УДК 510.67.554+556.5.072+517.958:52

МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ В ЗАДАЧАХ РАСПРОСТРАНЕНИЯ И ОСАЖДЕНИЯ СУБСТАНЦИЙ[1]

Павлова А. В.[2]***, Цыбульников А. А.***[3]

FACTORIZATION METHOD IN THE PROBLEMS OF SUBSTANCES TRANSPORT AND SETTLEMENT

Pavlova A. V., Tsibulnikov A. A.

The factorization method is used to solve stationary problems of substances transport. This method allows defining the concentrations distributions near multi-type underlying surfaces.

Исследования в области распространения и осаждения субстанций (СБ) востребованы при решении целого ряда научных и практических задач. Так, моделирование рассеяния примесей в атмосфере позволяет решать проблемы блокирования распространения загрязняющих веществ, оценки локального состояния окружающей среды и прогнозирования последствий воздействия на экосистему региона. Проблема описания воздействий глубинной активности Земли в верхней мантии на нижнее основание литосферных плит по границе Мохоровичича также может быть исследована с применением моделей конвекции–диффузии. Развиваемый подход также применим для решения проблемы проектирования материалов с заданными свойствами. Вопросы реализации различных моделей рассмотрены в [1–3].

В настоящей работе рассматривается применение метода факторизации к решению стационарных задач распространения СБ при учете их взаимодействия с неоднородной подстилающей поверхностью.

1. Дифференциальная формулировка модели распространения СБ для случая плоской подстилающей поверхности имеет вид

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\varphi_i \mathbf{a} - \mu \operatorname{grad} \varphi_i\right) + \left(\mathbf{B}\varphi\right)_i = f_i. \quad (1)$$

Здесь $\varphi\left(\mathbf{x}, t\right) = \left(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\right)$ — вектор концентраций (разностей концентраций и их фоновых значений) составляющих субстанции, $\mathbf{a} = (u, v, w - w_{gi})$, u, v, w – компоненты вектора скорости среды.

Через $\mu = \|\mu_{ij}\|$, $i, j = \overline{1,3}$ обозначен тензор коэффициентов диффузии (здесь и далее учитываются лишь диагональные элементы, $\mu_{ij} = 0$, $i \neq j$), $\mathbf{B}\varphi$ — оператор трансформации компонентов субстанции. В случае пассивных составляющих матрица $\mathbf{B} = \|\sigma_{ij}\|$ является диагональной ($\sigma_{ij} = 0$, $i \neq j$), σ_{ii} — характеристики скорости деградации (распада) компонентов СБ. Функция $f_i\left(\mathbf{x}, t\right)$ описывает распределение и мощность источника i-той компоненты φ_i, $\mathbf{x} = (x, y, z)$.

Важное место среди подобных моделей занимают стационарные модели. В случае если характеристики движения среды и коэффициенты диффузии можно считать постоянными, а компоненты СБ не взаимодействуют между собой, для описания распространения и осаждения отдельной составляющей может быть использовано стационарное уравнение

$$u\frac{\partial \varphi}{\partial x} + v\frac{\partial \varphi}{\partial y} + (w - w_g)\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \sigma\varphi - \\ - \mu\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) - \nu\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = f\left(x, y, z\right), \quad (2)$$

где $\mu_{11} = \mu_{22} = \mu$, $\mu_{33} = \nu$. Для сосредоточенного источника

$$f\left(x, y, z\right) = C\delta\left(x - x_0, y - y_0, z - z_0\right),$$

[1]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ (06-01-00295, 06-08-00671, 06-01-08017), РФФИ_р_юг (06-01-96802_офи, 06-01-96635, 06-01-96638) и гранта Президента РФ НШ-4839.2006.1.

[2]Павлова Алла Владимировна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета.

[3]Цыбульников Антон Андреевич, аспирант кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета.

$$C = \text{const},$$

характеризующая его мощность.

В качестве среды распространения рассматривается слой

$$D = \{(x, y, z) : -\infty < x, y < \infty, 0 \leqslant z \leqslant H\},$$

в котором все коэффициенты уравнения считаются постоянными, либо, в общем случае — изменяющимися по высоте. При рассмотрении стратифицированной по высоте среды, область D можно условно разбить на несколько подслоев, в каждом из которых компоненты вектора скорости и коэффициенты диффузии считаются постоянными. Такой подход позволяет использовать в каждом слое уравнение с постоянными коэффициентами [3–7].

Общий баланс содержания субстанции зависит не только от циркуляции среды, но и от обменных процессов с подстилающей поверхностью, от интенсивности осаждения СБ. Поэтому условия на нижней границе задаются с учетом свойств рассматриваемой территории и ее способности аккумулировать загрязняющие вещества. Подстилающая поверхность при этом считается разбитой на N разнотипных по свойствам зон Σ_n [2]

$$\Sigma_n: \quad L_l\varphi(x, y, z)|_{z=0} = f_n(x, y), \quad (x, y) \in \Sigma_n, \tag{3}$$

где

$$L_n = \left(\nu\frac{\partial}{\partial z} - \vartheta_n\right),$$

ϑ_n — величина, характеризующая взаимодействие СБ с подстилающей поверхностью n-того типа и зависящие от ее физических свойств, f_n — описывает источник на уровне поверхности в области Σ_n.

На верхней границе области D предполагается выход на фоновые значения концентрации

$$\varphi|_{z=H} = 0, \quad -\infty < x, y < \infty. \tag{4}$$

Задача (2)–(4) может быть сведена к системе интегральных уравнений, для построения которой рассматривается вспомогательная задача при заданном на всей подстилающей поверхности граничном условии [5–9]. В качестве такового может выступать произвольное граничное условие, например,

$$\nu\frac{\partial\varphi}{\partial z}\bigg|_{z=0} = g(x, y), \quad -\infty < x, y < \infty,$$

или

$$\left(\nu\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \vartheta_1\varphi\right)\bigg|_{z=0} = g(x, y), \quad -\infty < x, y < \infty, \tag{5}$$

где $g(x, y)$ — некоторая неизвестная функция (совпадающая с $f_1(x, y)$ при $(x, y) \in \Sigma_1$).

Вводя обозначения для проектора на Σ_s

$$\mathbf{P}_s(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Sigma_s, \\ 0, & (x, y) \notin \Sigma_s \end{cases}$$

для неизвестной функции поверхностного источника получим

$$\mathbf{P}_s g(x, y) = g_s(x, y) = \begin{cases} g(x, y), & (x, y) \in \Sigma_s, \\ 0, & (x, y) \notin \Sigma_s. \end{cases}$$

Используя решение (2), (4), (5), с учетом линейности рассматриваемой задачи интегральную характеристику концентрации СБ, можно представить в виде

$$\Phi(\alpha, \beta, z) = \Phi_1(\alpha, \beta, z)\, G(\alpha, \beta) + \Phi_2(\alpha, \beta, z), \tag{6}$$

$$\Phi_1(\alpha, \beta, z) = \frac{e^{\gamma z}\operatorname{sh}\chi(H - z)}{\nu\left(\gamma - \frac{\vartheta_1}{\nu}\right)\operatorname{sh}\chi H - \chi\operatorname{ch}\chi H},$$

$$\Phi_2(\alpha, \beta, z) = \frac{S(\alpha, \beta, z)P(\alpha, \beta, \vartheta_1, z)}{\nu\chi\left(\left(\gamma - \frac{\vartheta_1}{\nu}\right)\operatorname{sh}\chi H - \chi\operatorname{ch}\chi H\right)},$$

где

$$S(\alpha, \beta, z) = Ce^{i(\alpha x_0 + \beta y_0)}e^{\gamma(z - z_0)}\operatorname{sh}\chi(H - z_0),$$

$$P(\alpha, \beta, \vartheta_1, z) = \left[\left(\gamma - \frac{\vartheta_1}{\nu}\right)\operatorname{sh}\chi z - \chi\operatorname{ch}\chi z\right],$$

$\Phi(\alpha, \beta, z)$, $G(\alpha, \beta)$ — двумерные преобразования Фурье по x, y функций $\varphi(x, y, z)$ и $g(x, y)$; обозначения χ, γ введены в соответствии с [5, 7].

Подействовав на функцию

$$\varphi(x, y, z) = V^{-1}\Phi(\alpha, \beta, z)$$

в области $z = 0$, $(x, y) \in \Sigma_s$ дифференциальным оператором L_s, используя представление (6), приходим к системе интегральных уравнений

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K_s(\alpha, \beta)G_k(\alpha, \beta)\times e^{-i(\alpha x + \beta y)}\, d\alpha d\beta = q_s(x, y), \tag{7}$$

$$(x, y) \in \Sigma_s, \quad s = \overline{1, N},$$

где

$$q_s(x, y) = f_s(x, y) - m_s(x, y),$$

$$K_s(\alpha,\beta) = L_s\Phi_1(\alpha,\beta,0),$$

$$m_s(x,y) = \\ = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} L_s\Phi_2(\alpha,\beta,0)\, e^{-i(\alpha x+\beta y)}d\alpha d\beta,$$

$$(x,y)\in\Sigma_s,$$

G_k — преобразования Фурье функций $g_k(x,y)$, $k=\overline{1,N}$.

Внеся в (7) представление для G_k и поменяв порядок интегрирования, получим систему

$$\sum_{k=1}^{N}\iint\limits_{\Sigma_k} k_s(x-\xi,y-\eta)\, g_k(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta = \\ = q_s(x,y), \quad (8)$$

$$(x,y)\in\Sigma_s, \quad s=\overline{1,N},$$

где

$$k_s(x,y) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_s(\alpha,\beta)e^{-i(\alpha x+\beta y)}\, d\alpha d\beta.$$

Вопросы разрешимости и методы построения приближенных решений системы (8) рассмотрены в работах [5–7].

2. Рассмотрим описанную выше задачу при наличии двух разнотипных областей на подстилающей поверхности, например, $\Sigma_1 = \{x<0, -\infty<y<\infty\}$ и $\Sigma_2 = \{x\geqslant 0, -\infty<y<\infty\}$, при следующих граничных условиях:

$$\left(\nu\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\vartheta_1\varphi\right)\Big|_{z=0} = 0, \quad (x,y)\in\Sigma_1; \\ \left(\nu\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\vartheta_2\varphi\right)\Big|_{z=0} = f(x,y), \quad (9) \\ (x,y)\in\Sigma_2.$$

В этом случае (при $C=0$) система (8) сводится к интегральному уравнению

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{0}^{+\infty} k(x-\xi,y-\eta)\, g(\xi,\eta)\, d\xi d\eta = \\ = f(x,y),$$

$$x>0, \quad -\infty<y<+\infty,$$

$$K(\alpha,\beta) = \frac{\left(\gamma-\frac{\vartheta_2}{\nu}\right)\operatorname{sh}\chi H-\chi\operatorname{ch}\chi H}{\left(\gamma-\frac{\vartheta_1}{\nu}\right)\operatorname{sh}\chi H-\chi\operatorname{ch}\chi H}, \quad (10)$$

$$\chi = \chi(\alpha,\beta).$$

Это уравнение, в свою очередь, может быть преобразовано к виду

$$\int\limits_0^{\infty}\tilde{k}(x-\xi,\beta)\tilde{g}(\xi,\beta)d\xi = \tilde{f}(x,\beta), \quad (11)$$

$$x>0,$$

$$\tilde{g}(\xi,\beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(\xi,y)\, e^{i\beta y}\, dy,$$

$$\tilde{f}(\xi,\beta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,y)\, e^{i\beta y}\, dy.$$

Для построения решения интегрального уравнения (11) применяется метод Винера-Хопфа [9, 10]. При этом для факторизации функции $K(\alpha,\beta)$ ее нули и полюса находятся численно с помощью замены $\chi H = ip$. Далее, следуя [10], функция $K(\alpha,\beta)$ представляется в виде

$$K(\alpha,\beta) = \prod_k \frac{\left(\alpha-z_k^+\right)\left(\alpha-z_k^-\right)}{\left(\alpha-p_k^+\right)\left(\alpha-p_k^-\right)}K_1,$$

$$K_1 = \left(H_1(\alpha)+\alpha H_2(\alpha)\right),$$

где H_1, H_2 — функции четные, $z_k^{\pm} = z_k^{\pm}(\beta)$, $p_k^{\pm} = p_k^{\pm}(\beta)$. Каждая из этих функций после замены переменной $\alpha = \sqrt{\frac{A^2\varsigma}{1-\varsigma}}$, аппроксимируется полиномами Бернштейна вида $H(\varsigma) = \sum\limits_{s=0}^{n} \mathrm{C}_n^s H\left(\frac{s}{n}\right)\varsigma^s(1-\varsigma)^{n-s}$, тогда

$$K_1^*(\varsigma) = H_1^*(\varsigma) + \sqrt{\frac{A^2\varsigma}{1-\varsigma}}H_2^*(\varsigma),$$

параметр A определяется исходя из условия $\max|K_1-K_1^*(\varsigma)|\to\min$.

Нули аппроксимирующей функции отыскиваются с помощью комбинации градиентного метода и метода Ньютона. Производя обратную замену переменных, получим

$$K_1^*(\alpha) = \sum_s C_s\frac{A^{2(n-s)}\alpha^{2s}}{(\alpha^2+A^2)^n} + \\ + \alpha\sum_s D_s\frac{A^{2(n-s)}\alpha^{2s}}{(\alpha^2+A^2)^n}.$$

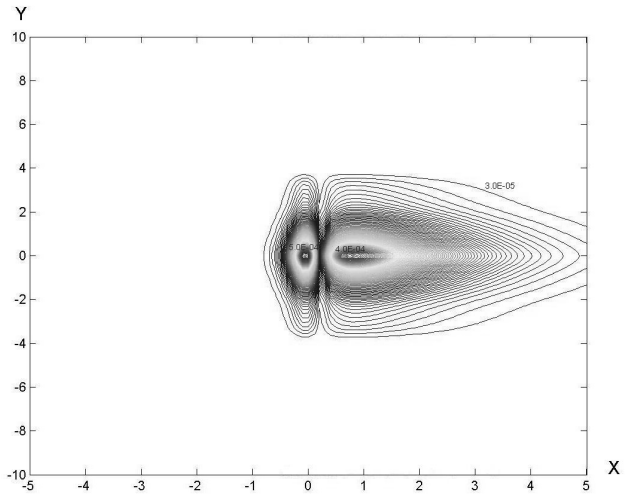

Рис. 1

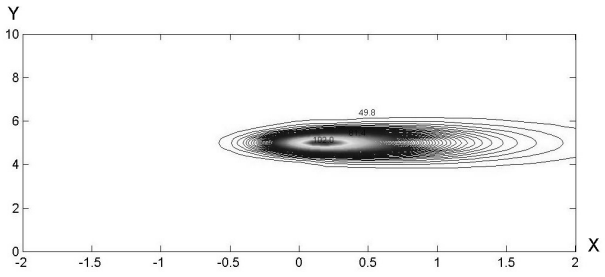

Рис. 2

В результате

$$K^+ = \prod_k \frac{\alpha - z_k^-}{\alpha - p_k^-} \frac{\prod\limits_s (\alpha - u_s)}{(\alpha + iA)^n},$$

$$K^- = \frac{K_1^*(\alpha)(\alpha + iA)^n}{\prod\limits_s (\alpha - u_s)} \prod_k \frac{\alpha - z_k^+}{\alpha - p_k^-}.$$

Следуя схеме метода Винера-Хопфа, будем иметь

$$G^+(\alpha, \beta) = \frac{1}{K^+(\alpha, \beta)} \left\{ \frac{F^+(\alpha, \beta)}{K^-(\alpha, \beta)} \right\}^+.$$

Распределение концентраций у поверхности для $f(x, y) = -e^{-|x|-|y|}$ приведено на рис. 1, при этом направление ветра совпадает с направлением оси OX, $z = 0,3$ (значения безразмерных параметров: $u = 5; w = 0; w_g = 0$; $\mu = 1$; $\nu = 0,1$; $\sigma = 1$; $\vartheta_1 = 1$, $\vartheta_2 = 10$).

При наличии сосредоточенного источника мощностью 100 в точке (x_0, y_0), $x_0 = 0,1$, $y_0 = 5$ распределение концентраций для приведенных выше параметров представлено на рис. 2.

3. Рассмотрим случай, когда подстилающая поверхность состоит из трех областей. Пусть при этом заданы граничные условия

$$\left(\nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \vartheta_1 \varphi \right) \Big|_{z=0} = 0,$$

$$(x, y) \in \{x \geqslant a, -\infty < y < \infty\} \cup \{x \leqslant -a, -\infty < y < \infty\};$$

$$\left(\nu \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \vartheta_2 \varphi \right) \Big|_{z=0} = f(x, y),$$

$$(x, y) \in \{-a \leqslant x \leqslant a, -\infty < y < \infty\}.$$

Система (8) сводится к интегральному уравнению [8]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-a}^{a} k(x - \xi, y - \eta)\, g(\xi, \eta)\, d\xi d\eta = f(x, y), \quad (12)$$

$$|x| \leqslant a, \quad -\infty < y < +\infty.$$

При этом ядро описывается функцией (10).

В свою очередь, уравнение (12) может быть представлено

$$\int_{-a}^{a} \tilde{k}(x - \xi, \beta)\, \tilde{g}(\xi, \beta)\, d\xi = \tilde{f}(x, \beta), \quad |x| \leqslant a.$$

Это уравнение также может быть решено методом факторизации. Следуя [11], получим систему из двух интегральных уравнений

$$X(\zeta, \beta) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty - ic}^{\infty - ic} \frac{K^-(\alpha, \beta)}{K^+(\alpha, \beta)} \frac{e^{-2ia\alpha}}{(\alpha + \zeta)} \times X(\alpha)\, d\alpha + N(\zeta, \beta),$$

$$Y(\zeta, \beta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty - ic}^{\infty - ic} \frac{K^-(\alpha, \beta)}{K^+(\alpha, \beta)} \frac{e^{-2ia\alpha}}{(\alpha + \zeta)} \times Y(\alpha)\, d\alpha + M(\zeta, \beta), \quad (13)$$

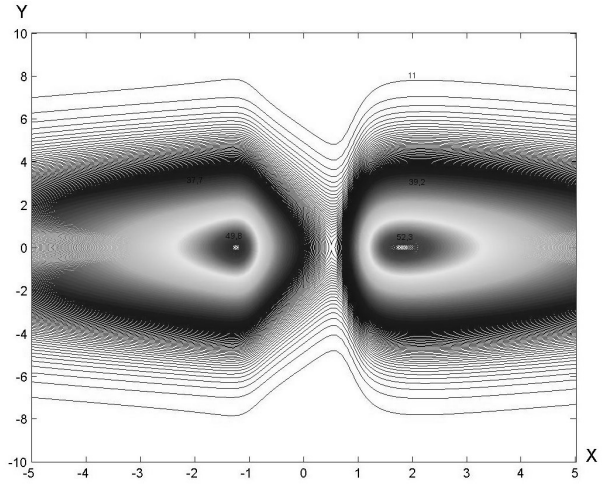

Рис. 3

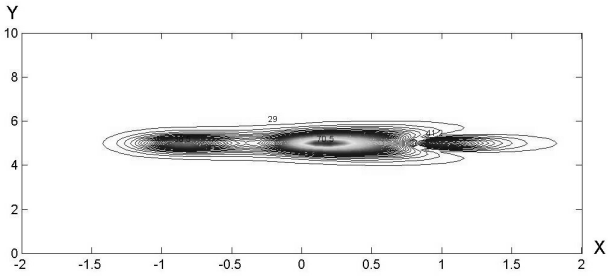

Рис. 4

$$N(\zeta,\beta)=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{-\infty+ic}^{\infty+ic}\left[\frac{F^{+}(\alpha,\beta)}{K^{-}(\alpha,\beta)(\alpha-\zeta)}-\right.$$
$$\left.-\frac{F^{-}(\alpha,\beta)}{K^{+}(\alpha,\beta)(\alpha+\zeta)}\right]d\alpha,\quad \operatorname{Im}\zeta<c,$$

$$M(\zeta,\beta)=-\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{-\infty+ic}^{\infty+ic}\left[\frac{F^{+}(\alpha,\beta)}{K^{-}(\alpha,\beta)(\alpha-\zeta)}+\right.$$
$$\left.+\frac{F^{-}(\alpha,\chi)}{K^{+}(\alpha,\beta)(\alpha+\zeta)}\right]d\alpha,\quad \operatorname{Im}\zeta<c.$$

Способ факторизации функции K в виде произведения описан выше. Применяя теорию вычетов к вычислению интегралов (13), получим

$$X(\alpha,\beta)=$$
$$=-\sum_{k}\frac{K^{-}(z_k^{-},\beta)e^{-2iaz_k^{-}}X(z_k^{-},\beta)}{(K^{+})'(z_k^{-},\beta)(\alpha+z_k^{-})}+N(\alpha,\beta),$$

$$Y(\alpha,\beta)=$$
$$=\sum_{k}\frac{K^{-}(z_k^{-},\beta)e^{-2iaz_k^{-}}Y(z_k^{-},\beta)}{(K^{+})'(z_k^{-},\beta)(\alpha+z_k^{-})}+M(\alpha,\beta),$$

Значения $X\left(z_k^{-},\beta\right), Y\left(z_k^{-},\beta\right)$ находятся из алгебраических систем, решаемых методом Гаусса, после подстановки $\alpha=z_k^{-}$.

Фурье-образ искомой функции $g(x,y)$ будет иметь вид

$$G(\alpha,\beta)=\frac{F}{K}+\frac{e^{ia\alpha}}{2K^{-}}\left(X(-\alpha,\beta)+Y(-\alpha,\beta)\right)+$$
$$+\frac{e^{-ia\alpha}}{2K^{+}}\left(X(\alpha,\beta)-Y(\alpha,\beta)\right).$$

Концентрация СБ на произвольной высоте описывается соотношением

$$\varphi(x,y,z)=\frac{1}{4\pi^2}\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{G(\alpha,\beta)\,e^{\gamma z}P(\alpha,\beta,\vartheta_2,H-z)}{(\gamma-\vartheta_1)\operatorname{sh}\chi H-\chi\operatorname{ch}\chi H}d\alpha d\beta,$$

На рис. 3–4 приведены результаты расчетов для источников, расположенных в полосе ($a=1$), рис. 3 соответствует $f(x,y)=-40e^{-|y|}$, рис. 4 — сосредоточенному источнику для описанных выше данных задачи.

Литература

1. *Марчук Г. И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука, 1982. 319 с.
2. *Пененко В. В., Алоян А. Е.* Модели и методы для задач охраны окружающей среды. Новосибирск: Наука, 1985. 254 с.
3. *Бабешко В. А., Гладской И. Б., Зарецкая М. В., Кособуцкая Е. В.* К проблеме оценки выбросов загрязняющих веществ источниками различных типов // ДАН. 1995. Т. 342. №6. С. 835–838.

4. *Бабешко О. М., Зарецкая М. В.* Влияние неоднородности земной поверхности на характер переноса и оседания примеси в атмосфере // Вестник МАН ВШ. Естеств. науки. 2002. № 1(14). С. 19–21.
5. *Бабешко О. М., Евдокимова О. В., Евдокимов С. М.* Об учете типов источников и зон оседания загрязняющих веществ // ДАН. 2000. Т. 71. № 1. С. 32–34.
6. *Бабешко О. М.* Об одном подходе в проблеме оценки загрязнения разнородных ландшафтов // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2003. № 1. С. 10–15.
7. *Бабешко О. М.* Новый подход в оценке оседания веществ на разнотипные поверхности // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2004. № 1. С. 82–87.
8. *Бабешко О. М., Павлова А. В., Пряхина О. Д., Смирнова А. В.* К решению смешанных задач для уравнения переноса // Современные проблемы механики сплошной среды: Труды VI Междунар. конф. Ростов н/Д: Изд-во СКНЦ ВШ, 2001. С. 28–31.
9. *Павлова А. В., Цыбульников А. А.* К решению интегральных уравнений задач осаждения примесей // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2006. Т. 13. Вып. 1. С. 132–133.
10. *Нобл Б.* Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Иностранная литература. 1962. 280 с.
11. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
12. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.

Статья поступила 3 декабря 2006 г.
Кубанский государственный университет
© Павлова А. В., Цыбульников А. А., 2006