УДК 533.6

# КОЛЕБАНИЯ МАССИВНОЙ ТВЕРДОЙ ПЛАСТИНКИ НА СЛОЕ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

***Ефремов И. И.***[1]***, Лукащик Е. П.***[2]

OSCILLATIONS OF A MASSIVE SOLID PLATE ON A LAYER OF COMPRESSIBLE FLUID

Efremov I. I., Lukashchik E. P.

The effect of displacement of the mass center of a plate under the action of hydrodynamical forces of reaction of a layer of compressible fluid is investigated. The work demonstrates the opportunity of occurrence of infinite resonances at the frequencies smaller that the frequencies of lock-out of a layer as a wave guide.

В статье рассмотрен вопрос о влиянии соотношения присоединенной массы среды и массы пластинки на колебания последней на ограниченном слое акустической среды. Отмечается возможность появления бесконечных резонансов типа В-резонансов в задачах динамической теории упругости. Для слоя малой толщины получены простые аналитические формулы для определения величины нормальной гидродинамической силы.

## 1. Постановка задачи

Взаимодействие бесконечно тонкой массивной пластинки со слоем сжимаемой жидкости описывается уравнениями течения сжимаемой жидкости и колебаний твердой пластинки. Плоское безвихревое течение идеальной сжимаемой жидкости при гармонических колебаниях вида $f(x,t) = \bar{f}(x)e^{-i\omega t}$ описывается уравнением Гельмгольца для комплексной амплитуды потенциала скорости $\bar{\varphi}(x,y)$ (черточки над комплексными амплитудами опускаются)

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\varphi = 0. \qquad (1.1)$$

Здесь $\omega$ — круговая частота колебаний, $c$ — скорость звука в слое.

Краевое условие на нижней стороне пластинки

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -i\omega f + V_{y0}, \qquad (1.2)$$

где $f(x)$ — амплитуда вынужденных вертикальных колебаний центра масс пластинки, $V_{yo}$ — заданная вертикальная скорость точек пластинки при кинематическом возбуждении системы «массивная пластинка – слой сжимаемой жидкости».

На верхней свободной границе слоя должно выполняться условие постоянства давления $p = p_\infty$, которое трансформируется в условие

$$\varphi = 0 \text{ при } y = -0, |x| > a. \qquad (1.3)$$

На нижней твердой границе слоя выполняется условие непротекания

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \text{ при } y = -h, \forall x. \qquad (1.4)$$

На бесконечности впереди и позади пластинки должно выполняться условие излучения

$$\varphi_\pm = B_\pm e^{\pm i\sigma x + \sqrt{\sigma^2-\nu^2}y}, \quad \nu = \omega/c, \qquad (1.5)$$

где $B_\pm$ — ограниченные константы, а $\sigma > 0$ — волновые числа, определяемые условиями задачи.

Кроме того необходимо, чтобы на острых кромках пластинки выполнялось условие непрерывности и ограниченности давления (условие на ребре).

[1]Ефремов Ион Иванович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры вычислительной математики Кубанского государственного университета.

[2]Лукащик Елена Павловна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационных технологий Кубанского государственного университета.

Уравнение вертикальных колебаний центра масс твердой пластинки имеет вид

$$-M\omega^2 f = P - Q_0. \tag{1.6}$$

Здесь $M$ — масса пластинки, $P$ — главный вектор гидродинамических сил реакции слоя на колебания пластинки, $Q_0$ — главный вектор заданных возмущающих сил нагрузки на пластинку при динамическом возбуждении системы.

## 2. Сведение краевой задачи к интегральному уравнению

Краевая задача (1.1)–(1.5) сводится к сингулярному интегральному уравнению относительно интенсивности $\gamma(x)$ вихревого слоя, которым можно моделировать колеблющуюся пластинку

$$\gamma(x) = -\varphi_{x-}, \quad \frac{dp_-}{dx} = -i\omega\rho\gamma,$$

при $|x| \leqslant a$,

$$\gamma(\mathrm{x}) = 0 \text{ при } |x| > a. \tag{2.1}$$

где $p_-(x)$ — давление жидкости на нижнюю границу пластинки, $\rho$ — плотность жидкого основания.

Предполагая, что соответствующие условия выполнены, введем Фурье-образы функций

$$\Phi(\alpha, y) = F[\varphi(x,y)](\alpha, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y)e^{i\alpha x}dx,$$

$$\Gamma(\alpha) = F[\gamma(x)](\alpha) = \int\limits_{-1}^{1} \gamma(x)e^{i\alpha x}dx, \tag{2.2}$$

$$V(\alpha) = F[\varphi_y(x,0)](\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_y(x,0)e^{i\alpha x}dx.$$

Для определения функции $\Phi(\alpha, \mathrm{y})$ получим краевую задачу

$$\frac{d^2\Phi}{dy^2} - \alpha^2\Phi = 0,$$

$$\Phi_y = V(\alpha) \text{ при } y = 0, \tag{2.3}$$

$$\Phi_y = 0 \text{ при } y = -h,$$

Между Фурье-образами $\Phi(\alpha, \mathrm{y})$ и $\Gamma(\alpha)$ согласно интегралу Коши-Лагранжа имеет место соотношение

$$i\alpha\Phi(\alpha) = \Gamma(\alpha).$$

Решение краевой задачи представляется в виде

$$\Phi(\alpha, y) = A(\alpha)\,\mathrm{ch}(h\sqrt{\alpha^2-\nu^2}) + \\ + B(\alpha)\,\mathrm{sh}(h\sqrt{\alpha^2-\nu^2}),$$

что приводит к следующему уравнению в образах Фурье

$$\frac{\Gamma(\alpha)\sqrt{\alpha^2-\nu^2}}{i\alpha}\,\mathrm{th}(h\sqrt{\alpha^2-\nu^2}) = V(\alpha). \tag{2.4}$$

Применяя обратное преобразование Фурье, получим интегральное уравнение

$$\int\limits_{-a}^{a} \gamma(s)k(x-s)ds = -i\omega f + V_{y0}, \tag{2.5}$$

где

$$k(x) = F^{-1}[K(\alpha)](x),$$

$$K(\alpha) = \frac{\sqrt{\alpha^2-\nu^2}}{i\alpha}\,\mathrm{th}(h\sqrt{\alpha^2-\nu^2}).$$

Преобразование Фурье в данном случае следует рассматривать в смысле обобщенных функций. Поскольку

$$K(\alpha) \to -i\,\mathrm{sgn}\,(\alpha) \text{ при } \alpha \to \infty.$$

то ядро $k(x-s)$является сингулярным с особенностью типа Коши, и интеграл в уравнении (2.5) следует понимать в смысле главного значения. Кроме того, символ ядра $K(\alpha)$ может иметь полюсы на действительной оси комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$. По этой причине путь интегрирования вдоль действительной оси должен быть деформирован в соответствии с условиями излучения. В данном случае для этого достаточно обходить отрицательные полюсы сверху, а положительные — снизу.

Главный вектор сил давления на пластинку определяется через вихревую интенсивность $\gamma(\mathrm{x})$ по формулам

$$p_-(x) = \int\limits_{-a}^{x} \gamma(s)ds, P = i\omega\rho \int\limits_{-1}^{1} s\gamma(s)ds. \tag{2.6}$$

Здесь использована одна из форм условия на ребре — условие отсутствия перепада давления на кромках пластинки

$$\int_{-a}^{a} \gamma(s)ds = 0. \tag{2.7}$$

Таким образом, задача о колебаниях массивной пластинки описывается следующей системой уравнений

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{a}\gamma(s)ds\int_{l}\frac{\sqrt{\alpha^2-\nu^2}}{\alpha}\,\mathrm{th}(h\sqrt{\alpha^2-\nu^2})\times \\ \times e^{-i\alpha(x-s)}d\alpha = -i\omega f + V_{y0}(x), \tag{2.8}$$

$$\int_{-a}^{a}\gamma(s)ds = 0,$$

$$-\omega^2 Mf = i\omega\rho\int_{-a}^{a} s\gamma(s)ds - Q_0.$$

Здесь $l$ — контур вдоль действительной оси, деформированный в соответствии с условиями излучения.

Систему (2.8) приведем к безразмерному виду, введя безразмерные величины

$$\bar\gamma = \gamma/\omega a, \quad \bar h = h/a, \quad \bar\alpha = a\alpha, \quad \bar V_y = \bar V_y/\omega a,$$

$$\bar\nu = \omega a/c, \quad m = M/\rho a^2, \quad \bar Q = Q/\rho\omega^2 a^3,$$

$$\bar f = f/a, \quad \bar x = x/a, \quad \bar s = s/a.$$

Опустив черточки над безразмерными величинами, запишем систему разрешающих уравнений

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\gamma(s)ds\int_{l}\frac{\sqrt{\alpha^2-\nu^2}}{\alpha}\,\mathrm{th}(h\sqrt{\alpha^2-\nu^2})\times \\ \times e^{-i\alpha(x-s)}d\alpha + if = V_{y0}(x), \tag{2.9}$$

$$\int_{-1}^{1}\gamma(s)ds = 0,$$

$$i\int_{-1}^{1} s\gamma(s)ds - mf = Q_0.$$

Исключим из этой системы величину $f$ —- смещение центра масс, измеренное в долях полудлины пластинки, и получим одно сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{1}\gamma(s)ds\int_{l}\frac{\sqrt{\alpha^2-\nu^2}}{\alpha}\,\mathrm{th}(h\sqrt{\alpha^2-\nu^2})\times \\ \times e^{-i\alpha(x-s)}d\alpha - \\ -\frac{1}{m}\int_{-1}^{1} s\gamma(s)ds = V_{y0}(x) + \frac{i}{m}Q_0, \tag{2.10}$$

$$|x| \leqslant 1,$$

с дополнительным условием

$$\int_{-1}^{1}\gamma(s)ds = 0. \tag{2.11}$$

Решение уравнения (2.10) ищем в классе функций, неограниченных на кромках. Единственность такого решения обеспечивает дополнительное условие (2.11).

После решения интегрального уравнения (2.10) можно определить коэффициент нормальной гидродинамической силы, действующей на пластинку и смещение её центра масс.

## 3. Численное решение интегрального уравнения

Из достаточно широкого спектра методов численного решения сингулярных интегральных уравнений [1, 2] выберем один из вариантов метода коллокаций — метод квадратур Корнейчука [3]. Характерной особенностью метода Корнейчука, как и метода дискретных вихрей, является несовпадение узлов квадратурной формулы и точек коллокации, отличаются же эти два метода разными законами распределения названных точек. Согласно методу Корнейчука система уравнений (2.10) и (2.11) заменяется системой линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\pi}{N}\sum_{j=1}^{N}\gamma_j\sqrt{1-s_j^2}[k(x_l-s_j)-\frac{s_j}{m}] = \\ = V_{y0l} + \frac{i}{m}Q_0, \quad l = 1,\ldots,N-1; \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{N}\gamma_j\sqrt{1-s_j^2} = 0.$$

Здесь $N$ — число вихрей, заменяющих пластинку, $s_j$ — узлы квадратурной формулы, $x_l$ — точки коллокации, определяемые по формулам

$$s_j = \cos\frac{\pi(2j-1)}{2N}, \quad j = 1, \ldots, N,$$

$$x_l = \cos\frac{\pi l}{N}, \quad l = 1, \ldots, N-1.$$

## 4. Суммарные гидродинамические характеристики

После решения системы (3.1) суммарный коэффициент нормальной гидродинамической силы находят по формуле

$$c_n = \frac{P}{\rho\omega^2 a^3} = i\int\limits_{-1}^{1} s\gamma(s)ds.$$

Введем обозначение $d = -\int\limits_{-1}^{1} s\gamma(s)ds$, и уравнение (2.10) запишем в виде

$$\int\limits_{-1}^{1} \gamma(s)k(x-s)ds = V_{y0} + \frac{i}{m}Q_0 - \frac{d}{m}. \quad (4.1)$$

Пусть $d^*$ — значение величины $d$ при правой части уравнения (2.5), равной единице. Тогда

$$d = d^*\left(V_{y0} + \frac{iQ_0}{m} - \frac{d}{m}\right),$$

отсюда

$$d = \frac{d^*(mV_{y0} + iQ_0)}{m + d^*}. \quad (4.2)$$

Формула (4.2) дает наглядное представление о влиянии относительной массы на величину гидродинамической силы, поскольку $c_n = -id$.

В случае несжимаемой жидкости величину $d^*$ интерпретируют как коэффициент присоединенных масс.

Из формулы (4.2) следует, что учет влияния смещения центра масс существенен для относительно легких тел в плотной среде. При относительно больших по массе несущих поверхностях (металл в воздухе) можно ограничиться решением чисто гидродинамической задачи, соответствующей $m \to \infty$

## 5. Асимптотическое решение для слоя малой толщины

В случае малой толщины слоя $\bar{h} \ll 1$ вертикальную возмущенную скорость жидкости с точностью до величин $O(h^3)$ можно считать распределенной поперек слоя по линейному закону

$$\varphi_y = \frac{y+h}{h}(V_{y0} - i\omega f). \quad (5.1)$$

Из этого допущения следует, что потенциал скорости вдоль нижней границы пластинки описывается дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2\varphi_-}{dx^2} + \nu^2\varphi_- = -\frac{1}{h}\left(V_{y0} + \frac{iQ_0}{m} - \frac{d}{m}\right) \quad (5.2)$$

с краевыми условиями

$$\varphi_-(-1) = \varphi_-(1) = 0. \quad (5.3)$$

В результате решения краевой задачи (5.2)–(5.3) находим

$$d^* = \frac{2}{h\nu^2}(\operatorname{tg}\nu - \nu),$$

$$d = \frac{2(tg\nu - \nu)(mV_{y0} + iQ_0)}{mh\nu^3 + 2(\operatorname{tg}\nu - \nu)}. \quad (5.4)$$

Данная формула справедлива по крайней мере при частотах, меньших частоты $\nu = \pi/2h$ запирания слоя как волновода

В случае несжимаемой жидкости

$$d = \frac{2(mV_{y0} + iQ_0)}{3mh + 2}.$$

## 6. Анализ результатов

Результаты численных расчетов согласуются с выводами по асимптотической теории и свидетельствуют о существовании бесконечных резонансов в области частот, меньших частоты запирания волновода. Эти резонансы являются аналогами B-резонансов, установленных в динамических задачах теории упругости [4].

Здесь, как и в случае антиплоской динамической задачи чистого сдвига упругого слоя, названные резонансы существуют для всех значений относительных масс $m$. Для малых значений толщины слоя резонансные значения приведенной частоты можно определить как корни трансцендентного уравнения

$$mh\nu^3 + 2(\operatorname{tg}\nu - \nu) = 0. \quad (6.1)$$

Так, при $h = 0,1$ и $m = 10$ (рис. 1) резонансная приведенная частота примерно равна

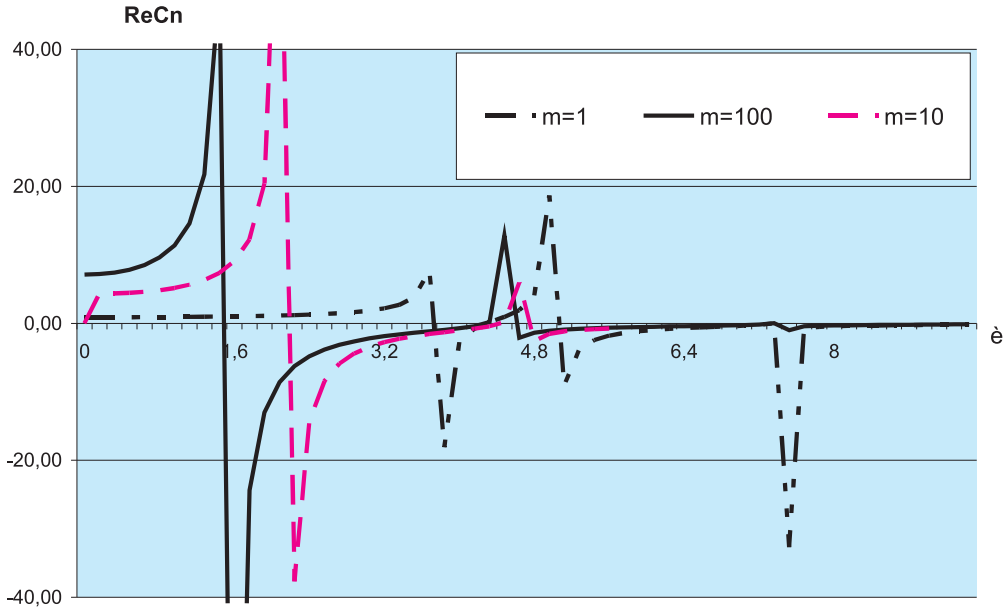



Рис. 1. Зависимость $\operatorname{Re} C_n$ от приведенной частоты при $h = 0,1$

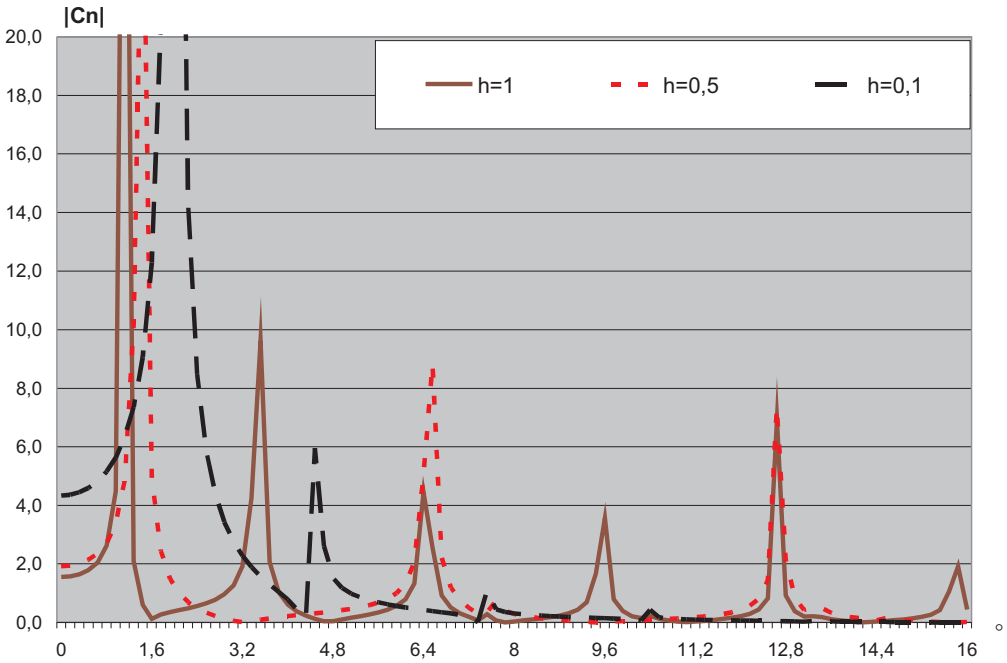



Рис. 2. Зависимость $|C_n|$ от приведенной частоты при $m = 10$

2 при расчете на основе интегрального уравнения, и 2,0174 по асимптотическому уравнению (6.1). С уменьшением относительной массы резонансные частоты возрастают.

На рис. 2. представлена зависимость $C_n$ от приведенной частоты при относительной массе $m = 10$ для различных значений толщины слоя. Наблюдается также возрастание резонансных частот с уменьшением относительной толщины слоя.

### *Литература*

1. *Белоцерковский С. М., Лифанов И. К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. М: Наука, 1985. 256 с.
2. *Габдулхаев Б. Г.* Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1994. 228 с.
3. *Корнейчук А. А.* Квадратурные формулы для сингулярных интегралов // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. Доп. к журн. «Вычислительная математика и математическая физика». 1964. Т. 4. № 4. С. 64–74.
4. *Ворович И. И., Бабешко В. А., Пряхина О. Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М: Научный мир, 1999. 248 с.

Статья поступила 15 февраля 2006 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар
© Ефремов И. И., Лукащик Е. П., 2006