УДК 539.3

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ В МЕХАНИКЕ РАЗРУШЕНИЯ, МАТЕРИАЛОВЕДЕНИИ И СЕЙСМОЛОГИИ[1]

Евдокимова О. В.[2]

DIFFERENTIAL FACTORIZATION METHOD IN FRACTURE MECHANICS, MATERIALS STUDIES, AND SEISMOLOGY

Evdokimova O. V.

The differential factorization method described is used to study and solve systems of differential equations in partial derivatives in block structures. The possibility of its application to study a wide range of problems in fracture mechanics, materials science, and seismology is demonstrated. The advantages of the method in analyzing solutions of various problems are discussed. The examples of the application of the method to solve simple boundary-value problems are given in order to demonstrate its possibilities in comparison to other methods.

Дифференциальный метод факторизации (ДМФ), развиваемый для исследования краевых задач, описываемых системами дифференциальных уравнений в частных производных произвольного конечного порядка [1], явился удобным исследовательским аппаратом для изучения свойств решений задач различных областей науки. В механике деформируемого твердого тела метод позволяет получать общее представление решения в различных системах координат в блочных структурах. Метод позволяет однотипно исследовать задачи как с однородными, так и со смешанными граничными условиями. В частности, благодаря возможности исследования блочных структур, ДМФ позволяет изучать поведение материалов, имеющих дефекты сложной формы, тел с рельефными поверхностями, литосферных плит с горными массивами. Особенно эффективен метод при исследовании устойчивости взаимодействующих плит, поскольку позволяет учитывать их неклассическую форму в отличие от традиционных плоских областей. ДМФ удобен при анализе поведения материалов многокомпонентного блочного строения, поскольку позволяет в каждом блоке получить представление решения, описывающего поведение отдельных полей в различных зонах. Известно, что ДМФ опирается на использование аппарата топологической алгебры, внешнего анализа, элементов интегральной геометрии, факторизации матриц-функций многих комплексных переменных. Все это создает определенные трудности в использования этого метода, поскольку описанные математические средства не являются традиционными в задачах механики деформируемого твердого тела. В связи с этим в работе приводятся примеры, иллюстрирующие применение ДМФ к краевым задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений, решаемых другими методами.

1. Продемонстрируем применение ДМФ к следующей, достаточно общей краевой задаче для системы P дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в частных производных произвольного порядка в выпуклой трехмерной области Ω

$$\begin{gathered}
\mathbf{K}(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\boldsymbol{\varphi} = \\
= \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{p=1}^{P} A_{spmnk}\varphi_{p,x_1x_2x_3}^{(m)(n)(k)} = 0, \\
s = 1, 2, \ldots, P, \\
A_{sqmnk} = \mathrm{const}, \quad \boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_P\}. \\
\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_s\}, \quad \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2, x_3), \\
\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad \mathbf{x} \in \Omega.
\end{gathered} \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (06-01-00295, 06-01-08017, 06-08-00671), РФФИ_р_юг (06-01-96802, 06-01-96805, 06-05-96806, 06-01-96634, 06-01-96638), грант Президента РФ (НШ-4839.2006.1), программ отделения ЭММПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН.

[2]Евдокимова Ольга Владимировна, канд. физ.-мат. наук, заведующая кафедрой художественного проектирования костюма Кубанского государственного университета.

На границе $\partial\Omega$ задаются следующие граничные условия

$$\mathbf{R}(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\boldsymbol{\varphi} = \\ = \sum_{m=1}^{M_1}\sum_{n=1}^{N_1}\sum_{k=1}^{K_1}\sum_{p=1}^{P} B_{spmnk}\varphi_{p,x_1x_2x_3}^{(m)(n)(k)} = \\ = f_s, \quad (2)$$

$$s = 1, 2, \ldots, s_0 < P, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega,$$

$$M_1 < M, \quad N_1 < N, \quad K_1 < K.$$

Краевая задача порождает псевдодифференциальный оператор, эллиптическим символом которого является матрица-функция $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha})$.

Введенный псевдодифференциальный оператор действует в пространстве медленно растущих обобщенных функций $H_s(\Omega)$ и ограничен из $H_s(\Omega)$ в $H_{s-2}(\Omega)$ для любого s, где

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_s^2 = \sum \|\varphi_r\|_s^2,$$

$$\|\varphi_r\|_s^2 = \iiint_{-\infty}^{\infty} |F\varphi_r|^2 (1 + |\boldsymbol{\alpha}|)^{2s} d\boldsymbol{\alpha},$$

$$r = 1, 2, \ldots, M,$$

$$|\boldsymbol{\alpha}|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2,$$

$$d\boldsymbol{\alpha} = d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3, \quad d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 dx_3,$$

$$F\varphi_r = \iiint_{-\infty}^{\infty} \varphi_r(x) e^{i\langle\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x}\rangle} d\mathbf{x},$$

$$\varphi_r = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} F\varphi_r e^{-i\langle\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x}\rangle} d\boldsymbol{\alpha},$$

$$\langle\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}\rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3,$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}.$$

При $s > 0,5$ оператор понижения из Ω в $\partial\Omega$ действует как ограниченный из $H_s(\Omega)$ в $H_{s+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Решение $\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_m\}$ и заданные функции считаем принадлежащими некоторым пространствам $H_{\mathbf{p}}$, введенным выше. Предполагается, что введенная топология индуцирована евклидовой метрикой исходной системы координат.

Кратко изложим топологическую основу метода факторизации.

Приведенные соотношения можно рассматривать как дифференцируемое отображение векторного поля $\boldsymbol{\varphi}$, заданного на ориентированном многообразии с краем $M^3 \equiv (\Omega \cup \partial\Omega)$, в векторное поле на этом же M^3. Отображение осуществляется дифференциальным выражением, описываемым левыми частями приведенных соотношений.

Таким образом, с помощью линейного дифференциального отображения задается преобразование векторного поля $\boldsymbol{\varphi}$, заданного на M^3, в векторное поле $\mathbf{f}$ на M^3, т.е. автоморфизм. Необходимо по векторному полю $\mathbf{f}$ восстановить векторное поле $\boldsymbol{\varphi}$. С отображением связана некоторая, в общем случае бесконечная, некоммутативная, нераспадающаяся группа преобразований M^3 на себя.

Известно, что эта группа может быть представлена гомоморфизмом, отображающим ее в группу невырожденных линейных преобразований некоторого векторного пространства и, следовательно, в некоторую группу невырожденных матриц. Подчиняя преобразование описанному автоморфизму, получим необходимые соотношения для локального представления указанной группы преобразований. В тех случаях, когда область Ω оказывается простой — слоем, сферой, цилиндром, удается построить ее глобальное представление. Для обеспечения отмеченного автоморфизма необходимо отслеживать сохранение носителей у вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$ при дифференцируемом отображении. Более детально это излагается далее при применении метода факторизации к широкому кругу задач.

Применение ДМФ к системам краевых задач включает в себя выполнение некоторых действий [1], изложенных ниже.

2. Сведение дифференциальных уравнений к функциональному уравнению с помощью преобразования Фурье.

Трехмерным преобразованием Фурье

$$\Phi_n(\boldsymbol{\alpha}) = \iiint_{\Omega} \varphi_n(x) e^{i\langle\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x}\rangle} d\mathbf{x} \equiv F\varphi_n,$$

$$\Phi_m = F\varphi_m$$

задача сводится к функциональному уравнению

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\Phi} = \iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{\omega}, \quad (3)$$

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha}) \equiv -\mathbf{K}(-i\alpha_1, -i\alpha_2, -i\alpha_3) = \|k_{nm}(\boldsymbol{\alpha})\|,$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \{\Phi_m\}.$$

Здесь $\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha})$ — полиномиальная матрица-функция порядка P.

Вектор внешних форм $\boldsymbol{\omega}$ имеет в качестве компонент двумерные функции вида

$$\boldsymbol{\omega} = \{\omega_s\}, \quad s = 1, 2, \ldots, P,$$

$$\omega_s = P_{12s} dx_1 \Lambda dx_2 + P_{13s} dx_1 \Lambda dx_3 + \\ + P_{23s} dx_2 \Lambda dx_3. \quad (4)$$

Операции внешней формы имеют обозначения

$$dx_1 \Lambda dx_2 = dx_1^1 dx_2^2 - dx_1^2 dx_2^1,$$
$$dx_1 \Lambda dx_3 = dx_1^1 dx_2^3 - dx_1^3 dx_2^1,$$
$$dx_2 \Lambda dx_3 = dx_1^2 dx_2^3 - dx_1^3 dx_2^2.$$

Здесь введены векторы произвольной системы координат из покрытий касательного расслоения поверхности тела. В декартовой системе координат для касательных векторов произвольного элемента покрытия приняты обозначения

$$\mathbf{x}_1 = \left\{x_1^1, x_1^2, x_1^3\right\},$$
$$\mathbf{x}_2 = \left\{x_2^1, x_2^2, x_2^3\right\}.$$

Вид коэффициентов внешних форм приведен в [1].

3. Удовлетворение заданным граничным условиям (2).

Последнее достигается внесением в представление внешних форм решения $\boldsymbol{\varphi}(\partial\Omega)$ и его производных по нормали на $\partial\Omega$, взятых из граничных условий.

Наличие производных по касательным во внимание не принимается. Внешние формы содержат значения решения φ_n и его производных на границе $\partial\Omega$. Из граничных условий (2) подбором и обращением невырожденной матрицы находятся функции или производные по нормали на границе и вносятся в соответствующие представления внешних форм $\boldsymbol{\omega}$. Остальные функции или производные по нормали должны быть найдены из псевдодифференциальных уравнений, получаемых при преобразовании функциональных уравнений.

Для нахождения остальных неизвестных в представлении решения требуется выполнить следующие шаги.

4. Факторизация матрицы-функции $\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha})$ функционального уравнения.

Обозначим через λ_+ область, содержащую все нули z_{s+}^ν, $\operatorname{Im} z_{s+}^\nu > 0$, z_{s-}^ν, $\operatorname{Im} z_{s-}^\nu < 0$, $s\pm = 1, 2, \ldots, G_\pm$ определителя $K(\alpha_3^\nu) = \det \mathbf{K}(\alpha_3^\nu)$, а через λ_- — ее дополнение до всей плоскости с разделяющей области границей Γ.

Тогда, используя результаты работы [2], можно осуществить факторизацию матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu)$ в виде

$$\mathbf{K}(\alpha_3^\nu) = \mathbf{K}(\alpha_3^\nu, -)\,\mathbf{K}_r(\alpha_3^\nu). \quad (5)$$

Здесь матрица-функция $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu, -)$ регулярна в области λ_-, ее определитель не имеет в этой области нулей. Матрица-функция $\mathbf{K}_r(\alpha_3^\nu)$ имеет в качестве элементов полиномы переменного α_3^ν, а ее определитель не зависит от этого параметра. Таким образом, все нули по параметру α_3^ν определителя матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu)$ совпадают с нулями определителя матрицы- функции $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu, -)$, находящимися в области λ_+.

Элементы матрицы-функции $\mathbf{K}^{-1}(\alpha_3^\nu, -)$ представимы в интегральной форме.

Для их получения введем обозначения для матрицы-функции $\mathbf{K}^*(\alpha_3^\nu)$, сопряженной к матрице-функции $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu)$, положив

$$\mathbf{K}^*(\alpha_3^\nu) = \|M_{pn}(\alpha_3^\nu)\|.$$

Выберем матрицу-функцию $\mathbf{K}^*(\alpha_3^\nu, m)$ порядка $P-1$, получающуюся вычеркиванием строки и столбца под номером m у матрицы-функции $\mathbf{K}^*(\alpha_3^\nu)$, такую, что нули ξ_n^ν ее определителя $Q(\alpha_3^\nu) = \det \mathbf{K}(\alpha_3^\nu, m)$ не совпадают с нулями z_{s+}^ν, z_{s-}^ν.

Обозначим элементы обратной матрицы-функции следующим образом

$$[\mathbf{K}^*(\alpha_3^\nu, m)]^{-1} = \left\|Q^{-1} Q_{ps}\right\|.$$

Тогда элементы матрицы-функции $\mathbf{K}^{-1}(\alpha_3^\nu, -)$, имеющей вид

$$\mathbf{K}^{-1}(\alpha_3^\nu, -) = \\ = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ S_{m1} & S_{m2} & \ldots & S_{mm} & \ldots & S_{mN} \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

допускают интегральное представление в форме

$$S_{mp}(\alpha_3^\nu) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma_\mp} {\sum_{s=1}^{N}}' \frac{Q_{ps}(u_3) M_{sm}(u_3) du_3}{Q(u_3) K(u_3)(u_3 - \alpha_3^\nu)} - \\ - \left(\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}\right) \frac{R_{mp}(\alpha_3^\nu)}{K(\alpha_3^\nu)}, \quad m \neq p, \quad (7)$$

$$\frac{R_{mp}(\alpha_3^\nu)}{K(\alpha_3^\nu)} = \frac{Z_{mp}(\alpha_3^\nu)}{Q(\alpha_3^\nu) K(\alpha_3^\nu)} + \\ + \sum_n \frac{Z_{mp}(\xi_n^\nu)}{Q'(\xi_n^\nu) K(\xi_n^\nu)(\xi_n^\nu - \alpha_3^\nu)},$$

$$S_{mm}(\alpha_3^\nu) = K^{-1}(\alpha_3^\nu), \quad \alpha_3^\nu \in \lambda_\mp,$$

$$Z_{mp}(\alpha_3^\nu) = \sum_{s=1}^{N}{}' Q_{ps}(\alpha_3^\nu) M_{sm}(\alpha_3^\nu).$$

Здесь замкнутый контур Γ_+ занимает положение, при котором область λ_+ содержит только нули z_{s+}^ν, z_{s-}^ν, а область λ_- — только нули ξ_n^ν. Замкнутый контур Γ_- охватывает область, содержащую все нули z_{s+}^ν, z_{s-}^ν, ξ_n^ν.

Из этого представления следует, что элементы матрицы-функции $\mathbf{K}^{-1}(\alpha_3^\nu, -)$ являются рациональными функциями, единственными особенностями которых являются нули z_{s+}^ν, z_{s-}^ν, причем содержащая их составляющая $\mathbf{K}^{-1}(\alpha_3^\nu)$, выделена явно.

5. Сведение функционального уравнения к системе псевдодифференциальных уравнений.

Деформируем контур Γ_- таким образом, чтобы, не нарушив свойств по содержанию нулей z_{s+}^ν, z_{s-}^ν, ξ_n^ν, он ограничивал бесконечную полосу, включающую вещественную ось.

Будем рассматривать функциональное уравнение на вещественной оси в предположении, что на ней нет нулей z_{s+}^ν, z_{s-}^ν. Очевидно, нули z_{s+}^ν лежат в верхней полуплоскости, а z_{s-}^ν — в нижней.

В дальнейшем используем локальную систему декартовых координат $\mathbf{x}^\nu = \{x_1^\nu, x_2^\nu, x_3^\nu\}$, где первые две компоненты лежат в касательной плоскости к границе $\partial\Omega$, а третья — на внешней нормали. В каждой локальной системе координат осуществим операцию, обеспечивающую автоморфизм многообразия Ω. С этой целью, осуществив факторизацию (5), представим функциональное уравнение (3) в форме

$$\boldsymbol{\Phi} = \mathbf{K}_r^{-1}(\alpha_3^\nu)\,\mathbf{K}^{-1}(\alpha_3^\nu, -)\iint_{\partial\Omega}\boldsymbol{\omega}. \qquad (8)$$

Применяя к этому функциональному матричному уравнению обратное трехмерное преобразование Фурье, потребуем, чтобы исходная вектор-функция $\boldsymbol{\varphi}$ обращалась бы в нуль при $x_3^\nu > 0$, т. е. вне Ω. Опуская выкладки, приходим к соотношениям вида

$$\sum_{p=1}^{P}\iint_{\partial\Omega}\omega_p Z_{mp}(z_{s-}^\nu){=}0, \qquad (9)$$

$$s- = 1, 2, \ldots, G_-, \quad Z_{mm}(\alpha_3^\nu) = -Q(\alpha_3^\nu).$$

Простроенная система является псевдодифференциальными уравнениями.

6. Получение представления решения краевой задачи.

Допустим, с учетом п. 3, удалось решить систему псевдодифференциальных уравнений (9). Внесем найденные составляющие в вектор внешних форм (8) и применим трехмерное обращение Фурье к функции $\boldsymbol{\Phi}(\alpha)$. В результате получим соотношение

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^\nu) = \frac{1}{8\pi^3}\iiint_{-\infty}^{\infty}\mathbf{K}_r^{-1}(\alpha_3^\nu)\,\mathbf{K}^{-1}(\alpha_3^\nu, -)\times$$
$$\times\iint_{\partial\Omega}\boldsymbol{\omega}e^{-i\langle\alpha_3^\nu x_3^\nu\rangle}d\alpha_1^\nu d\alpha_2^\nu d\alpha_3^\nu, \quad \mathbf{x}^\nu\in\Omega.$$

Благодаря формулам (7), решение можно сделать более наглядным, вычислив интеграл по параметру α_3^ν по теории форм-вычетов Лере. В результате имеем

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^\nu) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int\sum_s e^{-i(\alpha_1^\nu x_1^\nu + \alpha_2^\nu x_2^\nu)}\times$$
$$\times\left[\mathbf{K}_r^{-1}\left(i\frac{\partial}{\partial x_3^\nu}\right)\mathbf{T}_+(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, z_{s+}^\nu)e^{-iz_{s+}^\nu x_3^\nu} -\right.$$
$$-\mathbf{K}_r^{-1}\left(i\frac{\partial}{\partial x_3^\nu}\right)\mathbf{T}_-\left(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, z_{s-}^\nu\right)\times$$
$$\left.\times e^{-iz_{s-}^\nu x_3^\nu}\right]d\alpha_1^\nu d\alpha_2^\nu, \quad (10)$$

$$t_{m\pm}\left(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, z_{s\pm}^\nu\right) = -\sum_{p=1}^{P}\iint_{\partial\Omega_\pm}\frac{\omega_p Z_{mp}(z_{s\pm}^\nu)}{Q(z_{s\pm}^\nu)K'(z_{s\pm}^\nu)},$$

$$\mathbf{T}_\pm = \{0, 0, \ldots, 0, t_{m\pm}, 0, \ldots, 0\}.$$

В этой формуле граница $\partial\Omega$ для выбранного $x_3^\nu < 0$, $\mathbf{x}^\nu\in\Omega$ разбита по следующему правилу:

$$\iint_{\partial\Omega}\boldsymbol{\omega} = \iint_{\partial\Omega_+}\boldsymbol{\omega} + \iint_{\partial\Omega_-}\boldsymbol{\omega},$$

$$\iint_{\partial\Omega_+}\boldsymbol{\omega}\mathrm{e}^{-i\alpha_3^\nu x_3^\nu}\to 0, \quad \operatorname{Im}\alpha_3^\nu\to\infty,$$

$$\iint_{\partial\Omega_-}\boldsymbol{\omega}\mathrm{e}^{-i\alpha_3^\nu x_3^\nu}\to 0, \quad \operatorname{Im}\alpha_3^\nu\to -\infty.$$

В случае полупространства или слоистой среды псевдодифференциальные уравнения (9) вырождаются в алгебраические, после обращения которых решение строится в конечном виде.

Особо остановимся на формуле (10). Ее достоинством является описание поведения решений, т. е. физических полей, которыми являются компоненты вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}^\nu)$, во внутренних зонах рассматриваемой области Ω. Изменяя значения параметра ν, т. е. выбирая разные касательные расслоения, получаем возможность сканирования всего тела на предмет градиентов решения при движении от границы. Заметим, что этот анализ возможен даже без решения псевдодифференциальных уравнений.

Поэтому с помощью ДМФ можно «рассматривать» свойства решений, а в случае, если нужны числовые значения, то первый их анализ можно проводить, изучив показатели экспоненциальных функций $e^{-iz_{s+}^\nu x_3^\nu}$, $e^{-iz_{s-}^\nu x_3^\nu}$, и уже затем вносить результаты решения псевдодифференциальных уравнений (9). Последние также можно решать в различных приближениях в зависимости от требований поставленной задачи. Таким образом, формула (10) несет в себе значительную информацию о решениях большого числа различных задач в произвольных блочных областях, в частности, перечисленных в преамбуле к статье. Некоторые примеры исследования материалов, имеющих подложки, где ДМФ оказывался удобным для исследования, изложены в [3, 4]. В то же время наличие подложек не является обязательным при применении ДМФ. В работах [5–9], имеющих практическое значение, метод применялся к блочным структурам без подложки. В тех случаях, когда области имеют сложное строение, применима более сложная обобщенная факторизация, приводящая к той же цели.

7. В связи со спецификой применения ДМФ ниже демонстрируется пример краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения, на котором показано применение различных методов ее решения, в том числе и ДМФ.

Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения вида

$$\varphi''_{xx} - k^2\varphi = 0,$$
$$\varphi(a) = f_1, \quad \varphi'(b) = f_2. \tag{11}$$

Ее решение легко строится экспонентной подстановкой, а именно

$$\varphi = Ae^{\lambda x},$$
$$\lambda^2 - k^2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = \pm k.$$

Примем $\lambda = -i\alpha$. Тогда характеристическое уравнение имеет вид

$$\alpha^2 + k^2 = 0, \quad \alpha_{1,2} = \pm ik,$$

т. е. одно значение из верхней полуплоскости, другое — из нижней.

Построим решение краевой задачи (11). Имеем

$$\varphi = c_1e^{kx} + c_2e^{-kx}, \tag{12}$$

$$\begin{cases} c_1e^{ka} + c_2e^{-ka} = f_1, \\ c_1k\,e^{kb} - c_2ke^{-kb} = f_2, \end{cases}$$

$$\Delta = k\left[-e^{-k(b-a)} - e^{k(b-a)}\right] = \\ = -2k\operatorname{ch}k\,(b-a)\,,$$

$$c_1 = -\frac{f_1ke^{-kb} + f_2e^{-ka}}{\Delta} = \frac{f_1ke^{-kb} + f_2e^{-ka}}{2k\operatorname{ch}k\,(b-a)},$$

$$c_2 = -\frac{f_1ke^{kb} - f_2e^{ka}}{\Delta} = \frac{f_1ke^{kb} - f_2e^{ka}}{2k\operatorname{ch}k\,(b-a)}.$$

Внося c_k в представление (12), получим решение краевой задачи. Возможен и другой путь решения.

Введем на границах области отрезка $[a, b]$ локальные системы координат, направленные вне области.

Применим к уравнению (11) преобразование Фурье по x, приняв формулы преобразования и обращения в виде

$$\Phi(\alpha) = F\varphi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,e^{i\alpha x}dx,$$
$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha)\,e^{-i\alpha x}d\alpha. \tag{13}$$

Решение отыскиваем в классе суммируемых функций с носителем на $[a, b]$, т. е. обращающихся в нуль вне отрезка.

Умножив уравнение (11) на $e^{i\alpha x}$ и проинтегрировав по всей оси, преобразуем по частям производные.

В результате уравнение (11) принимает вид

$$\left(\alpha^2 + k^2\right)\Phi(\alpha) = \varphi'(b)\,e^{i\alpha b} - \varphi'(a)\,e^{i\alpha a} - \\ - i\alpha\varphi(b)\,e^{i\alpha b} + i\alpha\varphi(a)\,e^{i\alpha a}. \tag{14}$$

Внесем в правую часть (14) заданные граничные условия (11). Отсюда получаем уравнение вида

$$\Phi(\alpha) = \left(\alpha^2 + k^2\right)^{-1} \times \times \left[f_2 e^{i\alpha b} - \varphi'(a) e^{i\alpha a} - i\,\alpha\varphi(b) e^{i\alpha b} + + i\alpha f_1 e^{i\alpha a}\right]. \quad (15)$$

Таким образом, из уравнения (15) необходимо найти две неизвестные $\varphi'(a)$ и $\varphi(b)$, затем, обратив функцию $\Phi(\alpha)$, найти решение исходного уравнения.

Условия для нахождения неизвестных из уравнения (15) могут быть сформулированы двумя способами.

8. Использование свойств целых функций. Используется голоморфность функции $\Phi(\alpha)$, а именно тот факт, что она является целой функцией как преобразование Фурье суммируемой на отрезке функции.

С учетом представления (15) это означает, что правая часть не может иметь полюсов в точках $\alpha = \pm ik$. Отсюда получаем следующую систему уравнений:

$\alpha = ik$,

$$f_2 e^{-kb} - \varphi'(a) e^{-ka} + + k\varphi(b) e^{-kb} - kf_1 e^{-ka} = 0,$$

$\alpha = -ik$,

$$f_2 e^{kb} - \varphi'(a) e^{ka} - - k\varphi(b) e^{kb} + kf_1 e^{ka} = 0.$$

Или

$$k\varphi(b) e^{-kb} - \varphi'(a) e^{-ka} = = kf_1 e^{-ka} - f_2 e^{-kb},$$

$$k\varphi(b) e^{kb} + \varphi'(a) e^{ka} = kf_1 e^{ka} + f_2 e^{kb}. \quad (16)$$

Имеем определитель

$$\Delta_1 = ke^{-k(b-a)} + ke^{k(b-a)} = = 2k \operatorname{ch} k(b-a) = -\Delta,$$

$$\Delta_1 \varphi(b) = \left(kf_1 e^{-ka} - f_2 e^{-kb}\right) e^{ka} + + \left(kf_1 e^{ka} + f_2 e^{kb}\right) e^{-ka} = = 2kf_1 + f_2 \left[e^{k(b-a)} - e^{-k(b-a)}\right] = = 2kf_1 + 2f_2 shk(b-a), \quad (17)$$

$$\Delta_1 \varphi'(\alpha) = \left(kf_1 e^{k\alpha} + f_2 e^{kb}\right) ke^{-kb} - - \left(kf_1 e^{-ka} - f_2 e^{-kb}\right) ke^{kb} = = 2kf_2 - 2f_1 k^2 \operatorname{sh} k(b-a).$$

Вносяя найденные значения (17) в (15), будем иметь

$$\Phi(\alpha) = \left(\alpha^2 + k^2\right)^{-1} \left\{ f_2 e^{i\alpha b} + i\alpha f_1 e^{i\alpha a} - - \frac{2\left[kf_2 - f_1 k^2 \operatorname{sh} k(b-a)\right] e^{i\alpha a}}{\Delta_1} - - \frac{i\alpha 2\left[kf_1 + f_2 \operatorname{sh} k(b-a)\right] e^{i\alpha b}}{\Delta_1} \right\}.$$

При $e^{i\alpha a}$ изучим коэффициент

$$\Phi(\alpha) = \left(\alpha^2 + k^2\right)^{-1} \times \times \left\{ \frac{e^{i\alpha a}\left[i\alpha\Delta_1 f_1 - 2kf_2 + 2f_1 k^2 \operatorname{sh} k(b-a)\right]}{\Delta_1} + + \frac{e^{i\alpha b}\left[f_2\Delta_1 - 2i\alpha k f_1 - 2i\alpha f_2 \operatorname{sh} k(b-a)\right]}{\Delta_1} \right\},$$

$$\Delta_1 = 2k \operatorname{ch} k(b-a).$$

Последнее можно переписать в виде

$$\Phi(\alpha) = (\alpha^2 + k^2)^{-1} \times \times \left\{ e^{i\alpha a}\left[2f_1\left(i\alpha k \operatorname{ch} k(b-a) + + k^2 \operatorname{sh} k(b-a)\right) - 2kf_2\right]\Delta_1^{-1} + + e^{i\alpha b}\left[2f_2\left(k \operatorname{ch} k(b-a) - - i\alpha \operatorname{sh} k(b-a)\right) - 2i\alpha k f_1\right]\Delta_1^{-1} \right\}. \quad (18)$$

Обращая преобразование Фурье, получим

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha = = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\alpha^2 + k^2\right)^{-1} \times \times \left\{ e^{i\alpha\alpha} g_1(\alpha) + e^{i\alpha b} g_2(\alpha) \right\} e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad (19)$$

$$\alpha \leqslant x \leqslant b.$$

Здесь g_1, g_2 — полиномы первой степени от параметра α.

Так как $x-\alpha \geqslant 0$, замыкая в нижнюю полуплоскость, имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\alpha(x-\alpha)}g_1(\alpha)}{\alpha^2+k^2}d_\alpha =$$

$$=\lim_{\alpha\to -ik}\frac{2\pi i e^{-i\alpha(x-\alpha)}g_1(\alpha)(\alpha+ik)}{(\alpha-ik)(\alpha+ik)}=$$

$$=\frac{2\pi i e^{-(x-a)k}g_1(-ik)}{(-2ik)\,2\pi}=$$

$$=-\frac{e^{-k(x-\alpha)}g_1(-ik)}{2k},$$

$$\alpha=\pm ik,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\alpha(b-x)}g_2(\alpha)}{\alpha^2+k^2}d\alpha =$$

$$=\lim_{\alpha\to ik}\frac{2\pi i e^{i\alpha(b-x)}g_2(\alpha)(\alpha-ik)}{(\alpha-ik)(\alpha+ik)\,2\pi}=$$

$$=\frac{e^{-k(b-x)}g_2(ik)}{2k}.$$

$$\Delta_1 g_1(-ik)=2f_1k^2e^{k(b-a)}-2kf_2.$$

$$\Delta_1 g_2(ik)=2f_2ke^{k(b-a)}+2k^2f_1.$$

Отсюда

$$\varphi(x)=e^{kx}\frac{g_2(ik)\,e^{-kb}}{2k\Delta}++e^{-kx}\left[-\frac{g_1(-ik)\,e^{ka}}{2k\Delta_1}\right],$$

$$\frac{g_2(i\,k)\;e^{-k\,b}}{2k\Delta_1}=+\frac{f_2e^{-ka}+kf_1e^{-kb}}{2k\operatorname{ch}k\,(b-a)}\equiv c_1,$$

$$-\frac{g_1(-i\,k)\,e^{ka}}{2a\Delta_1}=\frac{f_1ke^{kb}-f_2e^{ka}}{2k\operatorname{ch}k\,(b-a)}\equiv c_2.$$

Таким образом, получили значения неизвестных констант, в точности совпадающее с коэффициентами в (12).

Идеи использования свойств целых функций для построения решений пространственных интегральных уравнений легли в основу метода фиктивного поглощения и были применены для получения граничных уравнений для систем дифференциальных уравнений в частных производных. Недостатком этого метода в случае размерностей больших единицы является возможность исключения полюсов только для функций, заданных в выпуклых областях.

9. Метод факторизации (ДМФ). Повторим идею метода факторизации заключающуюся в следующем. Допустим, дифференциальное уравнение имеет непрерывное решение с несколькими своими производными в некоторой области с гладкой границей. Граничные условия понимаются как предельное значение решений и производных изнутри области по нормам.

Построив такое решение в области, для обеспечения автоморфизма отрезка вне границы следует положить это решение равным нулю, ограничив носитель строго областью задания дифференциальных уравнений.

Если для такого решения придется вычислять производные во всем пространстве, то на границе области неминуемо появятся производные от функций скачка, т. е. обобщенные функции класса медленно растущих, т. е. типа δ-функций и ее производных.

Понимая природу появления этих функций, можно, не взирая на их присутствие, строить решения краевых задач в таком расширенном пространстве с последующим исключением не влияющих на решение обобщенных функций.

Продемонстрируем применение этого метода к рассматриваемой краевой задаче (11).

Введем в соответствии с наличием границ две системы координат с началом на границе и направлением оси вне области задания краевой задачи (рисунок).

Очевидно, имеют место формулы перехода от старой, исходной системы координат x к новым, а также между собой. Они выражаются формулами

$$x-b=t_1,\quad x-a=-t_2,\quad t_1+t_2=a-b.$$

Применим в старой системе координат формулы преобразования и обращения Фурье для функции $\varphi(x)$

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha) &= \int\limits_a^b \varphi(x)\, e^{i\alpha x} dx,\\ \varphi(x) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha)\, e^{-i\alpha x} d\alpha.\end{aligned} \tag{20}$$

Перейдем к системе t_1, имеем $x = t_1 + b$, $t_1 = x - b$.

$$\Phi(\alpha) = \int\limits_{a-b}^{0} \varphi(t_1 + b)\, e^{i\alpha b} e^{i\alpha t_1} dt_1,$$

$$\varphi(t_1 + b) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha)\; e^{-i\alpha(t_1+b)} d\alpha.$$

Положим

$$\begin{aligned}\varphi(t_1 + b) &= \varphi_1(t_1),\\ \Phi(\alpha_1)\, e^{-i\alpha_1 b} &= \Phi_1(\alpha_1), \quad \alpha = \alpha_1.\end{aligned} \tag{21}$$

В результате в новой системе координат имеем

$$\Phi_1(\alpha_1) = \int\limits_{-(b-a)}^{0} \varphi_1(t_1)\, e^{it_1\alpha_1} dt_1,$$

$$\varphi_1(t_1) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(\alpha_1)\, e^{-it_1\alpha_1} d\alpha_1.$$

Перейдем теперь к системе t_2

$$\Phi(\alpha) = -\int\limits_{0}^{-(b-a)} \varphi(a - t_2)\; e^{i\alpha\alpha - i\alpha t_2} dt_2,$$

$$\varphi(a - t_2) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha)\, e^{-i\alpha(a-t_2)} d\alpha.$$

Для того чтобы иметь тот же вид интегралов преобразования и обращения Фурье, введем новое обозначение, положив

$$\begin{gathered}\alpha = -\alpha_2, \quad \Phi(-\alpha_2)\, e^{i\alpha_2 a} = \Phi_2(\alpha_2),\\ \varphi(a - t_2) = \varphi_2(t_2),\\ \Phi_2(\alpha_2) = \int\limits_{-(b-a)}^{0} \varphi_2(t_2)\, e^{i\alpha_2 t_2} dt_2,\end{gathered} \tag{22}$$

$$\varphi_2(t_2) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(\alpha_2)\, e^{-i\alpha_2 t_2} d\alpha_2.$$

Особенностью этих интегралов является то, что в обоих случаях в принятых системах координат область задания краевой задачи отрезок — $[a, b]$ находится на отрицательной полуоси и функции $\Phi_1(\alpha_1)$, $\Phi_2(\alpha_2)$ оказываются аналитическими продолжимыми в нижнюю полуплоскость. Отсюда обе функции $\varphi_1(t_1)$, $\varphi_2(t_2)$ обращаются в 0 при $t_K > 0$.

Построенные формулы перехода к локальным координатам t_k, α_k применим к уравнению (15). В результате приходим к соотношениям вида

$$\begin{aligned}\Phi_1(\alpha_1) = \left(\alpha_1^2 + k^2\right)^{-1} \times \\ \times \Big[f_2 - \varphi'(a)\, e^{-i\alpha_1(b-a)} - i\alpha_1\varphi(b) + \\ + i\alpha_1 f_1 e^{-i\alpha_1(b-a)}\Big],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_2(\alpha_2) = \left(\alpha_2^2 + k^2\right)^{-1} \Big[f_2 e^{-i\alpha_2(b-a)} - \\ - \varphi'(a) + i\alpha_2\varphi(b)\, e^{-i\alpha_2(b-a)} - \\ - i\alpha_2 f_1\Big].\end{aligned} \tag{23}$$

Важно заметить, что в формулах (23) заданные ранее, а также неизвестные значения функций и их производных на границе не изменяются.

Примем теперь во внимание, что обращения Фурье левых частей последних формул должны обращаться в нуль при $t_k > 0$. Обращая интегралы Фурье при $t_k > 0$, будем иметь

$$\begin{aligned}\varphi_1(t_1) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi_1(\alpha_1)\, e^{-i\alpha_1 t_1} d\alpha_1 = \\ = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\alpha_1^2 + k^2\right)^{-1} \times \\ \times \Big[f_2 - \varphi'(a)\, e^{-i\alpha_1(b-a)} - i\alpha_1\varphi(b) + \\ + i\alpha_1 f_1 e^{-i\alpha_1(b-a)}\Big] e^{-i\alpha_1 t_1} d\alpha_1.\end{aligned}$$

Для $t_k > 0$ интеграл допускает замыкание в нижнюю полуплоскость.

В нижней полуплоскости имеем полюс $\alpha = -ik$ и, вычисляя интеграл по вычетам, получаем для $t_k > 0$

$$\varphi_1\left(t_1\right) = \frac{e^{-kt_1}}{-2k}\left[f_2 - \varphi'(a)e^{-k(b-a)} - \right. \\ \left. - k\varphi(b) + kf_1 e^{-k(b-a)}\right] = 0,$$

$$\varphi_2\left(t_2\right) = \frac{e^{-kt_2}}{-2k}\left[f_2 e^{-k(b-a)} - \varphi'\left(a\right) + \right. \\ \left. + k\varphi\left(b\right)e^{-k(b-a)} - kf_1\right] = 0.$$

Отсюда, учитывая линейную независимость экспонент, имеем систему уравнений

$$f_2 - \varphi'\left(a\right)e^{-k(b-a)} - \\ - k\varphi\left(b\right) + kf_1 e^{-k(b-a)} = 0, \quad (24)$$

$$f_2 e^{-k(b-a)} - \varphi'\left(a\right) + \\ + k\varphi\left(b\right)e^{-k(b-a)} - kf_1 = 0,$$

которая после сокращения совпадает с системой (16).

В данном примере оба метода привели к одинаковым системам для определения неизвестных. Однако между ними есть существенное отличие, которое обнаруживается при переходе к краевым задачам в многомерных областях. Метод целой функции используется лишь для выпуклых областей, в то время как метод факторизации применим для любых областей с гладкой границей, а также с границей, допускающей угловые множества.

Вновь вернемся к формуле (19), которую перепишем в следующем виде:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\alpha x}}{(\alpha^2+k^2)\Delta_1}\times \\ \times\{2f_1 e^{id\alpha}[i\alpha k\operatorname{ch}k(b-a) + \\ + k^2\operatorname{sh}k(b-a)] - e^{i\alpha b}i\alpha k\} + \\ + 2f_2\{-ke^{i\alpha a} + e^{i\alpha b}[k\operatorname{ch}k(b-a) - \\ - i\alpha\operatorname{sh}k(b-a)]\}\times \\ \times\left[2k\operatorname{ch}k(b-a)\right]^{-1}d\alpha. \quad (25)$$

Проверим выполнение граничных условий (11) у функции $\varphi\left(x\right)$.

Для $a < x < b$ замыкаем контуры интегрирования для экспонент $e^{i\alpha a - i\alpha x}$ в нижнюю полуплоскость, а для $e^{i\alpha b - i\alpha x}$ — в верхнюю.

Имеем

$$\varphi(x) = \left\{\frac{1}{-2k}e^{-k(x-a)}\left\{2f_1[k^2\operatorname{ch}k(b-a) + \right.\right. \\ \left. + k^2\operatorname{sh}k(b-a)] - 2f_2k\right\} - \\ - \frac{1}{2k}e^{-k(b-x)}\left\{-2f_1k^2 + \right. \\ \left.\left. + 2f_2\left[k\operatorname{ch}k(b-a) + k\operatorname{sh}k(b-a)\right]\right\}\right\}.$$

Построив дифференцируемое в области решение $\varphi(x)$, без труда убеждаемся в том, что оно удовлетворяет граничным условиям (11) при $x = a$ и $x = b$.

Действительно

$$\Delta_1\varphi\left(a\right) = \left\{f_1ke^{k(b-a)} - f_2 + \right. \\ \left. + f_1ke^{-k(b-a)} + f_2\right\} = \Delta_1 f_1,$$

$$\Delta_1\varphi'(b) = \left\{e^{-k(b-a)}(-k)\left[f_1ke^{k(b-a)} - f_2\right] + \right. \\ \left. + k\left[f_1k + f_2e^{k(b-a)}\right]\right\} = \Delta_1 f_2,$$

$$\varphi\left(a\right) = f_1, \quad \varphi'\left(b\right) = f_2.$$

Докажем этот же факт, не вычисляя непрерывную составляющую решения, взяв интегралы, а воспользуемся лишь интегральным представлением (19).

Примем во внимание, что в этом представлении при $x > a$ числитель не обращается в нуль в точках $\alpha = \pm k$, а при $x = a$ он равен нулю. Положив $x = a$, деформируем контур интеграла так, чтобы он оказался выше полюса $\alpha = k$, а это означает, что других полюсов выше уже нет. При этом значение интеграла не изменится. Очевидно, интеграл от второй функции в фигурных скобках равен нулю, его можно замкнуть в верхнюю полуплоскость, так как нет полюсов и имеется экспоненциальное затухание. Изучим более детально оставшийся интеграл

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\Gamma}\frac{g_1(\alpha)}{\alpha^2+k^2}d\alpha = \\ = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\Gamma}\frac{2f_1\beta - 2kf_2}{\left(\alpha^2+k^2\right)2k\operatorname{ch}k(b-a)}d\alpha,$$

$$\beta = i\alpha k\operatorname{ch}k(b-a) + k^2\operatorname{sh}k(b-a).$$

Здесь контур Γ расположен выше всех полюсов. Очевидно, интеграл нельзя замкнуть для вычисления в верхнюю полуплоскость, поскольку он убывает только как α^{-1}. Поэтому деформируем контур интегрирования таким образом, чтобы он огибал все особенности, не пересекая их, а затем устремим контур к бесконечности и найдем вычет в бесконечно удаленной точке.

Примем во внимание, что особенности обходятся контуром по часовой стрелке. Тогда имеем

$$\varphi(a) = -2\pi i \lim_{\alpha\to\infty} \frac{g_1(\alpha)\,\alpha}{2\pi(\alpha^2+k^2)} = \\ = -\lim_{a\to\infty} \frac{2\pi i\alpha}{2\pi} \frac{2f_1 i\alpha \operatorname{ch} k(b-a)}{a^2 2k \operatorname{ch} k(b-a)} = f_1.$$

Остальные члены имеют предел, равный нулю.

Таким образом, функция $\varphi(x)$, представленная интегралом, имеет предельное значение на границе $x=a$, совпадающее с заданным.

Рассмотрим теперь граничную точку $x=b$, в которой производная должна обращаться в f_2.

В формуле (19) вычислим производную по x, предварительно выделив неубывающие члены. Сместив контур Γ_- до полюса $\alpha=-k$, не пересекая его, получим

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\Gamma} \frac{-i\alpha}{\alpha^2+k^2}\times \\ \times \left[e^{i\alpha a} g_1(\alpha) + e^{i\alpha b} g_2(\alpha)\right] e^{-i\alpha x} d\alpha.$$

Найдем формально $\varphi'(b)$

$$\varphi'(b) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_-} \frac{-i\alpha}{\alpha^2+k^2}\times \\ \times \left[e^{-i\alpha(b-a)} g_1(\alpha) + g_2(\alpha)\right] d\alpha. \quad (26)$$

Числитель в квадратных скобках обращается в нуль при $x=\pm k$, поэтому контур интегрирования Γ_- можно опустить ниже полюса $\alpha=-k$, при этом интеграл не изменится. Кроме того, в связи с наличием экспоненты пропадает интеграл, содержащий $g_1(\alpha)$. Преобразуя $g_1(\alpha)$ и $g_2(\alpha)$, имеем

$$\frac{g_1(\alpha)}{\alpha^2+k^2} = \\ = \frac{f_1 i\alpha \operatorname{ch} k(b-a) + k \operatorname{sh} k(b-a) - f_2}{(\alpha^2+k^2)\operatorname{ch} k(b-a)} = \\ = f_1\frac{i\,\alpha}{\alpha^2+k^2} + f_1\frac{k \operatorname{sh} k(b-a)}{(\alpha^2+k^2)\operatorname{ch} k(b-a)} - \\ - \frac{f_2}{(\alpha^2+k^2)\operatorname{ch} k(b-a)} = \\ = \frac{if_1}{\alpha} - \frac{ik^2 f_1}{\alpha(\alpha^2+k^2)} + \\ + f_1\frac{k \operatorname{sh} k(b-a)}{(\alpha^2+k^2)\operatorname{ch} k(b-a)} - \\ - \frac{f_2}{(\alpha^2+k^2)\operatorname{ch} k(b-a)}, \quad (27)$$

$$\frac{g_2(\alpha)}{\alpha^2+k^2} = \frac{f_2}{\alpha^2+k^2} - \\ - \frac{i\alpha \operatorname{sh} k(b-a) f_2}{(\alpha^2+k^2) k \operatorname{ch} k(b-a)} - \\ - \frac{i\alpha f_1}{(\alpha^2+k^2)\operatorname{ch} k(b-a)} = \\ = \frac{f_2}{\alpha^2+k^2} - \frac{if_2}{\alpha}\frac{\operatorname{sh} k(b-a)}{k \operatorname{ch} k(b-a)} - \\ - \frac{if_1}{\alpha}\frac{1}{\operatorname{ch} k(b-a)} + \\ + \frac{if_2 k \operatorname{sh} k(b-a)}{\alpha(\alpha^2+k^2) k \operatorname{ch} k(b-a)} + \\ + \frac{if_1 k^2}{\alpha(\alpha^2+k^2)\operatorname{ch} k(b-a)}.$$

Внеся в формулу (26) представление (27), будем иметь отдельные интегралы вида

$$\lim_{x\to o}\left[-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\left[\frac{if_2}{\alpha}\frac{\operatorname{sh} k(b-a)}{k \operatorname{ch} k(b-a)} + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{if_1}{\alpha}\frac{1}{\operatorname{ch} k(b-a)}\right](-i\alpha)e^{-i\alpha(b-x)}\right] = \\ = -f_2\frac{\operatorname{sh} k(b-a)}{k \operatorname{ch} k(b-a)}\delta(b-x) - \\ - f_1\frac{1}{\operatorname{ch} k(b-a)}\delta(b-x), \quad (28)$$

$$\varphi(b) = c_1 e^{kb} + c_2 e^{-kb} =$$
$$= \frac{1}{2k \operatorname{ch} k(b-a)} \left[\left(f_1 k e^{-kb} + f_2 e^{-ka} \right) e^{kb} + \right.$$
$$\left. + \left(f_1 k e^{kb} - f_2 e^{ka} \right) \right] =$$
$$= \frac{1}{2k \operatorname{ch} k\,(b-a)} \left[2k f_1 + f_2 2 \operatorname{sh} k(b-a) \right]. \quad (29)$$

Сравнивая (28) и (29), видим, что δ-функции и функции скачка при $x = b$ совпадают.

Обозначив функцию скачка $\theta\,(x)$

$$\theta\,(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

будем иметь продолженную на всю ось функцию $\varphi(x)$ в виде $\varphi(x)\theta(b-x)$.

Отсюда получаем для производной

$$\varphi'(x)\theta(b-x) - \varphi(x)\delta(b-x). \quad (30)$$

Последнее полностью совпадает с интегральным представлением. Одновременно представление (30) показывает, что при вычислении производной от функции $\varphi(x)$ могут образовываться аддитивные обобщенные функции — результат дифференцирования функции скачка, их следует отбрасывать.

Покажем удовлетворение граничному условию функцией $\varphi'\,(x)$ при $x \to b$, используя представление (26), а также последнее замечание о необходимости отбрасывания появляющихся δ-функций.

Внося формулы (27) в (26), отбрасывая члены, порождающие δ-функции, а также интегралы, подынтегральные функции которых убывают быстрее α^{-1}, деформировав контур Γ_- в контур C-окружность с движением против часовой стрелки, приходим к интегралу

$$\varphi'(b) = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_C \frac{(-i\alpha)\, f_2}{\alpha^2 + k^2}\, d\alpha = f_2.$$

Таким образом, представленное интегралом (25) решение удовлетворяет заданным граничным условиям. Проиллюстрированный пример показывает, что ДМФ является новым, не повторяющим известные методы исследования краевых задач и, как отмечено в [1], является естественным дополнением к интегральному методу Винера-Хопфа.

Автор выражает благодарность О. М. Бабешко за советы и рекомендацию опубликования приведенного примера.

Литература

1. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* Об интегральном и дифференциальном методах факторизации // ДАН. 2006. Т. 410. № 2. С. 168–172.
2. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Формулы факторизации некоторых мероморфных матриц-функций // ДАН. 2004. Т. 399. № 1. С. 26–28.
3. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* К проблеме исследования материалов с покрытиями. ДАН. 2006. Т. 410. № 1. С. 49–52.
4. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* К проблеме оценки состояния материалов с покрытиями // ДАН. 2006. Т. 409. № 4. С. 481–485.
5. *Евдокимова О. В., Барышев М. Г.* / Патент РФ на полезную модель № 43711. Текстильное изделие с электрическим обогревом. ФИПС. Москва, 27.01.2005.
6. *Барышев М. Г., Евдокимова О. В., Джимак С. С., Васильев Н. С.* Патент РФ на полезную модель № 53111. Комплекс для обеззараживания одежды и придания ей бактерицидных свойств. ФИПС. Москва, 10.05.2005.
7. *Барышев М. Г., Евдокимова О. В., Коржов А. Н.* Патент РФ на полезную модель № 49694. Одежда для релаксации. ФИПС. Москва, 10.12.2005.
8. *Евдокимова О. В., Барышев М. Г.* Патент РФ на полезную модель № 56388. Одежда из трикотажного материала. Москва, 20.07.2006.
9. *Евдокимова О. В., Басов А. А., Барышев М. Г., Джимак С. С.* Патент РФ на полезную модель № 56128. Одежда, предохраняющая от воздействия электромагнитного излучения. ФИПС. Москва, 10.09.2006.

Статья поступила 12 октября 2006 г.
Кубанский государственный университет