

УДК 539.3

ТЕРМОУПРУГИЙ ИЗГИБ КОЛЬЦЕВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Старовойтов Э. И.¹, Леоненко Д. В.², Сулейман М.³

THERMOELASTIC BENDING OF A RING SANDWICH PLATE ON THE ELASTIC FOUNDATION

Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Suleyman M.

Thermoelastic bending of a ring sandwich plate with a light filler lying on the elastic foundation is considered. To describe kinematics of the package with asymmetrical thickness, the broken normal hypothesis was accepted. The foundation reaction was described based of the Winkler's model. The thermo-force loading was local, symmetric. Combined equations of equilibrium and analytical solutions via displacement were obtained. Numerical results for sandwich metal-polymeric plate were adduced.

Введение. Широкое применение в интенсивно развивающихся отраслях строительства и промышленности (авиа-, ракетостроение, транспортное машиностроение, реакторное оборудование) находят слоистые композитные элементы конструкций. Деформирование трехслойных систем, не связанных с упругим основанием различного рода нагрузками, описано в [1–4]. Изгиб сплошных однородных круговых пластин на упругом основании изучен в [5], трехслойных круговых пластин с легким наполнителем — в [6]. Здесь рассмотрено термосиловое деформирование поперечно нагруженной упругой кольцевой трехслойной пластины, связанной с деформируемым основанием.

Постановка задачи и ее решение проводятся в цилиндрической системе координат r , φ , z . Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к радиусу внешнего контура r_1 , через h_k обозначена относительная толщина k -го слоя. Для изотропных несущих слоев, толщиной h_1 , h_2 , приняты гипотезы Кирхгофа. Несжимаемый по толщине наполнитель ($h_3 = 2c$) легкий, т.е. в нем пренебрегается работой напряжений σ_{rz} в тангенциальном направлении. Локальная вертикальная нагрузка $q_0(r)$ действует на внешнюю поверхность пластины. На границах слоев перемещения непре-

рывны. На внешнем и внутреннем контурах пластины, радиусы которых r_0 и $r_1 = 1$, предполагается наличие жесткой диафрагмы, препятствующей относительному сдвигу слоев.

Пусть в начальный момент времени на рассматриваемую кольцевую пластину, находящуюся на упругом основании, начинают действовать симметричная вертикальная нагрузка $q_0(r)$ и тепловой поток интенсивности q_t , направленный перпендикулярно внешнему несущему слою (рис. 1). Задача определения соответствующего температурного поля рассмотрена в [1, 4], поэтому температура $T(z, t)$ считается известной и в дальнейшем вычисляется по формуле

$$T(z, t) = \frac{qH}{\lambda} \left\{ \tau + \frac{1}{2} \left(s + \frac{c + h_2}{H} \right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \times \right. \\ \left. \times \cos \left[\pi n \left(s + \frac{c + h_2}{H} \right) \right] e^{-n^2 \pi^2 \tau} \right\}. \quad (1)$$

Здесь $\tau = at/H^2$ — приведенное время (число Фурье), $s = z/H$ — безразмерная координата, $a = \lambda/C$, $\lambda = \lambda_k h_k/H$ — усредненная по толщине пластины теплопроводность, $C = \rho_k C_k h_k/H$ — усредненная теплоемкость,

¹Старовойтов Эдуард Иванович, д-р физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой строительной механики Белорусского государственного университета транспорта.

²Леоненко Денис Владимирович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры строительной механики Белорусского государственного университета транспорта.

³Сулейман Махфуд, аспирант кафедры строительной механики Белорусского государственного университета транспорта.

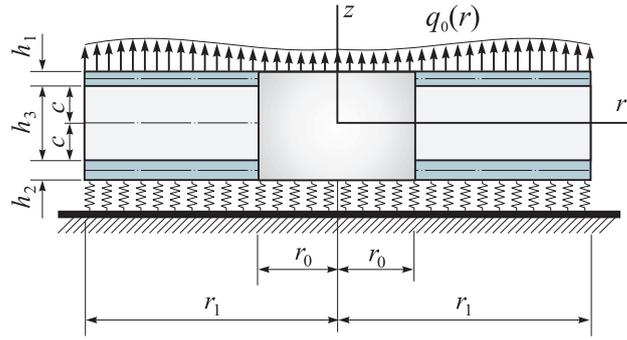


Рис. 1. Расчетная схема изгиба кольцевой трехслойной пластины на упругом основании

λ_k , C_k , ρ_k — коэффициенты теплопроводности, теплоемкости и плотность материала k -го слоя.

В силу симметрии термосиловой нагрузки тангенциальные перемещения в слоях отсутствуют: $u_\varphi^{(k)} = 0$ (k — номер слоя), а прогиб пластины, относительный сдвиг в заполнителе и радиальное перемещение координатной плоскости не зависят от координаты φ , т.е. $u(r)$, $\psi(r)$, $w(r)$. В дальнейшем эти функции считаются искомыми. Все перемещения и линейные размеры пластины отнесены к ее радиусу r_1 , через h_k обозначена относительная толщина k -го слоя.

Используя гипотезу прямолинейности нормали заполнителя $2\varepsilon_{rz}^{(3)} = u_{r,z} + w_{,r} = \psi$, после интегрирования получим выражения для радиальных перемещений в слоях $u_r^{(k)}$

$$u_r^{(1)} = u + c\psi - zw_{,r} \quad (c \leq z \leq c + h_1),$$

$$u_r^{(3)} = u + z\psi - zw_{,r} \quad (-c \leq z \leq c),$$

$$u_r^{(2)} = u - c\psi - zw_{,r} \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c), \quad (2)$$

где z — координата рассматриваемого волокна, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Деформации в слоях выражаются из (2) и соотношений Коши

$$\varepsilon_r^{(1)} = u_{,r} + c\psi_{,r} - zw_{,rr},$$

$$\varepsilon_\varphi^{(1)} = \frac{1}{r}(u + c\psi - zw_{,r}),$$

$$\varepsilon_r^{(2)} = u_{,r} - c\psi_{,r} - zw_{,rr},$$

$$\varepsilon_\varphi^{(2)} = \frac{1}{r}(u - c\psi - zw_{,r}),$$

$$\varepsilon_r^{(3)} = u_{,r} + z\psi_{,r} - zw_{,rr},$$

$$\varepsilon_\varphi^{(3)} = \frac{1}{r}(u + z\psi - zw_{,r}),$$

$$\varepsilon_{rz}^{(1)} = 0, \quad \varepsilon_{rz}^{(2)} = 0, \quad \varepsilon_{rz}^{(3)} = \frac{1}{2}\psi. \quad (3)$$

Физические уравнения состояния принимаются в виде

$$s_\alpha^{(k)} = 2G_k(T_k)\varepsilon_\alpha^{(k)} \quad (\alpha = r, \varphi),$$

$$s_{rz}^{(3)} = 2G_3(T_3)\varepsilon_{rz}^{(3)},$$

$$\sigma^{(k)} = 3K_k(T_k)(\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k}T_k), \quad (4)$$

$$k = 1, 2, 3.$$

Здесь $s_\alpha^{(k)}$, $\varepsilon_\alpha^{(k)}$ — девиаторные, $\sigma^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ — шаровые части тензоров напряжений и деформаций; $s_{rz}^{(3)}$ — касательные напряжения в заполнителе; $G_k(T_k)$, $K_k(T_k)$ — температурно-зависимые модули упругости материала k -го слоя; α_{0k} — коэффициент линейного температурного удлинения; T_k — приращение температуры.

Используя соотношения (4), выделим силовую и температурную составляющие в нормальных компонентах тензора напряжений

$$\sigma_\alpha^{(k)} = \sigma_{\alpha e}^{(k)} - \sigma_t^{(k)},$$

$$\sigma_{\alpha e}^{(k)} = 2G_k\varepsilon_\alpha^{(k)} + 3K_k\varepsilon^{(k)},$$

$$\sigma_t^{(k)} = 3K_k\alpha_{0k}T_k \quad (k = 1, 2, 3). \quad (5)$$

Введем внутренние усилия и моменты в слоях пластины, также выделяя в них силовую (индекс «e») и температурную (индекс «t») части

$$T_\alpha = T_{\alpha e} - T_t = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha e}^{(k)} dz - \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_t^{(k)} dz,$$

$$M_\alpha = M_{\alpha e} - M_t = \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{\alpha e}^{(k)} z dz - \sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_t^{(k)} z dz,$$

$$\begin{aligned} H_{\alpha e} &= M_{\alpha e}^{(3)} + c \left(T_{\alpha e}^{(1)} - T_{\alpha e}^{(2)} \right), \\ H_t &= M_t^{(3)} + c \left(T_t^{(1)} - T_t^{(2)} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнения равновесия пластины выводятся из вариационного принципа Лагранжа

$$\delta A - \delta W = 0, \quad (7)$$

где $\delta A = \delta A_1 + \delta A_2$ — вариация суммарной работы внешних нагрузок $q_0(r)$ и контурных усилий T_r^n , H_r^n , M_r^n , Q^n на внутреннем ($n = 0$) и внешнем ($n = 1$) контурах

$$\begin{aligned} \delta A_1 &= \iint_S (q_0 - q_R) \delta w r dr d\varphi, \\ \delta A_2 &= \sum_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (T_r^n \delta u + H_r^n \delta \psi + M_r^n \delta w_{,r} + \\ &\quad + Q^n \delta w) d\varphi, \end{aligned}$$

δW — вариация работы внутренних сил упругости

$$\begin{aligned} \delta W &= \iiint_S \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} (\sigma_r^{(k)} \delta \varepsilon_r^{(k)} + \right. \\ &\quad \left. + \sigma_\varphi^{(k)} \delta \varepsilon_\varphi^{(k)}) dz \right] r dr d\varphi. \quad (8) \end{aligned}$$

Этот интеграл распространен по всей срединной поверхности заполнителя S , q_R — реакция основания.

Подставив выражения (5) в соотношения (8), (7) и проведя соответствующие преобразования, получим систему уравнений равновесия в усилиях, описывающую термоупругое деформирование круговой трехслойной пластины с легким заполнителем, покоящейся на упругом основании (индекс «e» внизу опустим)

$$\begin{aligned} T_{r,r} + \frac{1}{r}(T_r - T_\varphi) &= 0, \\ H_{r,r} + \frac{1}{r}(H_r - H_\varphi) &= 0, \\ M_{r,rr} + \frac{1}{r}(2M_{r,r} - M_{\varphi,r}) &= -q_0 + q_R. \quad (9) \end{aligned}$$

На контурах пластины ($r = r_0$, $r = 1$) должны выполняться силовые условия

$$T_r = T_r^n + T_t, \quad H_r = H_r^n + H_t,$$

$$M_r^- M_r^n + M_t, M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\varphi) = Q^n. \quad (10)$$

Отметим, что температура $T(z, t)$ в явном виде включена только в силовые граничные условия (10). В уравнения (9) она не входит, так как производные от температурных слагаемых по радиусу равны нулю, а в разностных членах соответствующие добавки взаимно сокращаются.

Предполагается, что связь между реакцией основания и прогибом пластины описывается моделью Винклера, согласно которой

$$q_R = \kappa_0 w, \quad (11)$$

где κ_0 — коэффициент жесткости упругого основания (коэффициент постели).

Получим выражение обобщенных усилий, входящих в (9), через три искомые функции $u(r)$, $\psi(r)$, $w(r)$. Для этого подставим в (6) выражение напряжений через деформации (5), а затем деформаций через перемещения (3). В результате получим

$$\begin{aligned} T_r &= \sum_{k=1}^3 h_k (K_k^+ u_{,r} + \frac{u}{r} K_k^-) + \\ &\quad + c D_1^+ \psi_{,r} + c D_1^- \frac{\psi}{r} - D_2^+ w_{,rr} - D_2^- \frac{w_{,r}}{r}, \\ M_r &= D_2^+ u_{,r} + D_2^- \frac{u}{r} + \\ &\quad + c \left[D_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right] \psi_{,r} + \\ &\quad + c \left[D_2^- + \frac{2}{3} c^2 K_3^- \right] \frac{\psi}{r} - \\ &\quad - D_3^+ w_{,rr} - D_3^- \frac{w_{,r}}{r}, \\ H_r &= c D_1^+ u_{,r} + c D_1^- \frac{u}{r} + \\ &\quad + c^2 \left[D_1^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right] \psi_{,r} + \\ &\quad + c^2 \left[D_1^- + \frac{2}{3} c K_3^- \right] \frac{\psi}{r} - \\ &\quad - c \left[D_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right] w_{,rr} - \\ &\quad - c \left[D_2^- + \frac{2}{3} c^2 K_3^- \right] \frac{w_{,r}}{r}. \quad (12) \end{aligned}$$

Принятые обозначения

$$D_1^\pm = K_1^\pm h_1 - K_2^\pm h_2,$$

$$D_2^\pm = K_1^\pm h_1 \left(c + \frac{h_1}{2} \right) - K_2^\pm h_2 \left(c + \frac{h_2}{2} \right),$$

$$D_3^\pm = K_1^\pm h_1 \left(c^2 + ch_1 + \frac{h_1^2}{3} \right) + K_2^\pm h_2 \left(c^2 + ch_2 + \frac{h_2^2}{3} \right) + \frac{2}{3} c^3 K_3^\pm.$$

Соотношения для T_φ , M_φ , H_φ следуют из формул для T_r , M_r , H_r , если в (11) поменять местами K_k^+ и K_k^- , где $K_k + \frac{4}{3}G_k \equiv K_k^+$, $K_k - \frac{2}{3}G_k \equiv K_k^-$.

После подстановки внутренних усилий (12) в уравнения (9), учитывая (11), получим систему дифференциальных уравнений в перемещениях

$$\begin{aligned} L_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w, r) &= 0, \\ L_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w, r) &= 0, \\ L_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w, r) - \kappa_0 w &= -q_0, \end{aligned} \quad (13)$$

где L_2 , L_3 — дифференциальные операторы второго и третьего порядков

$$L_3(g) \equiv \frac{1}{r} (r L_2(g)), r \equiv g, rrr + \frac{2g, rr}{r} - \frac{g, r}{r^2} + \frac{g}{r^3},$$

$$L_2(g) \equiv \left(\frac{1}{r} (rg), r \right), r \equiv g, rr + \frac{g, r}{r} - \frac{g}{r^2}.$$

Коэффициенты a_i в (13) определяются интегральными соотношениями, следующими из вывода зависимостей внутренних усилий от искомым перемещений, так как модули упругости материалов в слоях изменяются по толщине вместе с температурой

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 K_{k0}, \quad a_2 = c(K_{10} - K_{20}),$$

$$a_3 = \sum_{k=1}^3 K_{k1},$$

$$a_4 = K_{32} + c^2(K_{10} + K_{20}),$$

$$a_5 = K_{32} + c(K_{11} - K_{21}),$$

$$a_6 = \sum_{k=1}^3 K_{k2},$$

$$K_{km} = \int_{h_k} \left[K_k(T_k) + \frac{4}{3} G_k(T_k) \right] z^m dz \quad (14)$$

$$(m = 0, 1, 2).$$

Краевая задача отыскания функций $u(r)$, $\psi(r)$, $w(r)$ замыкается присоединением к (13) граничных условий. При жесткой заделке контура пластины

$$u = \psi = w = w, r = 0. \quad (15)$$

При шарнирном опирании

$$u = \psi = w = 0, \quad M_r = M_t^n. \quad (16)$$

С помощью первых двух уравнений системы (13) в третьем из них можно обнулить коэффициенты перед функциями u и ψ . После двукратного интегрирования система приводится к виду

$$\begin{aligned} u &= d_1 w, r + C_1 r + C_2 / r, \\ \psi &= d_2 w, r + C_3 r + C_4 / r, \end{aligned}$$

$$w, rrrr + \frac{2}{r} w, rrr - \frac{1}{r^2} w, rr + \frac{1}{r^3} w, r + \kappa^4 w = q, \quad (17)$$

где C_1 , C_2 , C_3 , C_4 — константы интегрирования,

$$\kappa^4 = \kappa_0 D, \quad q = q_0 D,$$

$$D = \frac{a_1 d_0}{(a_1 a_6 - a_3^2) d_0 - (a_1 a_5 - a_2 a_3)^2},$$

$$d_0 = a_1 a_4 - a_2^2,$$

$$d_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{d_0}, \quad d_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{d_0}.$$

Общее решение третьего уравнения в (17)

$$w = C_5 \operatorname{ber}(\kappa r) + C_6 \operatorname{bei}(\kappa r) + C_7 \operatorname{ker}(\kappa r) + C_8 \operatorname{kei}(\kappa r) + w_0, \quad (18)$$

где функции Кельвина нулевого порядка $\varphi_n(\kappa r) = \operatorname{ber}(\kappa r)$, $\operatorname{bei}(\kappa r)$, $\operatorname{ker}(\kappa r)$, $\operatorname{kei}(\kappa r)$ образуют фундаментальную систему решений [7], w_0 — частное решение уравнения (17).

Частное w_0 решение уравнения (13) получим, используя ядро Коши $K(r, s)$ [8]

$$w_0(r) = \int_0^r K(r, s) q(s) ds, \quad (19)$$

$$K(r, s) = \sum_{k=1}^4 C_k(s) \varphi_k(r).$$

Функции $C_k(s)$ определяются отношениями

$$C_k(s) = \frac{W_k(s)}{W(s)} \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Здесь

$$W(r) = \begin{vmatrix} \varphi_1(r) & \varphi_2(r) & \varphi_3(r) & \varphi_4(r) \\ \varphi_1'(r) & \varphi_2'(r) & \varphi_3'(r) & \varphi_4'(r) \\ \varphi_1''(r) & \varphi_2''(r) & \varphi_3''(r) & \varphi_4''(r) \\ \varphi_1'''(r) & \varphi_2'''(r) & \varphi_3'''(r) & \varphi_4'''(r) \end{vmatrix}.$$

Определители $W_k(r)$ получаются из вронскиана $W(r)$ заменой k -го столбца на столбец $(0, 0, 0, 1)^T$ (штрих вверху обозначает производную по r).

При жесткой заделке граничных контуров пластины решение (17), (18) необходимо подставить в условия (15). В результате, с учетом того, что значения производной прогиба на граничных контурах пластины равны нулю, и в соответствии с (19) $w_0(r_0) = w_0'(r_0) = 0$, получаем линейную систему из восьми алгебраических уравнений

$$C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 r_0 + C_2 / r_0 = 0,$$

$$C_3 + C_4 = 0, \quad C_3 r_0 + C_4 / r_0 = 0,$$

$$C_5 \operatorname{ber} \kappa + C_6 \operatorname{bei} \kappa + C_7 \operatorname{ker} \kappa + C_8 \operatorname{kei} \kappa = w_0(1),$$

$$C_5 \operatorname{ber}(\kappa r_0) + C_6 \operatorname{bei}(\kappa r_0) + C_7 \operatorname{ker}(\kappa r_0) + C_8 \operatorname{kei}(\kappa r_0) = 0,$$

$$b_1 C_5 + b_2 C_6 + b_3 C_7 + b_4 C_8 = -w_0'(1), \\ b_5 C_5 + b_6 C_6 + b_7 C_7 + b_8 C_8 = 0, \quad (20)$$

где

$$b_{1,2} = \frac{\kappa\sqrt{2}}{2} [\pm \operatorname{ber}_1 \kappa + \operatorname{bei}_1 \kappa],$$

$$b_{3,4} = \frac{\kappa\sqrt{2}}{2} [\pm \operatorname{ker}_1 \kappa + \operatorname{kei}_1 \kappa],$$

$$b_{5,6} = \frac{\kappa\sqrt{2}}{2} [\pm \operatorname{ber}_1(\kappa r_0) + \operatorname{bei}_1(\kappa r_0)],$$

$$b_{7,8} = \frac{\kappa\sqrt{2}}{2} [\pm \operatorname{ker}_1(\kappa r_0) + \operatorname{kei}_1(\kappa r_0)].$$

Решением системы (20) является

$$C_k = 0, \quad C_{k+4} = \frac{\Delta_{k+4}}{\Delta}, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (21)$$

Здесь

$$\Delta = \begin{vmatrix} \operatorname{ber} \kappa & \operatorname{bei} \kappa & \operatorname{ker} \kappa & \operatorname{kei} \kappa \\ \operatorname{ber}(\kappa r_0) & \operatorname{bei}(\kappa r_0) & \operatorname{ker}(\kappa r_0) & \operatorname{kei}(\kappa r_0) \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \end{vmatrix},$$

а остальные определители Δ_{k+4} получаются из Δ заменой столбца, соответствующего нижнему индексу определителя, на столбец свободных членов из правой части последних четырех уравнений системы (20).

Если *оба контура пластины шарнирно оперты*, то решение (17), (18) необходимо подставить в уравнения (16). В общем случае симметричной нагрузки получаем

$$C_1 + C_2 + d_1(b_1 C_5 + b_2 C_6 + b_3 C_7 + b_4 C_8) = 0,$$

$$C_1 r_0 + C_2 / r_0 + d_1(b_5 C_5 + b_6 C_6 + b_7 C_7 + b_8 C_8) = 0,$$

$$C_3 + C_4 + d_2(b_1 C_5 + b_2 C_6 + b_3 C_7 + b_4 C_8) = 0,$$

$$C_3 r_0 + C_4 / r_0 + d_2(b_5 C_5 + b_6 C_6 + b_7 C_7 + b_8 C_8) = 0,$$

$$C_5 \operatorname{ber} \kappa + C_6 \operatorname{bei} \kappa + C_7 \operatorname{ker} \kappa + C_8 \operatorname{kei} \kappa = -w_0(1),$$

$$C_5 \operatorname{ber}(\kappa r_0) + C_6 \operatorname{bei}(\kappa r_0) + C_7 \operatorname{ker}(\kappa r_0) + C_8 \operatorname{kei}(\kappa r_0) = 0,$$

$$a_3 C_1 - a_3 C_2 + a_5 C_3 - a_5 C_4 + l_1 C_5 + l_2 C_6 + l_3 C_7 + l_4 C_8 = a_{60} w_0'(1) - b_0 w_0''(1) + M_t,$$

$$a_3 C_1 - a_3 C_2 + a_5 C_3 - a_5 C_4 + l_5 C_5 + l_6 C_6 + l_7 C_7 + l_8 C_8 = M_t. \quad (22)$$

Здесь

$$l_{1,2} = d_{3,4} b_0 - a_{60} b_{1,2},$$

$$l_{3,4} = d_{5,6} b_0 - a_{60} b_{3,4},$$

$$b_0 = a_3 d_1 + a_5 d_2 - a_6,$$

$$l_{5,6} = d_{7,8} b_0 - a_{60} b_{5,6},$$

$$l_{7,8} = d_{9,10}b_0 - a_{60}b_{7,8}.$$

В последних двух уравнениях (22), соответствующих требованию $M_r = 0$ на граничных контурах пластины, использованы условия отсутствия перемещений ($u = \psi = w = 0$ при $r = 1$ и $r = r_0$).

В результате решение системы линейных алгебраических уравнений (22) можно выписать в виде

$$C_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \quad k = \overline{1, 8}, \quad (23)$$

где Δ — определитель восьмого порядка, составленный из коэффициентов левой части уравнений системы (22), а определители Δ_k получаются из него заменой столбца, соответствующего нижнему индексу, на столбец свободных членов из правой части системы (22).

Таким образом, общее решение (17), (18) с частным решением (19) и константами интегрирования (21), (23) описывают термоупругие перемещения в круговой трехслойной пластине, покоящейся на упругом основании, при заделке или шарнирном опирании ее контура.

Численные результаты получены для заземленной по контуру кольцевой трехслойной пластины на упругом основании, слой которой выполнены из материалов Д16Т-фторопласт-Д16Т. Интенсивность поверхностной равномерно распределенной нагрузки $q_0 = -10$ МПа. Относительные толщины слоев $h_1 = 0,04$; $h_2 = 0,04$; $h_3 = 0,4$.

Для рассматриваемой пластины пренебрегаем теплотой, ушедшей на нагревание внешнего металлического слоя (в силу малой теплоемкости). Его температура принимается равной температуре заполнителя в месте склейки: $T^{(2)} = T^{(5)}(c, t)$. Вся теплота, воспринимаемая пластиной за время t , идет на нагревание полимерного заполнителя. Температура второго несущего слоя также принимается равной температуре заполнителя в месте их склейки $T^{(4)} = T^{(5)}(-c, t)$. Температурное поле в заполнителе вычисляется по формуле (1).

При принятом тепловом потоке $q_t = 5000$ Дж/(м²·с) температура во внешнем слое достигает значения $T_1 = 597$ К в момент времени $t_0 = 60$ мин, что соответствует достаточному разогреву дюралюминия (но меньше температуры плавления заполнителя-фторопласта). Во втором слое температура постоянна.

Для описания зависимости модулей упругости материалов несущих слоев (металлов)

от температуры используется формула, предложенная Беллом [1]

$$\begin{aligned} \{G(T), K(T), E(T)\} &= \\ &= \{G(0), K(0), E(0)\}\varphi(T), \\ \varphi(T) &= \begin{cases} 1, & 0 < T/T_{\text{пл}} \leq 0,06, \\ 1,03(1 - T/(2T_{\text{пл}})), & \\ 0,06 < T/T_{\text{пл}} \leq 0,57, \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

где $T_{\text{пл}}$ — температура плавления материала; $G(0), K(0), E(0)$ — значения модулей при так называемой нулевой температуре. Например, зная G_0 при некоторой температуре T_0 , получим $G(0) = G_0/\varphi(T_0)$. При более высоких гомологических температурах $T/T_{\text{пл}} > 0,57$ возможно малое отклонение поведения материала от линейного закона (24).

Зависимость параметров упругости полимерных материалов (заполнителя) от температуры принимается в виде

$$\{G(T), K(T)\} = \{G_0, K_0\}/\varphi_1(T),$$

$$\varphi_1(T) = (1 + B(\Delta T/T_{\text{пл}})^\gamma \text{sgn} \Delta T),$$

где $\Delta T = T - T_0$, T_0 — начальная температура; G_0, K_0 — значения параметров при температуре T_0 . Все термомеханические характеристики используемых материалов приведены в [1].

На рис. 2 показано изменение вдоль радиуса прогиба кольцевой трехслойной пластины на упругом основании с коэффициентом постели (МПа/м) $\kappa_0 = 100$, $\kappa_0 = 1000$ и $\kappa_0 = 10000$ соответственно: 1 — изотермический прогиб, 2 — термосиловой в момент t_0 .

В первом случае ($\kappa_0 = 100$) рост температуры вызывает увеличение прогиба на 32% (рис. 2а). Во втором случае ($\kappa_0 = 1000$) воздействие температуры сказывается в несколько меньшей степени — прогиб увеличивается на 9% (рис. 2б). И, наконец, в третьем случае ($\kappa_0 = 10000$) влияние температуры на перемещения в рассматриваемой пластине еще более ослабевает (значения w увеличены в 1000 раз (рис. 2в)).

На рис. 3 показано изменение радиальных σ_r напряжений по толщине пластины на ее внешнем (рис. 3а) и внутреннем (рис. 3б) контурах соответственно: 1 — изотермический изгиб, 2 — термоупругий в момент t_0 . Коэффициент жесткости основания $\kappa = 1000$ МПа/м.

За счет нагревания первый слой и часть заполнителя расширяются и испытывают сжатие из-за заземления контура пластины. Это

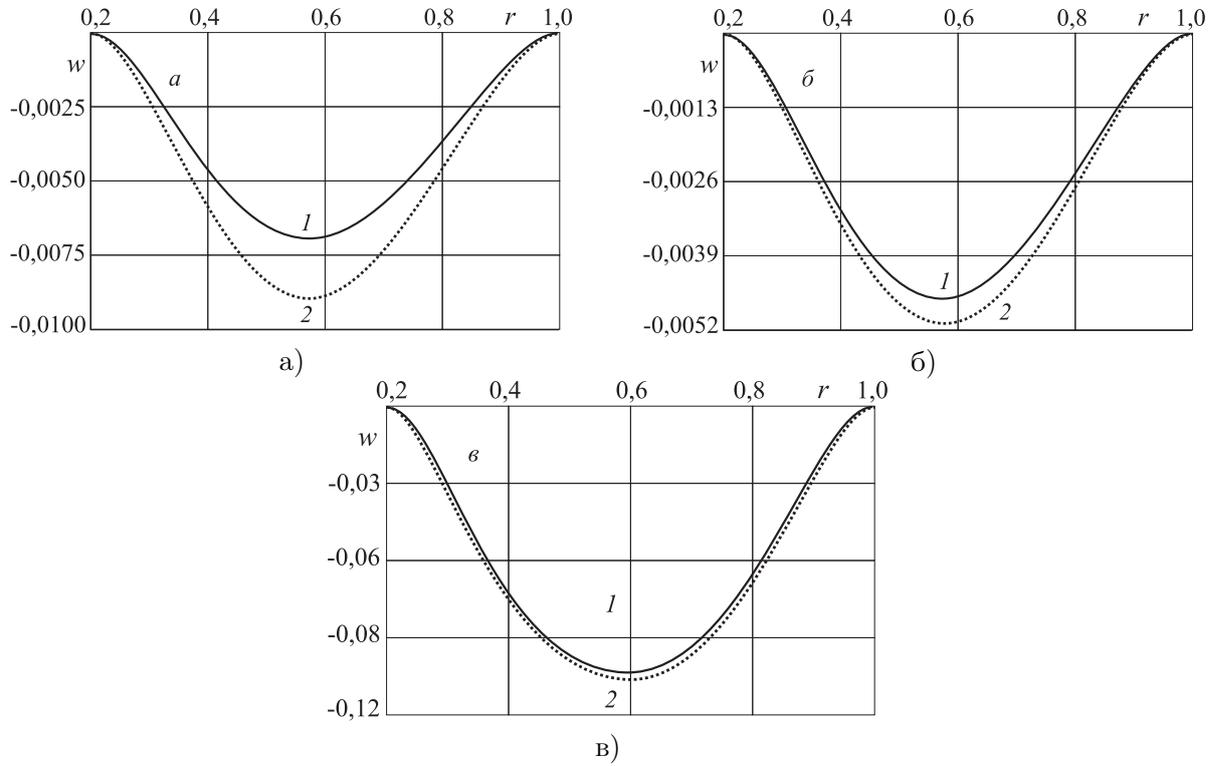


Рис. 2. Изменение прогиба вдоль радиуса пластины при основаниях различной жесткости

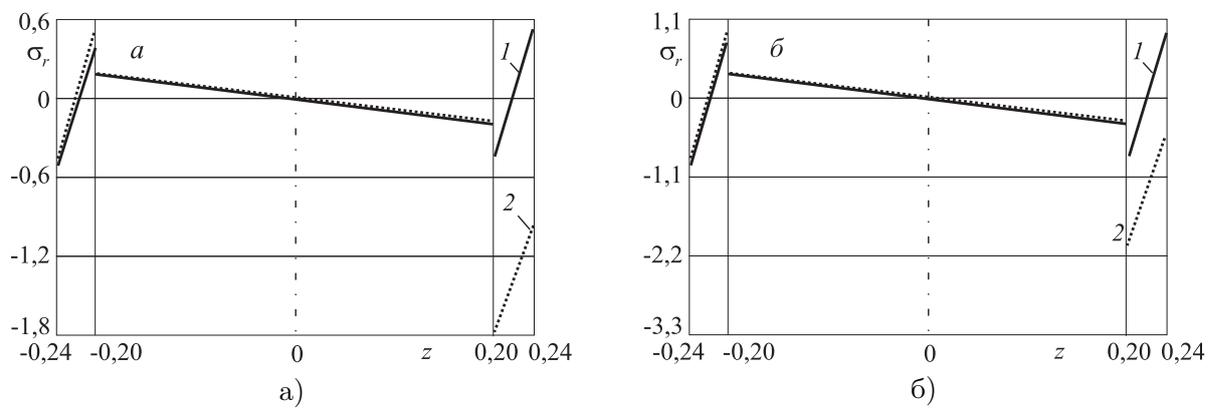


Рис. 3. Напряжения на граничных торцах трехслойной кольцевой пластины

вызывает в них сдвиг напряжений в отрицательную область, причем на внешнем контуре — в гораздо большей степени. В первом слое наблюдается резкое увеличение напряжений по модулю. Во втором несущем слое температура не изменяется, поэтому и напряжения примерно такие же по величине.

Приведенное в работе общее решение (14), (15) можно использовать для исследования любого случая изгиба симметричной термостатической нагрузкой трехслойной круговой пластины с легким наполнителем на упругом основании при наличии отверстия или без него.

Литература

1. Старовойтов Э. И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки. Гомель: БелГУТ, 2002. 343 с.
2. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Тарлаковский Д. В. Теория упругости и пластичности. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. 416 с.
3. Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В. Локальные и импульсные нагрузки трехслойных элементов конструкций. Гомель: БелГУТ, 2003. 367 с.
4. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Механика слоистых вязкоупруго-пластических элементов конструкций. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 576 с.
5. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 635 с.
6. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В. Деформирование трехслойной круговой пластины на упругом основании // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2005. № 1. С. 16–22.
7. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
8. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Курс высшей математики и математической физики. Дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1980. 231 с.

Статья поступила 21 марта 2006 г.

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Беларусь

© Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В., Сулейман М., 2006