Математика

УДК 519.6

МЕТОД ТОЧЕЧНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА[1]

Дроботенко М. И.[2]***, Игнатьев Д. В.***[3]

A METHOD OF POINT POTENTIALS FOR LAPLACE EQUATION

Drobotenko M. I., Ignatiev D. V.

In recent years many works have been devoted to non-grid methods of solving boundary-value problems. In this work, a method of point potentials is used to solve boundary-value problems with mixed boundary conditions. A new variant of the method is offered, which provides convergence of the approximate solution in the W_2^1 space.

В последнее время проявляется большой интерес к несеточным методам решения краевых задач. Метод, который, следуя [1, 2], будем называть методом точечных потенциалов (МТП), был предложен для уравнения Лапласа в работах В. Д. Купрадзе и М. А. Алексидзе [3, 4]. В [1, 2] доказана сходимость МТП в пространстве L_2 для краевых задач Дирихле и Неймана, численной реализации посвящены работы [5–9]. В настоящей работе МТП распространяется на задачи со смешанными граничными условиями. Предложен вариант метода, обеспечивающий сходимость приближённого решения в W_2^1.

1. Обозначения и вспомогательные сведения

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^m$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей S, ν — внешняя нормаль к S, $\Omega^+ = \Omega \setminus \overline{\Omega}$. Пусть множество $X = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, $x_i \in \Omega^+$, удовлетворяет условию единственности для гармонических в Ω^+ функций (то есть для любой гармонической в Ω^+ функции u из $u(x_i) = 0$, $i = \overline{1, \infty}$, следует $u(x) = 0,\ x \in \Omega^+$).

Пусть $\varphi(x, y) = \ln \dfrac{1}{|x-y|}$ при $m = 2$ и $\varphi(x, y) = \dfrac{1}{|x-y|}$ при $m = 3$.

$$\varphi_i(y) = \varphi(x_i, y), \quad y \in \Omega,$$

$$\beta_i(y) = \frac{\partial}{\partial \nu}\varphi_i(y), \quad y \in S, \quad i = \overline{1, \infty},$$

$$L_2^c(S) = \left\{u \in L_2(S),\ (u, 1)_{L_2(S)} = 0\right\},$$

тогда справедлива

Лемма [1, 2]. Множество $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ полно в $L_2^c(S)$.

2. Обоснование МТП для краевых задач со смешанными граничными условиями

Пусть $u \in W_2^1(\Omega)$, $\Delta u = 0$ в Ω, $g^0(y) = u(y)$, $g^1(y) = \frac{\partial}{\partial \nu} u(y)$, $y \in S$, $g^0, g^1 \in L_2(S)$.

Теорема. Имеет место сходимость

$$\inf_{\{c_i^n\}_{i=0}^n} \left\{ \left\| g^0 - c_0^n - \sum_{i=1}^n c_i^n \varphi_i \right\|^2_{L_2(S)} + \right.$$
$$\left. + \left\| g^1 - \sum_{i=1}^n c_i^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial \nu} \right\|^2_{L_2(S)} \right\} \to 0$$

---

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (06-01-96648).

[2]Дроботенко Михаил Иванович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры численного анализа Кубанского государственного университета.

[3]Игнатьев Денис Владимирович, аспирант кафедры численного анализа Кубанского государственного университета.

при $n \to \infty$.

Доказательство. Так как $\Delta u = 0$, то $g^1 \in L_2^c(S)$, поэтому из приведённой леммы следует, что для любого $n \in \mathbf{N}$ существует такой набор $\{c_i^n\}_{i=1}^n$, что

$$\Big\| g^1 - \sum_{i=1}^n c_i^n \beta_i \Big\|_{L_2(S)} \to 0 \qquad (2.1)$$

при $n \to \infty$. Обозначим

$$g_n^1(y) = \sum_{i=1}^n c_i^n \beta_i(y), \;\; y \in S,$$

тогда (2.1) означает, что $g_n^1 \to g^1$ в $L_2(S)$ при $n \to 0$.

Обозначим

$$c_0^n = \\ = \left(\int_S g^0\, ds - \int_S \sum_{i=1}^n c_i^n \varphi_i(y)\, ds \right) / |S|, \qquad (2.2)$$

$$u_n(y) = c_0^n + \sum_{i=1}^n c_i^n \varphi_i(y), \quad y \in \overline{\Omega}, \qquad (2.3)$$

тогда $v_n = u - u_n$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{aligned} &\Delta v_n = 0 \text{ в } \Omega, \\ &\frac{\partial}{\partial \nu} v_n = g^1 - g_n^1 \text{ на } S. \end{aligned} \qquad (2.4)$$

Из равенств (2.2),(2.3) следует равенство

$$\int_S u_n\, ds = \int_S g^0\, ds,$$

поэтому

$$\int_S v_n\, ds = \int_S u\, ds - \int_S u_n\, ds = 0,$$

то есть $v_n \in L_2^c(S)$. Рассмотрим задачу

$$\Delta w = 0 \text{ в } \Omega,$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu} w = v_n \text{ на } S.$$

Так как $v_n \in L_2^c(S)$, то эта задача имеет решение, причём единственное с точностью до константы. Выберем эту константу так, чтобы $w(M) = 0$, где M — некоторая точка границы S. Тогда для любой точки $y \in S$ получаем

$$w(y) = w(M) + \int_M^y (\nabla w, l) dl,$$

$l \in \overline{\Omega}$, поэтому

$$w^2(y) = \left(\int_M^y (\nabla w, l) dl \right)^2 \leqslant \\ \leqslant k_1 \int_M^y (\nabla w, l)^2 dl,$$

откуда

$$\|w\|_{L_2(S)} \leqslant k_2 \left(\int_\Omega (\nabla w, \nabla w) dx \right)^{1/2}.$$

Оценим сверху правую часть полученного неравенства. Заметим, что

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (\nabla w, \nabla w) dx = \\ &= \int_S w \frac{\partial w}{\partial \nu} ds - \int_\Omega w \Delta w\, dx = \\ &= \int_S w \frac{\partial w}{\partial \nu} ds = \int_S w v_n\, ds \leqslant \\ &\leqslant \|w\|_{L_2(S)} \|v_n\|_{L_2(S)} \leqslant \\ &\leqslant k_2 \left(\int_\Omega (\nabla w, \nabla w) dx \right)^{1/2} \|v_n\|_{L_2(S)}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\left(\int_\Omega (\nabla w, \nabla w) dx \right)^{1/2} \leqslant k_2 \|v_n\|_{L_2(S)},$$

откуда следует окончательное неравенство

$$\|w\|_{L_2(S)} \leqslant k_3 \|v_n\|_{L_2(S)}.$$

Теперь с учётом (2.4) получаем

$$\begin{aligned} &\int_S v_n v_n ds = \int_S v_n \frac{\partial w}{\partial \nu} ds = \\ &= \int_\Omega (v_n \Delta w - \Delta v_n w) dy + \int_S w \frac{\partial v_n}{\partial \nu} ds = \\ &= \int_S w \frac{\partial v_n}{\partial \nu} ds = \int_S w \Big(g^1 - g_n^1 \Big) ds \leqslant \\ &\leqslant \|w\|_{L_2(S)} \|g^1 - g_n^1\|_{L_2(S)} \leqslant \\ &\leqslant k_3 \|v_n\|_{L_2(S)} \|g^1 - g_n^1\|_{L_2(S)}, \end{aligned}$$

отсюда

$$\|g^0 - u_n\|_{L_2(S)} = \|v_n\|_{L_2(S)} \leqslant \\ \leqslant k_3 \|g^1 - g_n^1\|_{L_2(S)} \to 0 \quad (2.5)$$

при $n \to \infty$. Таким образом, функция u_n, определяемая равенством (2.3) с коэффициентами $\{c_i^n\}_{i=1}^n$ и c_0^n, удовлетворяющими (2.1) и

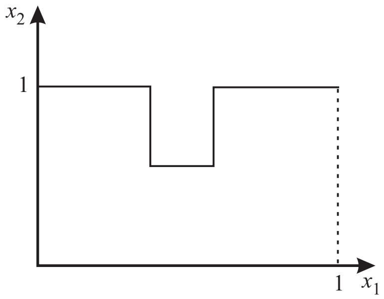

Рис. 1. Область канала

(2.2), является гармонической и имеет место сходимость

$$\|u-u_n\|_{L_2(S)}+\left\|\frac{\partial u}{\partial\nu}-\frac{\partial u_n}{\partial\nu}\right\|_{L_2(S)}\to 0$$

при $n\to\infty$, из чего следует утверждение теоремы.

Пусть теперь $S=S_1\bigcup S_2$, $S_1\bigcap S_2=\phi$. Рассмотрим краевую задачу

$$\Delta u=0 \text{ в } \Omega, \tag{2.6}$$

$$u=g^0 \text{ на } S_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial\nu}u=g^1 \text{ на } S_2.$$

Согласно МТП приближённое решение u_n задачи (2.6) будем искать в виде (2.3). Из доказанной теоремы следует, что

$$\inf_{\{c_i^n\}_{i=0}^n}\left\{\left\|g^0-c_0^n-\sum_{i=1}^n c_i^n\varphi_i\right\|^2_{L_2(S_1)}+\right.$$
$$\left.+\left\|g^1-\sum_{i=1}^n c_i^n\frac{\partial\varphi_i}{\partial\nu}\right\|^2_{L_2(S_2)}\right\}\to 0$$

при $n\to\infty$, тогда $\|u-u_n\|_{L_2(\Omega)}\to 0$ при $n\to\infty$, что позволяет применять МТП для задач со смешанными граничными условиями.

3. МТП в пространстве $W_2^1(\Omega)$

Так как

$$\|u-u_n\|_{L_2(\Omega)}\leqslant k_4\|u-u_n\|_{L_2(S)},$$

то из (2.5) следует

$$\|u-u_n\|_{L_2(\Omega)}\leqslant k_3k_4\|g^1-g_n^1\|_{L_2(S)}. \tag{3.1}$$

Из (2.4) следует, что

$$\int_\Omega\big(\nabla(u-u_n),\nabla(u-u_n)\big)ds=$$
$$=\int_\Omega(\nabla v_n,\nabla v_n)ds\leqslant$$
$$\leqslant k_5\|g^1-g_n^1\|_{L_2(S)}. \tag{3.2}$$

Объединяя (3.1) и (3.2), получаем

$$\|u-u_n\|_{W_2^1(\Omega)}\leqslant k_6\|g^1-g_n^1\|_{L_2(S)}\to 0,$$

$n\to\infty$. Следовательно,

$$\int_S\big(\nabla(u-u_n),\nabla(u-u_n)\big)ds\to 0,$$

поэтому

$$\int_S\big(\nabla(u-u_n),\tau\big)^2ds=$$
$$=\int_S\big(\nabla(u-u_n),\nabla(u-u_n)\big)ds-$$
$$-\int_S\big(\nabla(u-u_n),\nu\big)^2ds\to 0$$

при $n\to\infty$. Здесь $\tau(y)=(\tau_1(y),\dots,\tau_{m-1}(y))$ — ортогональный базис в касательной плоскости, $(\nabla v,\tau)^2=(\nabla v,\tau_1)^2+\dots+(\nabla v,\tau_{m-1})^2$. Таким образом, имеет место сходимость

$$\inf_{\{c_i^n\}_{i=0}^n}\left\{\left\|g^0-c_0^n-\sum_{i=1}^n c_i^n\varphi_i\right\|^2_{L_2(S_1)}+\right.$$
$$+\int_{S_1}\left(\nabla\Big(g^0-\sum_{i=1}^n c_i^n\varphi_i\Big),\tau\right)^2ds+$$
$$\left.+\left\|g^1-\sum_{i=1}^n c_i^n\frac{\partial\varphi_i}{\partial\nu}\right\|^2_{L_2(S_2)}\right\}\to 0$$

при $n\to\infty$.

Полученное приближённое решение краевой задачи (2.6) будет сходиться в пространстве $W_2^1(\Omega)$.

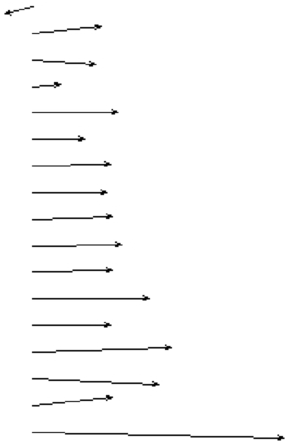

Рис. 2. $\nabla u_n^1(1, x_2)$ при $n = 144$

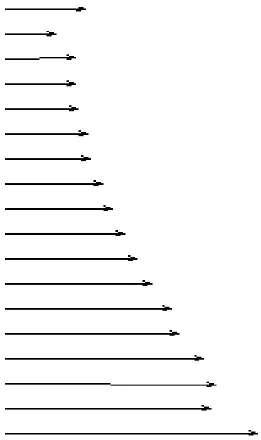

Рис. 3. $\nabla u_n^2(1, x_2)$ при $n = 144$

4. Результаты решения модельных задач

Рассматривается задача о течении идеальной жидкости в канале (рис. 1). Часть границы S_1 имеет вид: $S_1 = S_{10} + S_{11}$, $S_{10} = \{(x_1, x_2) \in S : x_1 = 0\}$, $S_{11} = \{(x_1, x_2) \in \in S : x_1 = 1\}$. Примем $g^0 = 0$ на S_{10}, $g^0 = -1000$ на S_{11}, $g^1 = 0$. Обозначим через u_n^1 и u_n^2 приближённые решения задачи (2.6) в пространствах L_2 и W_2^1. Приближённое решение u_n^1 имеет вид (2.3) с коэффициентами $c^1 = \{c_i^1\}_{i=0}^n$, доставляющими минимум функционалу $F_1(c)$; u_n^2 — вид (2.3) с коэффициентами $c^2 = \{c_i^2\}_{i=0}^n$, доставляющими минимум функционалу $F_2(c)$. Здесь

$$F_1(c) = \left\| g^0 - c_0^n - \sum_{i=1}^n c_i^n \varphi_i \right\|_{L_2(S_1)}^2 + \\ + \left\| g^1 - \sum_{i=1}^n c_i^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial \nu} \right\|_{L_2(S_2)}^2,$$

$$F_2(c) = \left\| g^0 - c_0^n - \sum_{i=1}^n c_i^n \varphi_i \right\|_{L_2(S_1)}^2 + \\ + \int_{S_1} \left(\nabla (g^0 - \sum_{i=1}^n c_i^n \varphi_i), \tau \right)^2 ds + \\ + \left\| g^1 - \sum_{i=1}^n c_i^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial \nu} \right\|_{L_2(S_2)}^2.$$

Для отыскания коэффициентов c^1 и c^2 решались следующие задачи:

$$\frac{\partial F_1(c)}{\partial c_i} = 0, \quad i = \overline{0, n}$$

и

$$\frac{\partial F_2(c)}{\partial c_i} = 0, \quad i = \overline{0, n}.$$

На рис. 2 и 3 изображены векторы градиентов приближённых решений u^1 и u^2 на S_{11} при $n = 144$. Для оценки качества приближённых решений рассматривались величины $\Delta^1 = F_1(c^1)$ и $\Delta^2 = F_1(c^2)$, которые характеризуют отклонение граничных значений приближённого решения от заданных граничных значений.

Заметим, что на S_1 точное решение u рассматриваемой задачи удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0.$$

Поэтому для оценки качества приближения градиента решения использовались величины

$$\delta^k = \left\| \frac{\partial u_n^k}{\partial x_2} \right\|_{L_2(S_1)}, \quad k = 1, 2.$$

Результаты расчётов для различных n приведены в таблице.

n	Δ^1	Δ^2	δ^1	δ^2
48	0,4134	0,4172	0,1050	0,0011
144	0,1589	0,1610	0,0442	0,0002
288	0,0452	0,1129	0,0303	$1 \cdot 10^{-5}$
336	0,0252	0,0936	0,0304	$7 \cdot 10^{-6}$

Из таблицы видно, что величина δ^1 не убывает с ростом n, следовательно, ∇u_n^1 плохо приближает ∇u в Ω.

Литература

1. *Лежнев В. Г.* Асимптотические задачи линейной гидродинамики. Краснодар: КубГУ, 1993. 92 с.
2. *Лежнев В. Г., Данилов Е. А.* Задачи плоской гидродинамики. Краснодар: КубГУ, 2000. 91 с.
3. *Купрадзе В. Д.* Методы потенциала в теории упругости. М.: ГИФМЛ, 1963. 472 с.
4. *Купрадзе В. Д., Алексидзе М. А.* Метод функциональных уравнений для приближенного решения некоторых граничных задач // ЖВМиМФ. №4. 1964. С. 683–715.
5. *Xin Li.* Convergence of the method of fundametnal solutions for solving the boundary value problem of modified Helmholtz equation // ELSEVIER. Applied Mathematics and Computation. Vol. 159. 2004. P. 113–125.
6. *Alves C. J. S., Valtchev S. S.* Numerical comparison of two meshfree methods for acoustic wave scattering // Eng. Analysis Boundary Elements. Vol. 29. 2005. P. 371–382.
7. *Alves C. J. S. Chen C. S.* A new method of fundamental solutions applied to nonhomogeneous elliptic problems // Adv. Comp. Math. Vol. 23. 2005. P. 125–142.
8. *Karageorghis A. Fairweather G.* The method of fundamental solutions for the numerical solution of the biharmonic equation // Computer physics. Vol. 69. 1987. P. 434–459.
9. *Дроботенко М. И., Ветошкин П. В.* О решении уравнений Лапласа и Пуассона методом точечных потенциалов // Компьютеризация в научных исследованиях: Сб. докладов конф. Краснодар. 2002. С. 179–186.

Статья поступила 15 января 2007 г.
Кубанский Государственный Университет