УДК 517.958:52

О МОДЕЛИРОВАНИИ ПЕРЕНОСА СУБСТАНЦИИ ПЛЮМОВ В ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНО ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ[1]

Бабешко О. М.[2], *Зарецкая М. В.*[3]

ON THE MODELING OF TRANSFER OF PLUMES SUBSTANCES IN PLANE-PARALLEL MOVING MEDIUM

Babeshko O. M., Zaretskaya M. V.

The work considers the problem of assessing the action of the substances in convective movement, known as plumes, from the upper mantle on the lower base of the lithosphere plate. To model the Earth's layers including the asthenosphere, the upper mantle and subsequent layers down to the Gutenberg core boundary, the model of multi-layered deformable medium is taken. The problem investigated is aimed to define the character of the plume substances distribution on multi-type lower base of the Earth's crust taking into account different parameters of the upper mantle medium and velocities of motion.

1. Полученные в последние 10–15 лет результаты сейсмической томографии Земли позволили установить в первом приближении ее трехмерное строение.

По результатам интерпретация данных сейсмической томографии С. Маруяма предложил в 1994 г. основные положения геодинамической модели [1]. В Земле выделяется три главных области: тектоносфера, охватывающая кору и верхнюю мантию с переходной зоной, нижняя мантия, ядро. В тектоносфере справедлива тектоника плит, в нижней мантии — плюм-тектоника мантийных струй, в ядре — «тектоника роста», выражающаяся в разрастании внутреннего ядра за счет внешнего.

Первотолчком в геодинамических процессах служит механизм накопления тяжелого вещества субдуцируемых плит на границе между верхней и нижней мантией и его внезапного прорыва в нижнюю мантию в виде глобального нисходящего плюма, который приводит к образованию компенсирующего глобального восходящего плюма. Достигнув уровня 670 км, восходящие плюмы расщепляются, проникая далее в верхнюю мантию и порождая здесь восходящие течения, над которыми образуются оси спрединга срединно-океанских хребтов (в дальнейшем они могут отклоняться от породивших плюмов). Так совершается переход от плюм-тектоники к тектонике плит.

При дальнейшей эволюции геодинамической системы на границе 670 км (но уже в новых зонах субдукции) продолжается постепенное накопление тяжелого вещества, которое вновь завершается лавинным прорывом его критической массы в нижнюю мантию в виде нового глобального нисходящего плюма. Над ним постепенно формируется новый суперконтинент, затем цикл Вильсона повторяется вновь.

Основное внимание исследователей в наши дни приковано к двум глубинным уровням: границе на 670 км между нижней мантией и переходной зоной к верхней мантии и к границе на 2 900 км между мантией и ядром, к так называемому слою «D». Некоторое внимание уделяется также границе 400 (410) км между собственно верхней мантией и переходной к нижней мантии зоной (слой Голицына).

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (НШ-4839.2006.1), грантов РФФИ (06-01-96634, 06-01-96635, 06-01-96636, 06-01-96641, 06-08-00671, 06-01-00295, 06-01-08017-офи).

[2]Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат.наук, гл. научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета.

[3]Зарецкая Марина Валерьевна, канд. физ.-мат.наук, ст. научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета.

На всех этих границах наблюдается заметный скачок в изменении скорости распространения сейсмических волн, свидетельствующий о соответствующем изменении фазового состояния вещества, о смене одних минеральных видов с глубиной другими. На границе мантия – ядро происходит не только смена твердого состояния, характерного для мантии, жидким, характерным для внешнего ядра, но и замещение силикатов, слагающих мантию, железо-никелевым, с небольшой примесью некоторых других элементов, веществом ядра.

Граница 670 км — это в основном фазовая граница. Но существуют данные, что здесь может происходить и некоторое изменение химизма, в частности, увеличение содержания железа с глубиной.

Границе ядро – мантия придается исключительное значение: она рассматривается как базальный уровень зарождения мантийных струй — плюмов. Это справедливо, по крайней мере, для самых крупных из них, так называемых суперплюмов, проявляющихся на поверхности Земли не в виде горячих точек, а целых горячих полей. Однако другие мантийные струи могут подниматься и с меньших глубин, в частности, с границы 670 км.

Основной недостаток и тектоники плит, приводимых в движение мантийной конвекцией, и тектоники плюмов, ответственных за движения в мантии, заключается в том, что обе теории не принимали во внимание влияние движущихся континентов на мантийные процессы.

2. Так как плюм достигает подошвы литосферы, растекается вдоль нее на большие расстояния, концентрируется в виде слоя чистого расплава мощностью несколько километров, распределенного по большой площади, и происходит наращивание (подслаивание) коры снизу, нельзя говорить о равномерном воздействии на нижнее основание литосферных плит со стороны мантии.

Проведем исследование воздействия со стороны верхней мантии на нижнее основание литосферной плиты с учетом плоско-параллельных движений, вызываемых вращением Земли и торможением в связи с вязкостью среды.

Область движения восходящего плюма, включающую астеносферу, верхнюю мантию, слой Голицина, нижнюю мантию, слой «D», моделируем многослойной деформируемой средой.

Нижнее основание литосферных плит является разнотипным, так как имеются океанические участки, участки суши и рифтовые участки.

Коэффициент вязкости материала мантии составляет приблизительно 1 020 Па·с (по современным данным, 1 021 Па·с). Хотя это значение чрезвычайно велико, оно не бесконечно, и, следовательно, в геологических масштабах времени, можно считать, что мантия ведет себя как жидкость.

Для моделирования данного процесса развит метод исследования переноса субстанций (СБ) в многослойной среде и оседания на разнотипные подстилающие поверхности [2].

Считается, что слоистая среда, в которую попадает СБ, может в течение продолжительного времени сохранять набор слоев и их параметров при прямолинейном движении постоянными. В этом случае все функции, входящие в краевую задачу, можно считать не зависящими от времени и задача значительно упрощается. Дифференциальные уравнения переноса принимают вид

$$u_n\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}+v_n\frac{\partial\varphi_n}{\partial y}+(w_n-w_{ng})\frac{\partial\varphi_n}{\partial z}+\sigma_0\varphi_n-$$
$$-\nu_n\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial z^2}-\mu_n\left(\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial y^2}\right)=\delta_{nk}f_n,$$
$$f_n(x,y,z,t)=C\delta(x-x_{0n},y-y_{0n},z-z_{0n}),$$
$$C=\mathrm{const}.$$

Здесь $\mathbf{A}_n=\{u_n,v_n,w_n\}$ – векторы скоростей; w_{ng} — скорость подъема или опускания СБ, связанная с влиянием сил тяжести и архимедовых сил выталкивания; μ_n, ν_n — коэффициенты горизонтальной и вертикальной диффузий соответственно; σ_n — коэффициент поглощения; f_n — функция, описывающая внутренние источники выброса СБ.

Параметр δ_{nk} равен 1 для совпадающих индексов и нулю — для разнящихся.

Векторы скоростей должны удовлетворять уравнениям неразрывности

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_1}+\frac{\partial v_n}{\partial x_2}+\frac{\partial w_n}{\partial x_3}=0,$$

выполняющимся при принятых предположениях автоматически.

На границах сопряжения слоев задаются следующие граничные условия:

$$\varphi_k\left(x,y,z,t\right)=\varphi_{k+1}\left(x,y,z,t\right),\quad z=h_k,$$
$$\nu_k\frac{\partial\varphi_k(x,y,z,t)}{\partial z}=\nu_{k+1}\frac{\partial\varphi_{k+1}(x,y,z,t)}{\partial z},\quad z=h_k.$$

Решения краевых задач отыскиваются в классе функций, убывающих на бесконечности. На границе многослойной среды в разных ее зонах ставятся разнотипные граничные условия, свидетельствующие о разных механических свойствах нижнего основания литосферных плит, что приводит к разнотипному их поведению, т.е.

$$d_{NS}\frac{\partial \varphi_N}{\partial z} - \tau_{NS}\varphi_N = 0, \quad z = H, \quad x_1, x_2 \in \Omega_S.$$

Здесь d_{NS}, τ_{NS} — параметры, характеризующие степень «прилипания» субстанций к нижней поверхности литосферных плит.

Поставленная краевая задача известными методами может быть сведена к системе интегральных уравнений:

$$\sum_{n=1}^{N}\iint\limits_{\Sigma_n} k_m(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)q_n(\xi_1,\xi_2)d\xi_1 d\xi_2 = \\ = f_m(x_1,x_2), \quad (1)$$

$$x_1, x_2 \in \Omega_m,$$

$$k_m(x_1,x_2) = \\ = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{R^2} K_m(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)}d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$m = 1, 2, \ldots, N, \quad \mathbf{K} = \{k_m\}_1^N.$$

Функции $f_m(x_1,x_2)$ имеют сложное строение, зависят от типа источника и здесь не приводятся. Рассмотрим случаи различных m.

Случай $m = 1$. Система интегральных уравнений вырождается в одно уравнение свертки на всей плоскости, решаемое применением преобразования Фурье [2].

Случай $m = 2$, области Ω_m занимают полуплоскости.

Система (1) сводится к функциональному уравнению Винера-Хопфа и решается в замкнутом виде.

Например, для

$$f_m(x_1,x_2) = A_m \exp i\eta_m x_1,$$

$$m = 1, \quad x_1 > 0; \quad m = 2, \quad x_1 < 0;$$

$$\operatorname{Im}\eta_1 \geqslant 0, \quad \operatorname{Im}\eta_2 \leqslant 0.$$

решение имеет вид

$$q_m(x_1) = \mathbf{V^{-1}}(x_1)\frac{1}{K_1^+(\alpha_1)K_2^-(\alpha_1)}\sum_{m=1}^{2}\frac{G_m}{\alpha_1+\eta_m},$$

$$G_1 = \frac{iA_1K_2^-(-\eta_1)}{K_1^-(-\eta_1)}, \quad G = -\frac{iA_2K_1^+(-\eta_2)}{K_1^+(-\eta_2)},$$

$$m = 1, \quad x_1 > 0; \quad m = 2, \quad x_1 < 0.$$

Здесь $K_1^+(\alpha_1)$, $K_2^-(\alpha_1)$ — результаты факторизации соответствующих функций относительно вещественной оси.

Случай $m \geqslant 2$, области не являются полуплоскостями. Для исследования интегральных уравнений (1) нужно применять метод факторизации, предварительно перейдя к новым неизвестным.

Представим систему в виде

$$\mathbf{V^{-1}}\sum_{n=2}^{N}K_1^{-1}K_mF_n^- = \mathbf{V}^{-1}F_m - \mathbf{V^{-1}}K_1^{-1}K_mF_1,$$

$$\mathbf{x} \in \Omega_\mathbf{m}, \quad m = 2, \ldots, N.$$

Здесь функции $\sum\limits_{n=2}^{N}\mathbf{V^{-1}}F_n^-$ являются неизвестным продолжением правой части первого уравнения в системе (1) вне области Ω_1 во всей плоскости.

$$f_n^- = \mathbf{V^{-1}}F_n^- = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \notin \Omega_\mathbf{n}, \\ \neq \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \Omega_\mathbf{n}. \end{cases}$$

Для областей сложной конфигурации дальнейшее исследование этой системы требует применения методов геометрии многообразий.

Принимая во внимание, что мероморфные функции $K_m(\alpha)$ имеют лишь комплексные нули и полюса, выпишем приближенное, вырожденное, решение задачи:

$$q_n(\mathbf{x}) = \mathbf{V^{-1}}(\mathbf{x})\sum_{m=1}^{N}K_m^{-1}F_m + O(e^{-\xi|\mathbf{x}-\tau|}), \quad (2)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega_\mathbf{n}, \quad \tau \in \partial\Omega_\mathbf{n}.$$

Здесь ξ — минимальное значение модуля мнимой части ближайшего к вещественной оси нулевого множества функций $K_m(\alpha)$.

Функции (2) приближенно описывают решение во внутренних точках областей Ω_n. В том случае, если области Ω_m и Ω_n граничат по гладкой кривой, то в полосе, содержащей указанную кривую, решение может быть представлено в виде

$$q_p(x_1) = \\ = \mathbf{V^{-1}}(x_1)\left\{\frac{F_n^+}{K_{n1}} + \frac{F_m^-}{K_m} - \frac{1}{K_n^+(\alpha_1)K_m^-(\alpha_1)}\times \right. \\ \left. \times\left[\left(\frac{K_m^-F_n^+}{K_n^-}\right)^- + \left(\frac{K_n^+F_m^-}{K_m^+}\right)^+\right]\right\}, \quad (3)$$

$$p = n, \quad x_1 > 0; \quad p = m, \quad x_1 < 0;$$

Здесь ось x_1 с началом на границе, нормальна к ней и переходит из области Ω_m в область Ω_n.

Выражения (3) обосновывают возможность использования для описания оседания СБ в зонах, удаленных от границ областей Ω_m проекций решений краевых задач с соответствующими граничными условиями, но заданными на всей плоскости.

3. Если плоско-параллельное движение среды имеет характер кругового, запишем уравнения переноса СБ в цилиндрической системе координат

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\mu\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\lambda^2}\right]+$$
$$+v\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-v_\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}-v_\lambda\frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}-v_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\sigma\varphi=-f.$$

Здесь $\mathbf{b}=(v_\rho,v_\lambda,v_z)$ — вектор скорости в цилиндрических координатах.

Наряду с этим уравнением должно выполняться уравнение неразрывности вида

$$\operatorname{div}\mathbf{b}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho v_\rho)}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0,$$
$$\mathbf{b}=(v_\rho,v_\lambda,v_z).$$

Рассматривая среду с границами, параллельными плоскости z, в виде слоя толщины H, будем считать, что

$$\nu\frac{\partial\varphi}{\partial z}=g(\rho,\lambda),\quad z=H.$$

Найдем условия, при которых выполняются условия неразрывности. Рассмотрим два случая.

Первый случай. Положим $v_z=\text{const}$, $v_\lambda=v_{\lambda_0}\rho$, $v_{\lambda_0}=\text{const}$, $v_\rho=c_\rho\rho^{-1}$, c_ρ — постоянная, характеризующая направление скорости v_ρ. Этот случай отвечает исследованию поведения среды вблизи оси вращения как твердого тела.

Второй случай. Примем $v_\rho=c_\rho\rho^{-1}$, $v_z=\text{const}$, $v_\lambda=v_{\lambda_0}\rho^{-1}$, $v_{\lambda_0}=\text{const}$, c_ρ — постоянная, характеризующая направление скорости v_ρ. В этом случае рассматривается удаленность от оси вращения или разреженность среды.

Используя предложенный в [3] метод исследования и решения задач переноса для конвективных движений среды, получаем решение задачи в виде

$$\varphi_1(\rho)=\frac{1}{2\pi^2}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}I_{v_0}(u\rho)\,\rho^{-\alpha-\frac{1}{2}}\Phi_{1\prod}(u)\sqrt{u\rho}\,du,$$

$$g(\rho)=\delta(\rho,\rho_0),\quad G(u)=\rho_0^{\alpha+\frac{1}{2}}K_{v_0}(u\rho_0)\sqrt{u\rho_0},$$

$$\Phi_{1\prod}(u)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Phi_1(\xi)}{(\xi-u)}d\xi,\quad \operatorname{Re}u>0.$$

$$\Phi_1(u,\mathrm{K},z,p)=-\frac{e\tau^{\tau_1[H-z]}\operatorname{sh}\tau_2(H-z)}{\tau_1\operatorname{sh}\tau_2 H+\tau_2\operatorname{ch}\tau_2 H}G(u).$$

Литература

1. *Fukao Y., Maruyama S., Obayashi M., Inoue H.* Geologic implication of the whole mantle P-wave tomography // Jour. Geol. Soc. Japan. 1994. Vol. 100. №1. P. 4–23.
2. *Зарецкая М.В.* Моделирование процесса массопереноса в средах со сложным характером распределения параметров // Вычислительные технологии. 2003. Т. 8. №5. С. 58–62.
3. *Бабешко О.М.* К расчету экологических последствий спиралеобразных движений атмосферы и водных масс // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2004. №3. С. 57–60.

Статья поступила 8 декабря 2006 г.
Кубанский государственный университет