

УДК 517.5

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПРИВЛИЖЕННЫМ РЕШЕНИЯМ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. А. Фильштинский¹, Л. А. Фильштинский²

ABOUT ONE APPROACH TO APPROXIMATE SOLUTIONS OF FUNCTIONAL EQUATIONS

Filshinsky V. A., Filshinsky L. A.

A heuristic method has been offered to get approximations of exact solutions of functional equations.
The method is illustrated with numerous examples from various fields.

Введение

В работе предложен симбиоз функционально-аналитических методов приближенного решения разных классов задач и искусства исследователя. По существу, предлагается искать решение задачи — некоторую функцию — по набору ее характеристик. Выбор этих характеристик находится в руках исследователя. Достаточное количество характеристик определяет однозначно решение задачи, малое их количество позволяет с большей легкостью найти, но уже приближенное решение.

Упомянутые характеристики обычно представляют собой значения линейных функционалов, примененных к функции. Типичный пример — равенство двух непрерывных функций, определенных на некотором интервале $[a, b]$:

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \psi(x) \forall x \in [a, b] &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \delta_x[\varphi] = \delta_x[\psi] \forall x \in [a, b],\end{aligned}$$

где $\delta_x[f] = f(x)$ — линейный непрерывный функционал, определенный на пространстве $C[a, b]$ [1–3]. Столь широкий набор функционалов определяет однозначно функцию всеми значениями этих функционалов. Более «тощий» набор, но все же достаточный для однозначности, порождает счетный базис функционального пространства [1–3], разумеется, если он существует. Это видно на примере

пространства $L^2[a, b]$. Если $\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}$ — его ортонормированный базис, например, система многочленов Лежандра на $[a, b]$, то система непрерывных функционалов

$$F_n : f \rightarrow \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx \quad (n = 0, 1, \dots)$$

однозначно определяет f (в смысле пространства $L^2[a, b]$):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(f) \varphi_n(x).$$

Конечное множество «идентифицирующих» функционалов обычно позволяет найти лишь приближенное выражение для $f(x)$.

1. О приближенном равенстве элементов функциональных пространств

В задаче аппроксимации функции $f(x)$ необходимо задать аппроксимирующее множество W и способ измерения расстояния между аппроксимируемым и аппроксимирующим элементами [4, 5]. Указать способ измерения расстояния означает, что имеется некоторое функциональное банахово пространство

¹Фильштинский Вадим Аншелович, канд. физ.-мат. наук, доцент Сумского государственного университета, Украина.

²Фильштинский Леонид Аншелович, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой Сумского государственного университета, Украина.

B и что $f \in B$, $W \subset B$, а если $\varphi \in W$, то расстояние находится как норма разности [4, 5]

$$d(f, \varphi) = \|f - \varphi\|_B.$$

Задача аппроксимации состоит в минимизации $d(f, \varphi)$, когда φ пробегает W , и отыскании (если он существует) наименее уклоняющегося элемента $\varphi^0 \in W : \inf \{\|f - \varphi\| : \varphi \in W\} = \|f - \varphi^0\|$.

Уже в случае, когда W — конечномерное подпространство пространства B , эта задача (за исключением ситуации гильбертова пространства) необыкновенно сложна. Известны лишь отдельные примеры точного решения [4, 5]. Численные методы приближенного вычисления φ^0 обычно весьма трудоемки, потому часто используют разнообразные методы аппроксимации, когда находят элемент φ^* , не совпадающий с φ^0 , но достаточно хорошо аппроксимирующий f .

Задача резко усложняется, если функция f не задана явно, а представляет собой решение некоторого функционального уравнения (обыкновенного дифференциального, в частных производных, интегрального и т.п.). Во многих случаях хорошо «работают» эвристические методы, например, метод К. Ланцоша [6]. Заметим, что В.К. Дзядык [7] и представители его школы разработали А-метод, в котором даются оценки погрешности многочленной аппроксимации решения функционального уравнения.

В пространстве B для любых $g \in B$ [3]

$$\|g\| = \sup\{\langle F, g \rangle : F \in B^*, \|F\|_{B^*} \leq 1\},$$

где $\langle F, g \rangle$ — значение функционала F на элементе g ; B^* — сопряженное пространство (состоящее из линейных непрерывных функционалов). В частности,

$$\begin{aligned} E_W(f) &= \inf_{\varphi \in W} \|f - \varphi\| = \\ &= \inf_{\varphi \in W} \sup_{F \in B^*, \|F\| \leq 1} |\langle F, f - \varphi \rangle|. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Равенство (1.1) служит основой методов перехода к двойственным задачам как в общем случае [1–3], так и в случаях конкретных пространств B . Если в (1.1) использовать не все элементы единичного шара сопряженного пространства, то очевидна оценка

$$E_W(f) \geq \inf_{\varphi \in W} \sup_{F \in V} |\langle F, f - \varphi \rangle|, \quad V \subset S^*,$$

где $S^* = \{F \in B^* : \|F\| \leq 1\}$. Но более важно другое: возникает идея об ином способе измерения погрешности, подкрепленная кроме (1.1) следующим соображением.

Пусть $\varphi, \psi \in B$, $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — система линейных непрерывных функционалов из B^* ; A — множество индексов. Назовем элементы φ и ψ равными относительно семейства функционалов $\{F_\alpha\}$ ($\{F_\alpha\}$ -равными), если

$$F_\alpha(\varphi) = F_\alpha(\psi), \quad \forall \alpha \in A.$$

Например, можно считать, что $\varphi(x) = \psi(x)$ относительно моментных функционалов F_n :

$$F_n : \varphi \rightarrow \int_a^b x^n \varphi(x) dx, \quad n = \overline{0, N},$$

и тогда

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \psi(x) (\{F_\alpha\}) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \int_a^b x^n \varphi(x) dx &= \int_a^b x^n \psi(x) dx, \quad (1.2) \\ n = \overline{0, N}. \end{aligned}$$

В работе [8] изучены аппроксимационные сплайны $S_m(x)$, определяемые условиями (1.2) со значением N , достаточным для разрешимости соответствующих уравнений.

2. Аппроксимация решений функциональных уравнений

Применительно к аппроксимации функций $y(x)$, определяемых как решения функциональных уравнений, подход остается неизменным. Обратимся к конкретным примерам.

1. В плоской задаче линейной теории упругости напряженное состояние можно определить [9], найдя две аналитические в области S , ограниченной замкнутой кривой L , функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$, удовлетворяющие граничному условию

$$\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = f, \quad |\sigma| = 1, \quad (2.3)$$

где f определяет условия на границе области S , $\omega(\sigma)$ осуществляет конформное отображение области S на единичный круг $|z| \leq 1$. Для $S = \{z : |z| \leq 1\}$ функция $\omega(z) = z$, а для $S = \{z : |z| \geq 1\}$ функция $\omega(z) = z^{-1}$. В

случае плоскости с эллиптическим отверстием $\omega(\sigma)/\omega'(\sigma) = (\sigma^2 + m)/\sigma(1 - m\sigma^2)$.

Применяя к (2.3) простейшие функционалы

$$F_n : \gamma(\sigma) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta, \\ \pm n = 0, 1, \dots \quad (2.4)$$

в задачах для круга или его внешности и

$$F_n : \gamma(\sigma) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(e^{i\theta}) (1 - me^{2i\theta}) e^{-in\theta} d\theta, \\ \pm n = 0, 1, \dots$$

в задаче для плоскости с эллиптическим отверстием и представляя функции φ, ψ в виде

$$\varphi(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sigma^{\varepsilon n}, \quad \psi(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sigma^{\varepsilon n}$$

($\varepsilon = +1$ для ограниченной области; $\varepsilon = -1$ для неограниченной области), приходим к точному решению.

2. Найдём приближенное решение на участке $0 \leq x \leq 1$ уравнения Бесселя нулевого порядка с начальными условиями $y(1) = y_0, y'(1) = y_1$. Определим характеристики (типа моментов) решения $y(x)$. Для этого умножим обе части уравнения Бесселя на некоторую функцию $H(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) и вычислим интеграл от обеих частей на участке $[0, 1]$. После небольших преобразований получим соотношение

$$\int_0^1 [x^2 H''(x) + 3x H'(x) + \\ + (x^2 + 1)H(x)] y(x) dx = \\ = H'(1)y_0 - H(1)(y_1 - y_0).$$

Выбор $H(x)$ может быть произвольным. Положим $H_n(x) = x^n$ ($n = \overline{0, N}$). На самом деле подбор $H(x)$ должен быть продиктован глубокими соображениями, приводящими к хорошим оценкам погрешности аппроксимации. Пока же, желая показать эффективность

метода как эвристического, выберем функцию $H(x)$, обеспечивающую простоту вычислений. Итак, функция $y(x)$ должна удовлетворять моментным равенствам

$$\int_0^1 [x^{n+2} + (n+1)^2 x^n] y(x) dx = \\ = (n+1)y_0 - y_1, \quad n = \overline{0, N}. \quad (2.5)$$

Дальнейшие шаги зависят от способа приближенного представления $y(x)$. Можно принять $y^*(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_N x^N$. В общем случае произвольного N из (2.5) получим систему линейных уравнений. Для $N = 2, y_0 = 0,76519, y_1 = -0,44010$ имеем $y^*(x) \approx I_0(x)$ ($0 \leq x \leq 1$), где

$$y^*(x) = 1,00141 - 0,01406x - 0,22382x^2, \\ \max_{[0,1]} |I_0(x) - y^*(x)| = 0,00166 \dots$$

Если же в качестве приближения выбрать отрезок степенного ряда функции $I_0(x)$, то для получения погрешности того же порядка придется использовать многочлен четвертой степени. С ростом N эта разница в порядках многочленов растет.

3. Рассмотрим краевую задачу

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 1.$$

Вновь умножим обе части уравнения на функцию $H(x)$ и вычислим интеграл на участке $[0, 1]$. Моментные соотношения имеют вид

$$\int_0^1 [H''(x) - (p(x)H(x))' + \\ + q(x)H(x)] y(x) dx = H'(1)$$

при условии $H(0) = 0, H(1) = 0$. Выбор функций $H(x)$ определяет сложность и точность вычисления $y^*(x)$. Пусть, к примеру,

$$p(x) \equiv 0, \quad q(x) \equiv -1.$$

Положим $H_n(x) = (x-1)x^n, n = 1, 2, \dots, N+1$. Если искать приближенное решение $y^*(x)$ в виде многочлена степени N , то при $N = 1, N = 2$

$$y_1^*(x) = -0,0303 + 0,9836x,$$

$$\max_{[0,1]} |y(x) - y_1^*(x)| = 0,0467 \dots,$$

$$y_2^*(x) = 0,00793 + 0,75792x + 0,22569x^2,$$

$$\max_{[0,1]} |y(x) - y_2^*(x)| = 0,0085 \dots$$

Если же положить $H_n(x) = \sin n\pi x$, а $y_N^*(x)$ искать в виде $x + \sum \alpha_n \sin n\pi x$ ($1 \leq n \leq N$), то получим

$$y_N^*(x) = x + \sum_{k=1}^N \frac{(-1)^k \sin k\pi x}{k\pi (k^2\pi^2 + 1)},$$

$$\max_{[0,1]} |y(x) - y_1^*(x)| = 0,0090 \dots,$$

$$\max_{[0,1]} |y(x) - y_2^*(x)| = 0,0038 \dots$$

Заметим, что во всех случаях наблюдается явление, близкое к чебышевскому альтернансу [4]. Напомним теорему П. Л. Чебышева: среди всех многочленов степени не выше N многочлен $P_N^0(x)$ наименее уклоняется от непрерывной функции $f(x)$ в метрике $C[a, b]$ тогда и только тогда, когда найдется не менее $n + 2 - x$ точек $x_k \in [a, b]$ таких, что

$$f(x_k) - P_n^0(x_k) = \varepsilon (-1)^k \max_{[a,b]} |f(x) - P_n^0(x)|,$$

$$\varepsilon = \pm 1.$$

Множество $\{x_k\}_{k=1}^{n+2}$ реализует чебышевский альтернанс. Таким образом, найденные приближения близки к наилучшим.

4. Обратимся к интегральному уравнению для плотности $\rho(s, t)$ теплового потенциала в бесконечной пластине $-\infty < x, y < +\infty$ с трещиной $\xi = \xi(\beta)$, $\eta = \eta(\beta)$, $0 \leq \beta \leq 1$:

$$\int_0^t d\tau \int_0^1 \frac{\rho(\beta, \tau)}{t - \tau} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\beta = f(s, t), \quad (2.6)$$

где $0 \leq s \leq 1$, $r^2 = [\xi(s) - \xi(\beta)]^2 + [\eta(s) - \eta(\beta)]^2$; f — известная функция.

Во многих задачах важно изучить поведение $\rho(s, t)$ при малых t . Пусть $t \leq T$. В этом случае для $q = [4a^2(t - \tau)]^{-1}$ имеем $[4a^2T]^{-1} \leq q < +\infty$. Найдем приближение экспоненциального ядра

$$e^{-qr^2} \approx \sum_{k=1}^M \gamma_k(r) q^{-k}, \quad q \geq (4a^2T)^{-1}, \quad (2.7)$$

требуя на обеих частях равенства (2.7) совпадения функционалов

$$F_{\lambda, i} : \varphi(q) \rightarrow \int_0^\infty \varphi(q) q^{M+i} e^{-\lambda q} dq$$

при $i = 0, 1, \dots, M-1$. Оптимальный выбор параметра $\lambda \in R, \lambda > 0$ отнесем к численным экспериментам. После применения $F_{\lambda, i}$ к (2.7) получим систему уравнений относительно неизвестных $\gamma_k \lambda^k$

$$\sum_{k=1}^M (\gamma_k \lambda^k) (M+i-k)! =$$

$$= (M+i)! \lambda^{M+i+1} (\lambda + r^2)^{-M-i-1},$$

$$i = \overline{0, M-1},$$

из которой следует представление

$$\gamma_k \lambda^k = \sum_{j=1}^M \gamma_{kj} \left(\frac{\lambda}{\lambda + r^2} \right)^{M+j}, \quad k = \overline{1, M},$$

где γ_{kj} — постоянные числа.

Положим $v = \lambda / (\lambda + r^2)$, $m = M - k$.

С учетом (2.7) получим

$$\sum_{j=1}^M q^j \left(\sum_{m=0}^{M-1} \gamma_{M-m, j} (m+i)! \right) =$$

$$= (M+i)! q^{i+1}, \quad i = \overline{0, M-1}.$$

Сравнивая в последнем соотношении коэффициенты при одинаковых степенях q , найдем

$$\sum_{m=0}^{M-1} \gamma_{M-m, j} (s+\nu)! = (M+\nu)! \delta_{\nu+1, j},$$

$$j = \overline{1, M}; \nu = \overline{0, M-1}.$$

Удобнее записать эти соотношения в матричной форме:

$$\left[\frac{(i+j)!}{(M+i)!} \right]_{i, j=0}^{M-1} \cdot [\gamma_{M-i, j+1}]_{i, j=0}^{M-1} = E, \quad (2.8)$$

где E — единичная матрица порядка $M \times M$.

Из (2.8) определим $[\gamma_{M-i, j+1}]_{i, j=0, M-1}$. С точки зрения вычислений удобнее находить обратную матрицу $[(i+j)!]_{i, j=0, M-1}^{-1}$. Умножим ее j -й столбец на $(M+j-1)!$ ($j = \overline{1, M}$) для окончательного вычисления матрицы γ .

Подставим приближенное выражение (2.7) в уравнение (2.6) и к обеим частям полученного применим преобразование Лапласа. Пусть плотность $\rho(\beta, t)$ преобразуется в функцию $R(\beta, p)$. Применение преобразования Лапласа (а фактически континуального множества функционалов) позволяет перейти к одномерному интегральному уравнению

$$\int_0^1 R(\beta, p) \sum_{k=1}^M \frac{(k-1)! (4a^2)^k}{p^k} \times \\ \times \sum_{j=1}^M \frac{\lambda^{M+j} \gamma_{kj}}{(\lambda + r^2)^{M+j}} d\beta = L[f](s, p).$$

Будем искать приближение функции $R(\beta, p)$ в виде

$$R(\beta, p) \approx \sum_{l=0}^L \beta^l \Phi_l(p), \quad 0 \leq \beta \leq 1, \quad (2.9)$$

исходя из условия совпадения левой и правой частей (2.9) на системе функционалов $\varphi(s) \rightarrow \int_0^1 \varphi(s) s^\mu ds, \mu = \overline{0, L}$:

$$\sum_{l=0}^L \Phi_l(p) \sum_{k=1}^M \frac{(k-1)! (4a^2)^k}{p^k} \times \\ \times \sum_{j=1}^M \lambda^{M+j} \gamma_{kj} A_{lj\mu}(s, \lambda) = \\ = \int_0^1 L[f](s, p) s^\mu ds, \quad \mu = \overline{0, L},$$

где

$$A_{lj\mu}(s, \lambda) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\beta^l s^\mu}{(\lambda + r^2)^{M+j}} d\beta ds.$$

Интегралы $A_{lj\mu}$ можно вычислить известными способами, а решение $\{\Phi_l\}$ полученной системы уравнений подставить в (2.9). Структура приближенного выражения для функции $R(\beta, p)$ такова, что обращение преобразования Лапласа проводится в виде свертки функции $f(s, t)$ с элементарными функциями.

5. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$y(x) + \int_a^b K(x, t) y(t) dt = f(x). \quad (2.10)$$

Применим к обеим частям (2.10) функционалы $F_\alpha, \alpha \in A$, где A — некоторое множество индексов,

$$F_\alpha[y] + \int_a^b F_\alpha[K(x, t)](t) y(t) dt = F_\alpha[f],$$

$\alpha \in A.$

Если мощность множества A недостаточна для однозначного определения $y(x)$, то можно искать приближенное выражение для $y(x)$ в виде

$$y^*(x) = \int_A a(\alpha) d\Phi(x, \alpha),$$

где $a(\alpha)$ — Φ -интегрируемая функция [3] для каждой $\Phi(x, \cdot)$ при $x \in [a, b]$; $\Phi(x, \alpha)$ — функция ограниченной вариации на множестве A относительно переменной α при каждом x . Заменяя в (2.10) функцию $y(x)$ ее аппроксимантой $y^*(x)$ и применяя функционалы F_α к (2.10), получим

$$F_\alpha[y^*] + \int_a^b F_\alpha[K(x, t)](t) y^*(t) dt = F_\alpha[f],$$

$\alpha \in A. \quad (2.11)$

Переход к уравнению (2.11) эквивалентен переходу к системе линейных уравнений (в случае конечного A) либо к некоторому преобразованию исходного уравнения.

По существу, в этом случае предлагаемый подход эквивалентен методу Б. Г. Галеркина [10]. В методе Б. Г. Галеркина предполагается, что конечное число функций $F_\alpha[K(x, t)]$ составляет часть полной (в некотором функциональном пространстве) системы функций. Однако произвольная конечная система элементов банахова пространства со счетным базисом всегда дополняется до счетной полной системы.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$y(x) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K(x, t) y(t) dt = f(x)$$

и применим к нему систему функционалов $\{F_\nu\}_{|\nu| \leq n-1}$

$$F_\nu[y] + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_\nu[K(x, t)](t) y(t) dt = F_\nu[f].$$

Так как имеется конечное число функционалов, то естественно искать решение в виде

$$y_n(x) = \sum_{|\nu| \leq n-1} C_\nu \varphi_\nu(x).$$

Можно показать, что для специальных систем $\{\varphi_\nu\}$, функционалов $\Phi = \{F_\nu\}$, таким способом реализуются известные методы наименьших квадратов, проекционные методы, метод квадратур, метод итераций, метод Галеркина и др. [10].

До сих пор ничего не было сказано об оценках погрешностей $\|y - y_n\|$. Пусть Z — некоторый функциональный класс, $f \in Z$. Найдем

$$\mu_n(\varphi_\nu, Z) = \sup_{f \in Z} \|y - y_n\|.$$

Эта величина характеризует целый класс погрешностей (дает точную оценку сверху) относительно фиксированной системы $\{\varphi_\nu\}$ и класса Z правых частей. Рассмотрим частный случай, когда

$$K(x, t) = k(x - t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} k_m e^{im(x-t)},$$

где функция $k(u) \in L[0, 2\pi]$ и предполагается, что $k_m \neq -1 \forall m$. Выберем

$$\varphi_\nu(x) = \sum_{|r| \leq n-1} \varphi_{\nu r} e^{irx},$$

$$F_\nu : \psi \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) q_\nu(x) dx,$$

$$q_\nu(x) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \lambda_{r\nu} e^{-irx}.$$

Пусть $\Lambda = [\lambda_{r\nu}]_{r, \nu \in [-(n-1), n-1]}$. Предположим обратимость матрицы Λ и выберем $\varphi_{\nu r}$ так, чтобы

$$\Lambda^{-1} = [\varphi_{\nu r} (1 + k_r)]_{\nu, r \in [-(n-1), n-1]}.$$

Тогда после небольших преобразований можно получить решение

$$\begin{aligned} y(x) &\approx y_n(x) = \\ &= \sum_{|r| \leq n-1} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \left(\sum_{j=-(n-1)}^{n-1} \lambda_{kj} \varphi_{jr} \right) \right] e^{irx}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Это означает, что $y_n(x)$ представляет собой линейное преобразование правой части $f(x)$.

Найдем μ_n для частного случая. Пусть

$$\begin{aligned} \varphi_\nu(x) &= e^{i\nu x}, \\ F_\nu : \psi &\rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) e^{-i\nu x} dx, \\ y(x) &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} y_\nu e^{i\nu x}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f_\nu e^{i\nu x} \in Z = W^r = \\ &= \{f \in C[0, 2\pi] : f^{(r-1)} \in AC_{\text{п.в.}}[0, 2\pi], \\ &\quad |f_x^{(r)}| \leq 1 \text{ п.в.}\}, \end{aligned}$$

где $AC_{\text{п.в.}}$ — класс почти всюду абсолютно непрерывных функций.

Найдем интегральное представление решений $y(x)$, $y_n(x)$. Из (2.12), (2.13) следует

$$y_\nu = \frac{f_\nu}{k_\nu + 1} \quad (|\nu| < +\infty);$$

$$c_\nu = \frac{f_\nu}{k_\nu + 1} \quad (|\nu| \leq n-1),$$

поэтому

$$\begin{aligned} y(x) - y_n(x) &= \sum_{|\nu| \geq n} \frac{f_\nu}{k_\nu + 1} e^{i\nu x}, \\ f_\nu &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-i\nu t} dt. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Известно [11, 12] интегральное представление функций $f \in W^r$. Воспользуемся приемом из [11, 12] и применим к интегралу в (2.14) r

раз формулу интегрирования по частям. Получим

$$f_\nu = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{i}{\nu}\right)^r \int_0^{2\pi} f^{(r)}(x) e^{-i\nu x} dx \quad (\nu \neq 0).$$

Привлекая, кроме того, формулы (2.13), найдем

$$y(x) - y_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(t) D_r(x-t) dt,$$

$$\gamma(t) = f^{(r)}(t), \quad |\gamma(t)| \leq 1 \text{ п.в.},$$

где ядро

$$D_r(u) = (-i)^r \sum_{|\nu| \geq n} \frac{e^{i\nu u}}{\nu^r (k_\nu + 1)}.$$

Положим

$$y(x, f) = y(x), \quad y_n(x, f) = y_n(x),$$

$$\begin{aligned} \Delta_f(0) &= y(0, f) - y_n(0, f) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \gamma(t) D_r(-t) dt. \end{aligned}$$

Выберем функцию $f_0(x) \in W^r$ так, чтобы

$$\gamma_{f_0}(x) \equiv f_0^{(r)}(x) = \text{sign} D_r(-t).$$

В этом случае

$$\Delta_{f_0}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_r(-t)| dt = \frac{1}{2\pi} \|D_r\|_L.$$

Однако для каждого $f \in Z$

$$\begin{aligned} |\Delta_f(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\gamma(t)| |D_r(x-t)| dt \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |D_r(x-t)| dt = \frac{1}{2\pi} \|D_r\|_L. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\mu_n(\varphi_\nu, W^r) = \frac{1}{2\pi} \|D_r\|_L,$$

а «наихудшая» правая часть, когда погрешность $\|y - y_n\|_{C[0, 2\pi]}$ является максимальной, такова:

$$\begin{aligned} f_0(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{f_0}{k_0 + 1} + \right. \\ &\left. + (-i)^r \sum_{|\nu| \geq 1} \frac{1}{\nu^r (k_\nu + 1)} e^{i\nu(x-t)} \right] \text{sign} D_r(-t) dt. \end{aligned}$$

Замечание. Оценку погрешности иногда можно улучшить, если усложнить выбор идентифицирующих функционалов, например, положить

$$F_\nu : \psi(x) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(x) T_\nu(x) dx,$$

$$\deg T_\nu \leq n - 1.$$

В этом случае вместо $\|D_r\|_L$ появляется $\|D_r(t) - T(t)\|_L$ с некоторым тригонометрическим многочленом $T(t)$ порядка не выше $n - 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} \inf_{\{T_\nu\}} \mu_n(\varphi_\nu, W^r) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \inf_{T, \deg T \leq n-1} \|D_r(t) - T(t)\|_L = \\ &= \frac{1}{2\pi} E_n(D_r)_L, \end{aligned}$$

где $E_n(D_r)_L$ есть значение наименьшего уклонения ядра D_r от подпространства тригонометрических многочленов порядка не выше $n - 1$ в метрике $L[0, 2\pi]$. Для многих классов ядер D_r известны условия [4, 5, 12], когда удается вычислить $E_n(D_r)_L$.

Практически во всех известных случаях

$$E_n(D_r)_L = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_r(t) \text{sign}[\sin(nt + \alpha)] dt$$

при некотором $0 \leq \alpha < \pi$.

Литература

1. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.
2. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. М.: ГИФМЛ, 1959. 684 с.
3. Dunford N., Schwartz J. T. Linear Operators, part I: General Theory, 1958 (перевод: Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы, общая теория. М.: Изд-во иностранной литературы, 1962. 896 с.).
4. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 408 с.
5. Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977. 512 с.
6. Попов Б. А., Теслер Г. С. Приближение функций для технических приложений. Киев: Наукова думка, 1980. 352 с.
7. Дзядык В. К. Аппроксимационный метод приближения алгебраическими многочленами решений линейных дифференциальных уравнений // Изв. АН СССР. 1974. Т. 38. № 4. С. 937–967.
8. Литвинец П. Д., Фильштинский В. А. Об одной теореме сравнения и ее приложениях // Теория приближения функций и ее приложения. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1984. С. 97–107.
9. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Изд-во АН СССР, 1954. 648 с.
10. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 696 с.
11. Никольский С. М. Квадратурные формулы. М.: Наука, 1974. 224 с.
12. Корнейчук Н. П. Экстремальные формулы. М.: Наука, 1976. 320 с.

Статья поступила 25 октября 2003 г.

Сумский государственный университет, Украина

© Фильштинский В. А., Фильштинский Л. А., 2004