma \in L_2,\ (\sigma, \varphi_i) = 0,\ i = \overline{1, \infty}\right\}. \quad (1.1)$$

Из (1.1) вытекает, что $H = L^{\perp}$, поэтому $L = H^{\perp}$. Обратное утверждение леммы очевидно. Лемма доказана.

Следствие. Если множество X удовлетворяет условию единственности, то $L_2 = L \oplus H$.

2. Решение ОЗ и его свойства

Пусть $V(x) = (\sigma, \varphi)(x)$ — потенциал с плотностью $\sigma \in L_2$. Рассмотрим задачу об отыскании (восстановлении) плотности σ по заданным значениям потенциала $V(x)$, $x \in \Omega^+$. Если плотность потенциала $\sigma \in H$, то его значение в Ω^+ равно 0. Таким образом, множество решений в задаче восстановления плотности потенциала по его значению в Ω^+ необходимо сузить до пространства $H^{\perp}$. В лемме 2 установлено, что $H^{\perp} = L$ для множества X, удовлетворяющего условию единственности, что позволяет рассматривать задачу восстановления плотности потенциала по его значениям на счетном множестве $X \subset \Omega^+$. Это приводит к следующему определению.

Определение 3. Пусть множество X удовлетворяет условию единственности, $\sigma \in L_2$, $V(x) = (\sigma, \varphi)(x)$. *Решением обратной задачи* (ОЗ) будем называть функцию $\sigma' \in L$, удовлетворяющую равенствам

$$(\sigma', \varphi_i) = V(x_i), \quad i = \overline{1, \infty}. \quad (2.1)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $\sigma \in L_2$, X удовлетворяет условию единственности. Тогда

1) существует, причем единственное, решение ОЗ — функция $\sigma' \in L$;

2) $\sigma - \sigma' \in H$, т.е. $(\sigma', \varphi)(x) = V(x)$, $x \in \Omega^+$;

3) решение ОЗ не зависит от выбора множества X;

4) если $\sigma_1 \in L_2$ также удовлетворяет (2.1), $\sigma_1 \neq \sigma'$, то $\|\sigma'\| < \|\sigma_1\|$.

Доказательство. 1. Представим σ в виде $\sigma = \sigma' + \sigma''$, $\sigma' \in L$, $\sigma'' \in H$. Так как $(\sigma'', \varphi_i) = 0$, $i = \overline{1, \infty}$, то

$$(\sigma', \varphi_i) = V(x_i), \quad i = \overline{1, \infty},$$

таким образом, σ' удовлетворяет (2.1), т.е. σ' — решение ОЗ.

Покажем, что решение ОЗ единственно. Действительно, пусть $\sigma_1' \in L$ также удовлетворяет (2.1), тогда

$$(\sigma' - \sigma_1', \varphi_i) = 0, \quad i = \overline{1, \infty}. \tag{2.2}$$

В силу полноты $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ в L из (2.2) вытекает, что $\sigma' = \sigma_1'$.

2. По построению $\sigma - \sigma' = \sigma'' \in H$, откуда следует требуемое.

3. Пусть множества X_1, X_2 удовлетворяют условию единственности. Обозначим через σ_1, σ_2 соответствующие этим множествам ОЗ. Согласно п. 2 настоящей теоремы

$$\sigma_2 - \sigma_1 = (\sigma - \sigma_1) - (\sigma - \sigma_2) \in H. \tag{2.3}$$

Из леммы 2 следует, что σ_1, $\sigma_2 \in H^{\perp}$, поэтому $\sigma_2 - \sigma_1 \in H^{\perp}$. С учетом (2.3) получаем $\sigma_1 = \sigma_2$.

4. Пусть $\sigma_1 \in L_2$ удовлетворяет (2.1), $\sigma_1 \neq \sigma'$. Представим σ_1 в виде $\sigma_1 = \sigma_1' + \sigma_2''$, $\sigma_1' \in L$, $\sigma_2'' \in H$. Тогда σ_1' удовлетворяет (2.1). Из п.1 теоремы вытекает $\sigma_1' = \sigma'$. Поэтому $\|\sigma'\|^2 < \|\sigma'\|^2 + \|\sigma_1''\|^2 = \|\sigma' + \sigma_1''\|^2 = \|\sigma_1\|^2$, откуда $\|\sigma'\| < \|\sigma_1\|$. Теорема доказана.

Теорема 2. $H^{\perp} = L_2 \bigcap U$.

Доказательство. Пусть $X = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию единственности. Так как $x_i \notin \Omega$, то $\varphi_i \in U, i = \overline{1, \infty}$ [3]. Предел последовательности гармонических функций есть гармоническая функция [3], поэтому $L = \overline{\mathcal{L}(\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty})}$ содержит только гармонические функции, т.е. $L \subseteq U$. По лемме 2 $H^{\perp} = L$, таким образом, $H^{\perp} \subseteq L_2 \bigcap U$.

Пусть теперь $\sigma \in L_2 \bigcap U$. Предположим, что $\sigma \in H$. Рассмотрим функцию $v(x) = (\sigma, \varphi)(x)$. $\Delta v = \sigma$ в Ω [3], поэтому в силу $\sigma \in U$ получаем

$$\Delta\Delta v(x) = \Delta\sigma(x) = 0, \quad x \in \Omega.$$

Поскольку $\sigma \in H$, то $v(x) = 0$, $x \in \Omega^+$. Так как $\sigma \in U$, то v непрерывно дифференцируема в $\mathbf{R}^n$ [6], поэтому

$$v(x) = \lim_{\xi \to x, \xi \in \Omega^+} v(\xi) = 0,$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \lim_{\xi \to x, \xi \in \Omega^+} \frac{\partial v}{\partial \nu}(\xi) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Таким образом, v — решение задачи

$$\begin{gathered} \Delta\Delta v(x) = 0, \quad x \in \Omega; \\ v(x) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial \nu}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{gathered} \tag{2.4}$$

В силу единственности решения задачи (2.4) $v = 0$ в Ω, значит, $\sigma(x) = \Delta v(x) = 0$, $x \in \Omega$. Итак, в предположении $\sigma \in H$ приходим к $\sigma = 0$, следовательно, $\sigma \in H^{\perp}$, откуда $L_2 \bigcap U \subseteq H^{\perp}$. Окончательно получаем $H^{\perp} = L_2 \bigcap U$. Теорема доказана.

Из леммы 3 и теоремы 2 вытекает

Следствие. Множество функций $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ является плотным во множестве гармонических функций, принадлежащих L_2, тогда и только тогда, когда множество X удовлетворяет условию единственности.

3. Приближенное решение ОЗ

В практических задачах, например гравиразведки, требуется по конечному числу значений объемного потенциала, найденных с некоторой погрешностью, определить (приближенно) плотность этого потенциала [7, 8]. Пусть V — потенциал с плотностью $\sigma \in L_2$, множество $X = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию единственности, $V_i = V(x_i)$, $i = \overline{1, \infty}$. Заданы такие $m \in \mathbf{N}$, $\delta > 0$, $\{V_i^{\delta}\}_{i=1}^{m}$, что выполняется условие

$$|V_i - V_i^{\delta}| \leq \delta, \quad i = \overline{1, m}. \tag{3.1}$$

Теорема 3. Рассмотрим множество $\{V_i^{\delta}\}_{i=1}^{m}$, тогда

1) существует единственная функция $\sigma^m \in L^m$, удовлетворяющая условию

$$(\sigma^m, \varphi_i) = V_i^{\delta}, \quad i = \overline{1, m}, \tag{3.2}$$

2) если $\sigma \in L_2$ также удовлетворяет (3.2), $\sigma \neq \sigma^m$, то $\|\sigma^m\| < \|\sigma\|$.

Доказательство. Заметим, что $\sigma^m = \sum\limits_{i=1}^{m} \sigma_i^m \varphi_i$, поэтому (3.2) есть система линейных алгебраических уравнений относительно $\{\sigma_i^m\}_{i=1}^{m}$. Матрица этой системы — матрица Грама системы $\{\varphi_i\}_{i=1}^{m}$, откуда следует существование и единственность σ^m.

Представим σ в виде $\sigma = \sigma' + \sigma''$, $\sigma' \in L^m$, $\sigma'' \perp \sigma'$. Так как

$$(\sigma' - \sigma^m, \varphi_i) = (\sigma - \sigma^m, \varphi_i) = 0, \quad i = \overline{1, m},$$

то из п. 1 теоремы следует $\sigma' = \sigma^m$. Тогда

$$\|\sigma^m\|^2 < \|\sigma^m\|^2 + \|\sigma''\|^2 = \|\sigma^m + \sigma''\|^2 = \|\sigma\|^2.$$

Теорема доказана.

Определение 4. Найденную в теореме 2 функцию σ^m будем называть *приближенным решением ОЗ*.

Обозначим решение ОЗ через σ. Выясним, как зависит $\sigma^m - \sigma$ от m и δ.

Поскольку $\sigma \in L$, то $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \sigma_i \psi_i$. Определим функцию $\sigma(m) = \sum\limits_{i=1}^{m} \sigma_i \psi_i$, тогда

$$\|\sigma^m - \sigma\| \le \|\sigma^m - \sigma(m)\| + \|\sigma(m) - \sigma\|.$$

Так как $\|\sigma\|^2 = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 < \infty$, то

$$\|\sigma(m) - \sigma\|^2 = \sum_{i=m+1}^{\infty} \sigma_i^2 = \varepsilon_m^2 \to 0$$

при $m \to \infty$.

Оценим величину $\|\sigma^m - \sigma(m)\|$. Из (3.1) следует, что $|(\sigma^m - \sigma, \varphi_i)| = |V_i - V_i^\delta| \le \delta$, откуда

$$\left| \left(\sigma^m - \sigma, \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|} \right) \right| \le \delta \|\varphi_i\|^{-1}, \quad i = \overline{1, m}. \tag{3.3}$$

Оценим сверху величину $\|\varphi_i\|^{-1}$. Проделаем это вначале для $n = 2$. Пусть $x \in \Omega^+$. Обозначим $\Omega_k(x) = \left\{ y \in \mathbf{R}^2, |\varphi(x, y)| < k \right\}$. Очевидно, $|\Omega_k(x)|$ не зависит от x.

Пусть $k > 0$ такое, что $|\Omega_k(x)| \le d < |\Omega|$ для некоторого $d > 0$. Тогда

$$\|\varphi(x)\|^2 = \int_\Omega \varphi^2(x, y) dy \ge$$
$$\ge \int_{\Omega \setminus \Omega_k(x)} \varphi^2(x, y) dy \ge k^2 |\Omega \setminus \Omega_k(x)| \ge$$
$$\ge k^2 \left(|\Omega| - d \right) = \frac{1}{c^2}.$$

Итак, $\|\varphi(x)\|^{-1} \le c$ для любого $x \in \Omega^+$, поэтому $\|\varphi_i\|^{-1} \le c$, $i = \overline{1, m}$.

Для $n = 3$ неравенство $\|\varphi_i\|^{-1} \le c$ получим при условии ограниченности множества X. В этом случае существует такое $k > 0$, что для любого $y \in \Omega$ выполняется неравенство $|x_i - y| \le k$, $i = \overline{1, \infty}$. Тогда

$$|\varphi_i(y)| = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x_i - y|} \ge \frac{1}{4\pi k},$$

$$\|\varphi_i\|^2 \ge \frac{|\Omega|}{16\pi^2 k^2} = \frac{1}{c^2},$$

откуда $\|\varphi_i\|^{-1} \ge c$, $i = \overline{1, \infty}$.

Из неравенства (3.3) и полученной оценки для $\|\varphi_i\|$ следует неравенство

$$\left| \left(\sigma^m - \sigma, \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|} \right) \right| \le c\delta, \quad i = \overline{1, m}.$$

Пусть $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1}^m$, $\alpha_i \in \mathbf{R}$, $\alpha_i \ge 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i \le 1$, тогда из последнего неравенства получаем

$$\left| \left(\sigma^m - \sigma, \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \frac{\gamma_i \varphi_i}{\|\varphi_i\|} \right) \right| \le c\delta \tag{3.4}$$

для любого $\gamma = \{\gamma_i\}_{i=1}^m$, $\gamma_i \in \{-1, 1\}$.

Пусть M — выпуклая оболочка множества $\left\{ \frac{\pm \varphi_i}{\|\varphi_i\|} \right\}_{i=1}^m$. Поскольку множество функций $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$ линейно независимое, то существует такое $\lambda > 0$, что

$$M_\lambda = \{\eta \in L^m, \ \|\eta\| \le \lambda\} \subset M. \tag{3.5}$$

Неравенство (3.4) означает, что для любого $\eta \in M_\lambda$ выполняется неравенство

$$|(\sigma^m - \sigma, \eta)| \le c\delta. \tag{3.6}$$

Так как $\eta \in L^m$, то $\eta = \sum\limits_{i=1}^{m} \eta_i \psi_i$, поэтому

$$(\sigma, \eta) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i \psi_i, \sum_{i=1}^{m} \eta_i \psi_i \right) =$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{m} \sigma_i \psi_i, \sum_{i=1}^{m} \eta_i \psi_i \right) = (\sigma(m), \eta).$$

Следовательно, (3.6) можно переписать в виде

$$|(\sigma^m - \sigma(m), \eta)| \le c\delta.$$

Пусть теперь $\xi \in M_1$, тогда $\lambda\xi \in M_\lambda$, поэтому

$$|(\sigma^m - \sigma(m), \xi)| \le c\delta\lambda^{-1}. \tag{3.7}$$

С учетом $\sigma^m - \sigma(m) \in L^m$ из (3.7) получаем

$$\|\sigma^m - \sigma(m)\| \le c\delta\lambda^{-1}.$$

Таким образом, доказана

Теорема 5. Пусть функции σ и σ^m — решение и приближенное решение ОЗ; пусть выполнено условие (3.1) и множество X ограничено при $n = 3$, тогда существует такая константа λ, определяемая условием (3.5) и $c > 0$, не зависящая от m, что

$$\|\sigma - \sigma^m\| \le c\delta\lambda^{-1} + \varepsilon_m,$$

где $\varepsilon_m^2 = \sum\limits_{i=m+1}^{\infty} \sigma_i^2 \to 0$ при $m \to \infty$.

Следствие. Пусть множество $\{V_i^\delta\}_{i=1}^m$ удовлетворяет условию

$$\frac{|V_i - V_i^\delta|}{|V_i|} \le \delta, \ i = \overline{1, m}. \tag{3.8}$$

Тогда для решения ОЗ σ справедливо неравенство

$$\|\sigma - \sigma^m\| \le \delta\lambda^{-1}\|\sigma\| + \varepsilon_m,$$

где λ определяется условием (3.5), $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to \infty$.

Доказательство. Из (3.8) следует $|(\sigma^m - \sigma, \varphi_i)| \le \delta(\sigma, \varphi_i)$, $i = \overline{1, m}$, откуда

$$\left|\left(\sigma^m - \sigma, \frac{\varphi_i}{\|\varphi_i\|}\right)\right| \le \delta\|\sigma\|, \ i = \overline{1, m}.$$

Дальнейшее доказательство повторяет доказательство теоремы.

Литература

1. *Прилепко А. И.* Об обратных задачах теории потенциала // Дифференциальные уравнения. 1967. Т. 3. № 1. С. 30–44.
2. *Чередниченко В. Г.* К вопросу об определении плотности тела по заданному потенциалу // ДАН СССР. 1978. Т. 240. № 5. С. 1032–1035.
3. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977. 432 с.
4. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. М.: Наука, 1976. Ч. 1. 320 с.
5. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 528 с.
6. *Сретенский Л. Н.* Теория ньютоновского потенциала. М.; Л.: ОГИЗ-Гостехиздат, 1946. 318 с.
7. Гравиразведка: Справочник геофизика / Под ред. Е.А.Мудрецовой. М.: Недра, 1981. 398 с.
8. *Страхов В. Н.* О решении линейных обратных задач гравиметрии и магнитометрии // ДАН СССР. 1990. Т. 310. № 6. С. 1348–1352.

Статья поступила 15 апреля 2003 г.
Кубанский государственный университет
© Дроботенко М. И., 2004