

УДК 539.3

## О ДИНАМИЧЕСКОЙ ЖЕСТКОСТИ НЕОДНОРОДНОГО, ЗАПОЛНЕННОГО ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТЬЮ ЦИЛИНДРА<sup>1</sup>

Белянкова Т. И.<sup>2</sup>, Анджилович И. Е.<sup>3</sup>, Калинин В. В.<sup>4</sup>

ON DYNAMICAL RIGIDITY OF AN INHOMOGENEOUS CYLINDER FILLED WITH PERFECT LIQUID

Belyankova T. I., Andzhikovich I. E., Kalinchuk V. V.

Radial harmonic oscillations of a rigid bandage on the surface of an elastic cylindrical tube are investigated. The cylinder is made of functionally gradient material with properties varying across the radius and filled with perfect liquid. Properties of the integral equation are analyzed; a solution method is offered and implemented. The effect of material heterogeneity on the stress field in the contact area and on the dynamic rigidity of the cylinder is investigated. Results are presented in the form of diagrams.

Исследуются радиальные, инициированные жестким биндажом, колебания толсто-стенного, заполненного идеальной жидкостью бесконечного кругового цилиндра, выполненного из функционально градиентного материала. Краевая задача для системы уравнений с переменными коэффициентами сведена к интегральному уравнению, символ ядра которого строится численным образом. Исследованы свойства интегрального уравнения, предложен и реализован метод его решения. Изучено влияние градиентности материала цилиндра на поле напряжений в области контакта и на его динамическую жесткость.

Результаты представлены в виде графиков. Ранее задача о радиальных колебаниях бесконечного цилиндра, выполненного из функционально градиентного материала и заполненного идеальной жидкостью, была рассмотрена в [1]. Исследована структура волнового поля на поверхности цилиндра при различных типах градиентности материала. В [2] была рассмотрена динамическая контактная задача для однородного, заполненного идеальной жидкостью цилиндра. Исследовано влияние наличия жидкости на распределение на-

пряжений в зоне контакта, а также на структуру волнового поля на свободной поверхности цилиндра.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается задача о радиальных колебаниях биндажа на поверхности бесконечного цилиндра, заполненного идеальной жидкостью. Внутренний и внешний радиусы цилиндра равны соответственно  $R_1$  и  $R_0$ , ширина биндажа  $2a$ . Материал стенки цилиндра является упругим, модули и плотность которого представляют собой произвольные функции радиуса  $r$ .

Рассмотрим вспомогательную задачу, в которой действие биндажа заменено действием гармонической нагрузки  $\mathbf{q}(R_0, z)e^{-i\omega t}$ , распределенной в области  $|z| \leq a$  на поверхности цилиндра. Краевая задача описывается системой уравнений [1]

$$\nabla \cdot \Theta = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

$$\Delta \psi = \frac{1}{C^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

<sup>1</sup>Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (05-08-65499, 06-01-00726), РФФИ р2006юг (06-08-96635).

<sup>2</sup>Белянкова Татьяна Ивановна, канд. физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник НИИ механики и прикладной математики Южного федерального университета.

<sup>3</sup>Анджилович Игорь Евгеньевич, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник НИИ механики и прикладной математики Южного федерального университета.

<sup>4</sup>Калинчук Валерий Владимирович, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН.

и граничными условиями

$$\begin{aligned}
 r = R_0 : \mathbf{n}_r \cdot \Theta &= \\
 &= \begin{cases} \mathbf{q}(R_0, \varphi, z)e^{-i\omega t}, & -a \leq z \leq a, \\ 0, & |z| > a, \end{cases} \\
 r = R_1 : \theta_{rr} &= -\rho_1 \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad \theta_{rz} = 0, \\
 \theta_{r\varphi} &= 0, \quad -\infty \leq z \leq \infty, \\
 \frac{\partial u_r}{\partial t} &= -\frac{\partial \psi}{\partial r}.
 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь  $\Theta$  — тензор, определяющий напряженное состояние среды,  $\theta_{rr}$ ,  $\theta_{rz}$ ,  $\theta_{r\varphi}$  — его компоненты,  $\mathbf{u} = \{u_r, u_\phi, u_z\}$  — вектор перемещения точки в упругой среде,  $\rho$  — плотность материала цилиндра,  $\mathbf{n}_r$  — нормаль к его боковой поверхности,  $C$  и  $\rho_1$  — скорость звука в жидкости и ее плотность,  $\psi$  — потенциал,  $\omega$  — частота колебаний. Скалярная форма системы уравнений (1.1), (1.2) в цилиндрических координатах приведена в [1].

## 2. Уравнения колебаний неоднородной среды

Закон Гука для неоднородной среды в отсутствие начальных напряжений представляется в виде

$$\Theta = \lambda(r) \operatorname{tr} \varepsilon(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{I} + 2\mu(r) \varepsilon(\mathbf{u}),$$

где  $\varepsilon(\mathbf{u})$  — линейный тензор деформации,  $\lambda(r)$ ,  $\mu(r)$  — достаточно гладкие функции. Компоненты тензора  $\Theta$  в условиях осевой симметрии имеют вид

$$\begin{aligned}
 \theta_{rr} &= \lambda_{2m} u_{r,r} + \lambda(r^{-1} u_r + u_{z,z}), \\
 \theta_{zz} &= \lambda_{2m} u_{z,z} + \lambda(r^{-1} u_r + u_{r,r}), \\
 \theta_{\varphi\varphi} &= \lambda_{2m} r^{-1} u_r + \lambda(u_{r,r} + u_{z,z}), \\
 \lambda_{2m} &= \lambda + 2\mu, \\
 \theta_{rz} &= \theta_{zr} = \mu(u_{r,z} + u_{z,r}).
 \end{aligned} \quad (2.1)$$

После внесения выражений (2.1) в уравнение (1.1) и применения преобразования Фурье по координате  $z$  ( $\alpha$  — параметр преобразования,  $U_r$ ,  $U_z$ ,  $\Psi$  — трансформанты Фурье функций  $u_r$ ,  $u_z$ ,  $\psi$  соответственно) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 \lambda_{2m} U_r'' + l^+ U_r' + (l^- r^{-1} - \mu \sigma_2^2) U_r - \\
 - i\alpha \lambda_m U_z' - i\alpha \lambda' U_z = 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -i\alpha \lambda_m U_r' - i\alpha (m + \lambda r^{-1}) U_r + \\
 + \mu U_z'' + m U_z' - \lambda_{2m} \sigma_1^2 U_z = 0, \\
 \Psi'' + r^{-1} \Psi' - \gamma^2 \Psi = 0.
 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \sigma_1^2 &= \alpha^2 - \mu \lambda_{2m}^{-1} \kappa_2^2, \quad \sigma_2^2 = \alpha^2 - \kappa_2^2, \\
 \gamma^2 &= \alpha^2 - v^{-2} \kappa_2^2, \\
 \lambda_m &= \lambda + \mu, \\
 l^+ &= \lambda'_{2m} + \lambda_{2m} r^{-1}, \quad l^- = \lambda' - \lambda_{2m} r^{-1}, \\
 m &= \mu' + \mu r^{-1}, \quad v = C C_S^{-1}.
 \end{aligned}$$

В формулах (2.2) использованы безразмерные параметры: линейные величины отнесены к толщине стенки трубы  $h = R_0 - R_1$ , напряжения и усилия в упругой среде — к фиксированному значению модуля сдвига материала цилиндра  $\mu_0$ , значения скоростей к скорости распространения сдвиговой волны  $C_S = \mu_0 \rho^{-1}$ . В качестве частоты используется безразмерный параметр  $\kappa_2 = \omega h C_S^{-1}$ . Уравнения (2.2) представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, для решения которой необходимо привлекать численные методы [3–6].

## 3. Решение задачи о колебаниях неоднородного цилиндра

Решение краевой задачи (1.1)–(1.3) для цилиндра представляется в виде ( $\mathbf{u} = \uparrow(u_r, u_z)$  — вектор перемещений,  $\mathbf{q} = \uparrow(q_r, q_z)$  — вектор напряжений):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}(r, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \mathbf{k}(z - \xi, r, \omega) \mathbf{q}(\xi) d\xi, \\
 \mathbf{k}(s, r, \omega) &= \int_{\Gamma} \mathbf{K}(\alpha, r, \omega) e^{i\alpha s} d\alpha.
 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Элементы матрицы-функции  $\mathbf{K}(\alpha, r, \kappa_2)$  имеют структуру [1]

$$K_{mn} = \frac{1}{\Delta_0} \sum_{i=1}^4 \Delta_{in} y_{m+2,i}, \quad m, n = 1, 2. \quad (3.2)$$

Здесь  $\Delta_0$  — определитель,  $\Delta_{in}$  — алгебраическое дополнение элемента  $l_{in}$  матрицы

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} & 0 \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34} & l_{35} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} & 0 \\ 0 & 0 & l_{53} & 0 & l_{55} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Элементы  $l_{mn}$  определяются формулами ( $m = 1, 2, 3, 4$ ):

$$l_{m1} = l_m^+(R_0), \quad l_{m3} = l_m^+(R_1),$$

$$l_{m2} = l_m^-(R_0), \quad l_{m4} = l_m^-(R_1),$$

$$l_m^+(r) = \lambda_m y_{m1}(\alpha, r) + \lambda r^{-1} y_{m3}(\alpha, r) - \lambda y_{m4}(\alpha, r), \quad (3.4)$$

$$l_m^-(r) = \mu^+ y_{m2}(\alpha, r) + \alpha^2 \mu^- y_{m3}(\alpha, r),$$

$$l_{35} = \rho' \kappa_2 v I_0(\gamma R_0), \quad l_{53} = -1,$$

$$l_{55} = (2\pi)^{-1} \gamma \lambda_1 I_1(\gamma R_0),$$

$\lambda_1 = 2\pi C \omega^{-1}$  — длина звуковой волны в жидкости,  $\theta = \alpha^2 - 0, 5\kappa_2^2$ .

Участвующие в формулах (3.1)–(3.4) функции  $y_{ij}(\alpha, r)$ ,  $i, j = 1, 2, 3, 4$  представляют собой набор линейно независимых решений системы уравнений

$$\mathbf{Y}' = \mathbf{M}(\alpha, r) \mathbf{Y} \quad (3.5)$$

с начальными условиями  $y_{ij}(\alpha, R_0) = \delta_{ij}$  ( $\delta_{ij}$  — символ Кронекера) и матрицей

$$\mathbf{M} = \lambda_{2m}^{-1} \|m_{ij}\|_{i,j=1}^4 \quad (3.6)$$

с элементами

$$m_{11} = -\lambda'_{2m} - \lambda_{2m} r^{-1}, \quad m_{12} = \lambda_m,$$

$$m_{13} = \sigma_2^2 \mu \lambda_{2m}^{-1} - \lambda' \lambda_{2m}^{-1} r^{-1} + r^{-2}, \quad (3.7)$$

$$m_{14} = \lambda' \lambda_{2m}^{-1},$$

$$m_{21} = -\alpha^2 \lambda_m \mu^{-1},$$

$$m_{22} = -\mu' \mu^{-1} - r^{-1},$$

$$m_{23} = -\alpha^2 (\mu' + \lambda_m) \mu^{-1},$$

$$m_{24} = \lambda_{2m} \mu^{-1} \sigma_1^2,$$

$$m_{31} = m_{42} = 1, \quad m_{3n} = 0, \quad n = 2, 3, 4,$$

$$m_{4n} = 0, \quad n = 1, 3, 4.$$

Для частного случая, когда материал цилиндра является однородным, решение краевой задачи (1.1)–(1.3) приведено в [2].

#### 4. Интегральное уравнение задачи о радиальных колебаниях бандажа на поверхности цилиндра

Интегральное представление (3.1) с функцией (3.2) описывает перемещение произвольной точки цилиндра, выполненного из неоднородного по толщине материала. В случае радиальных колебаний бандажа на цилиндре в представлении (3.2) необходимо положить  $r = R_0$ . Перемещение внутренней поверхности бандажа (поверхности цилиндра в области контакта) считается известным. Далее будем предполагать, что трение в области контакта отсутствует. Выражение (3.1) в этом случае представляет собой интегральное уравнение относительно неизвестной функции распределения контактных напряжений под бандажом

$$u_r(R_0, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a_2} k_{11}(z - \xi, R_0, \kappa_2) q_r(\xi) d\xi, \quad (4.1)$$

$$k_{11}(s, R_0, \kappa_2) = \int_{\Gamma} K_{11}(\alpha, R_0, \kappa_2) e^{i\alpha s} d\alpha.$$

Функция  $K_{11}$  определяется формулами (3.3)–(3.7) при условии, что  $r = R_0$ . Особенностью рассматриваемого класса задач является наличие у функции  $K_{11}$  вещественных нулей и полюсов, обуславливающих осцилляцию ядра интегрального уравнения. Контур  $\Gamma$  в представлении (4.1), как правило [7, 8], почти всюду совпадает с вещественной осью и отклоняется от нее, обходя положительные полюсы снизу, а отрицательные сверху.

Далее рассматриваются неоднородные среды, упругие параметры которых определяются выражением

$$\mu(r) = \mu_0 f(r), \quad \lambda(r) = \lambda_0 f(r), \quad (4.2)$$

где функция  $f(r)$  представлена кривыми на рис. 1. Здесь  $R_0, R_1$  — внешний и внутренний радиусы цилиндра соответственно,  $k$  — коэффициент, определяющий пределы изменения свойств материала стенки цилиндра.  $\lambda_0, \mu_0$  в формуле (4.2) — некоторые заданные значения упругих модулей. Рассматривается «нормальный» тип неоднородности (кривые 1, 5 и 7 — жесткость материала увеличивается по мере удаления от внешней поверхности), и «аномальный» тип неоднородности (кривые 2, 6 и

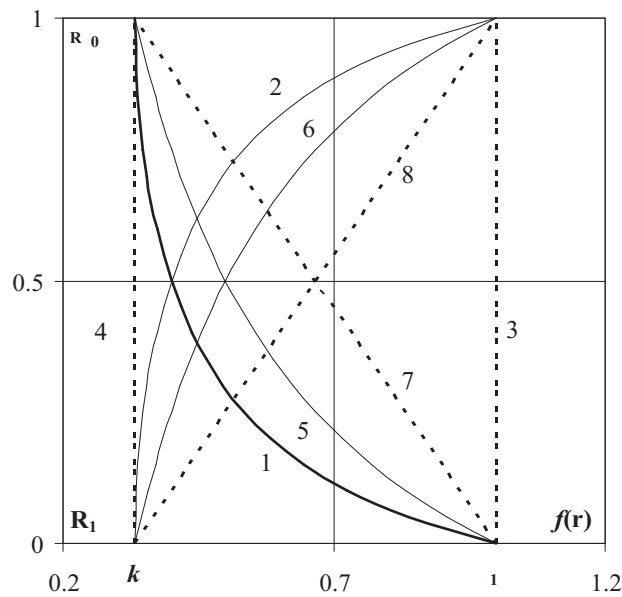


Рис. 1. Изменение свойств материала стенки цилиндра от внешнего ( $R_0$ ) до внутреннего ( $R_1$ ) радиуса. «Нормальный» тип неоднородности (кривые 1, 5 и 7 — жесткость материала увеличивается в глубину), и «аномальный» тип неоднородности (кривые 2, 6 и 8 — жесткость уменьшается в глубину). Кривые 1 и 2 представляют кубический, 5 и 6 — квадратичный, 7 и 8 — линейный законы

8 — жесткость уменьшается). Кривые 1 и 2 представляют кубический, 5 и 6 — квадратичный, 7 и 8 — линейный законы. Цифрами 3 и 4 отмечены линии, соответствующие однородной среде с предельными значениями модулей ( $f(r) = 1$  — кривая 3,  $f(r) = k$  — кривая 4).

Исследования показали [10], что динамические свойства неоднородной среды зависят от характера изменения параметров, который классифицируется:

- по типу неоднородности: «нормальная» (жесткость увеличивается по глубине) или «аномальная» (жесткость уменьшается по глубине);

- по интегральному коэффициенту неоднородности

$$f_0 = \frac{1}{h} \int_{R_1}^{R_0} f(r) dr.$$

Из графиков, представленных на рис. 1, видно, что значения интегральных коэффициентов для зависимостей типа 1 и 2, 5 и 6, 7 и 8 попарно равны. Это означает, что каждый раз имеем один и тот же неоднородный материал, который в одном случае (кривые 1, 5 и 7) «ориентирован нормально» — жесткой стороной внутрь цилиндра, во втором (кривые 2, 6 и 8) «ориентирован аномально» — жесткой стороной наружу («вы-

вернут наизнанку»). В [1] было проведено детальное исследование свойств функции  $K_{11}$  (4.1) для цилиндра, выполненного из аналогичных материалов. Анализ показал, что распределение нулей и полюсов этой функции зависит от характера изменения свойств материала, причем основным параметром, определяющим влияние градиентности материала на дисперсионные свойства цилиндра, и, следовательно, на структуру волнового поля на его свободной поверхности, выступает интегральный коэффициент. Тип неоднородности («нормальный» или «аномальный») играет в этом плане незначительную роль. Иное наблюдается в зоне контакта. Проведенный в настоящей работе анализ показал, что волновое поле в области контакта определяется не только значением интегрального коэффициента, но и типом неоднородности. На некоторых частотах изменение ориентации материала с «нормальной» на «аномальную» приводит к резкому изменению динамических свойств выполненного из него объекта.

Это обстоятельство подтверждают графики распределения полюсов (рис. 2а) и нулей (рис. 2б) функции  $K_{11}$ , рассчитанные для «нормальной» (сплошные кривые) и «аномальной» (прерывистые кривые) ориентации материала. При расчетах использовался квадратичный закон изменения параметров (кри-

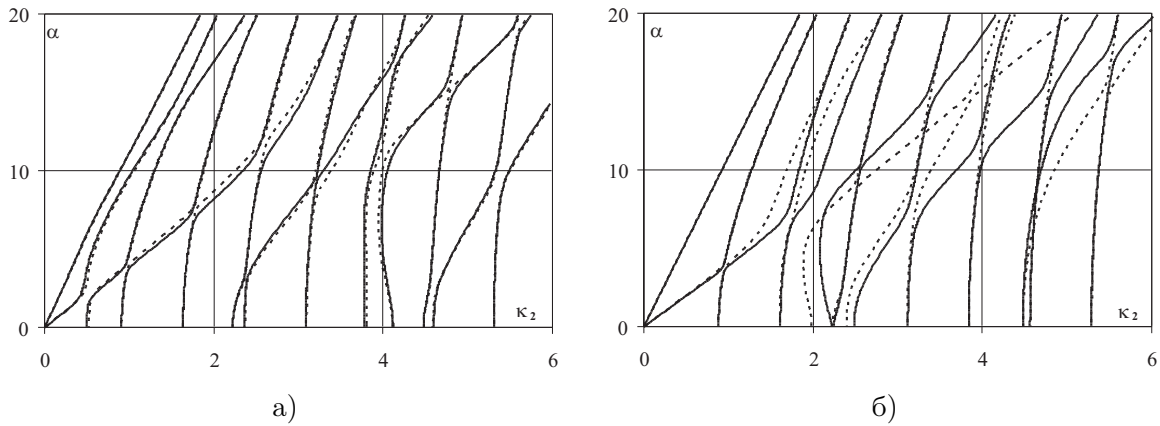


Рис. 2. Распределение полюсов (а) и нулей (б) функции  $K_{11}$  для заполненного жидкостью цилиндра, выполненного из неоднородного, изменяющегося по квадратичному закону, материала. Сплошные кривые — «нормально» ориентированный, прерывистые — «аномально» ориентированный материал

вые 5 и 6 на рис. 1). Как следует из графиков, ориентация материала (для кривых 5 и 6 интегральный коэффициент один и тот же), не оказывая ощутимого влияния на полюса, существенно влияет на распределение нулей, что позволяет сделать предположение об определенной чувствительности контактных напряжений к изменению свойств материала цилиндра. Расчеты показали, что в большинстве случаев для всех рассматриваемых в данной работе типов градиентности среды имеет место строгое чередование нулей и полюсов, чем обеспечивается единственность решения интегрального уравнения [8]. Исключение составляют диапазоны  $[3,85-4,15]$  для полюсов и  $[1,98-2,25]$  для нулей, что требует специального выбора контура интегрирования [7, 8]. Наличие значительного количества нулей и полюсов, свидетельствуя о сильной осцилляции ядра, определяет необходимость использования для решения интегрального уравнения (4.1) специальных методов, позволяющих учитывать это обстоятельство [6-10].

## 5. Решение интегрального уравнения

Трансформанта Фурье решения интегрального уравнения (4.1) представляется формулой [6, 10]

$$Q(\alpha) = T(\alpha) \Pi^{-1}(\alpha) + \sum_{k=1}^{2M} C_k e^{i\alpha z_k}, \quad (5.1)$$

$$\Pi(\alpha) = \prod_{k=1}^M (\alpha^2 - \gamma_k^2) (\alpha^2 - \zeta_k^2)^{-1}, \quad (5.2)$$

где  $\zeta_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n_1$ ) и  $\gamma_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n_2$ ) — вещественные полюсы и нули символа  $K_{11}(\alpha, R_0, \kappa_2)$ , остальные  $\zeta_k$  ( $k = n_1 + 1, \dots, M$ ) и  $\gamma_k$  ( $k = n_2 + 1, \dots, M$ ,  $M \geq \max\{n_1, n_2\}$ ) — комплексные полюсы и нули  $K_{11}(\alpha, R_0, \kappa_2)$ , лежащие в полосе  $|\operatorname{Im} \alpha| \leq \varepsilon_0$ ,  $z_k$  — координаты точек, которые делят отрезок  $[-a, a]$  на равные части. Метод построения функции  $T(\alpha)$ , а также система уравнений для определения коэффициентов  $C_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 2M$  приведены в [2, 6, 10].

## 6. Волновое поле в области контакта

Формулы (5.1) и (5.2) после применения обратного преобразования Фурье позволяют детально исследовать влияние градиентности материала стенки цилиндра на распределение напряжений в зоне его контакта с банджом. Как отмечалось выше, волновое поле в области контакта определяется не только значением интегрального коэффициента, но и типом неоднородности. На некоторых частотах изменение ориентации материала с «нормальной» на «аномальную» приводит к резкому изменению динамических свойств выполненного из него объекта. Это обстоятельство иллюстрируют эпюры контактных напряжений для цилиндра в отсутствие жидкости, приведенные на рис. 3а и 3б. Номера кривых соответствуют нумерации типов функциональной градиентности на рис. 1.

Для иллюстрации выбрано значение частоты  $\kappa_2 = 2,48$ , при которой контактные напряжения для однородного материала распределяются сравнительно равномерно:

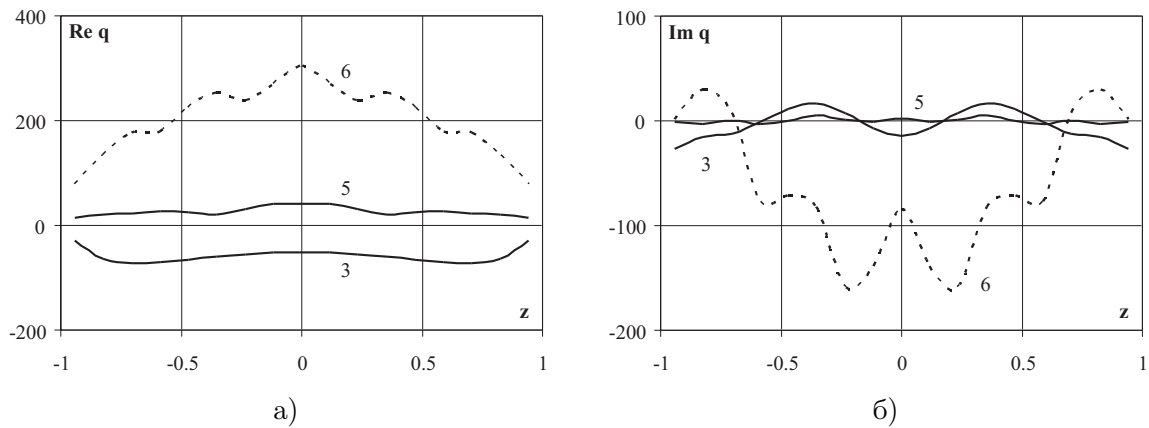


Рис. 3. Распределение контактных напряжений для однородного (кривые 3) и неоднородного «нормально ориентированного» (кривые 5) и «аномально ориентированного» (кривые 6) материала стенки цилиндра в отсутствие жидкости при значении частоты  $\kappa_2 = 2,48$

– реальная и мнимая составляющие характеризуются слабой осцилляцией. Замена однородного материала на неоднородный «нормального» типа (кривые 5) приводит к незначительному изменению в картине распределения напряжений:

– несколько уменьшилась амплитуда и изменилась фаза контактных напряжений, ослабела осцилляция мнимой составляющей. Материал стал более податливым. Изменение «нормальной» ориентации неоднородного материала на «аномальную» (кривые 6) приводит к резкому изменению волновой картины под бандажом: значительно возросла амплитуда и изменилась фаза контактных напряжений. Материал стал более жестким. Усилилась осцилляция напряжений в области контакта, что свидетельствует о возможности возникновения резонансного эффекта. Роль наличия жидкости внутри цилиндра на процесс формирования поля контактных напряжений иллюстрируют кривые на рис. 4а и 4б. Из графиков следует, что для «нормально ориентированного» материала (кривые 5) наличие жидкости внутри цилиндра почти не влияет на распределение контактных напряжений. Для однородного материала (кривые 3) в этом случае несколько уменьшается амплитуда распределения напряжений, изменяются фазовые характеристики, ослабевает осцилляция мнимой составляющей. Для «аномально ориентированного» материала наличие жидкости внутри цилиндра приводит к резкому изменению волновой картины в зоне контакта как по фазе, так и по амплитуде, изменяется характер осцилляции. На других частотах наблюдаются аналогичные эффекты с

той разницей, что резкое изменение волновой картины может наступить при «нормальной ориентации» материала. Это свидетельствует о необходимости в каждом конкретном случае проводить исследование динамических свойств объекта с учетом характера изменения свойств материала, значений частоты возможного воздействия и наличия жидкости.

### 7. Влияние градиентности материала трубопровода на его динамическую жесткость

Для изучения влияния свойств материала на динамическую жесткость трубопровода необходимо использовать формулу (5.1), положив  $\alpha = 0$ . На рис. 5 и 6 представлены графики динамической жесткости цилиндра (рис. 5 – реальные, рис. 6 – мнимые составляющие жесткости), рассчитанные по формуле (5.1).

Рис. 5а и 6а – «нормально ориентированный», рис. 5б и 6б – «аномально ориентированный» материал цилиндра. Сплошные линии соответствуют пустому, пунктирные линии – заполненному жидкостью трубопроводу. Как следует из графиков, динамическая жесткость пустого цилиндра существенно зависит от типа градиентности материала. Изменение ориентации материала с «нормальной» (рис. 5а и 6а) на «аномальную» (рис. 5б и 6б) приводит к значительному изменению характера поведения динамической жесткости по частоте в сторону его усложнения. Происходит сдвиг максимумов амплитуды по частоте, резко изменяется фаза, расширяется частотный диапазон возможного воз-

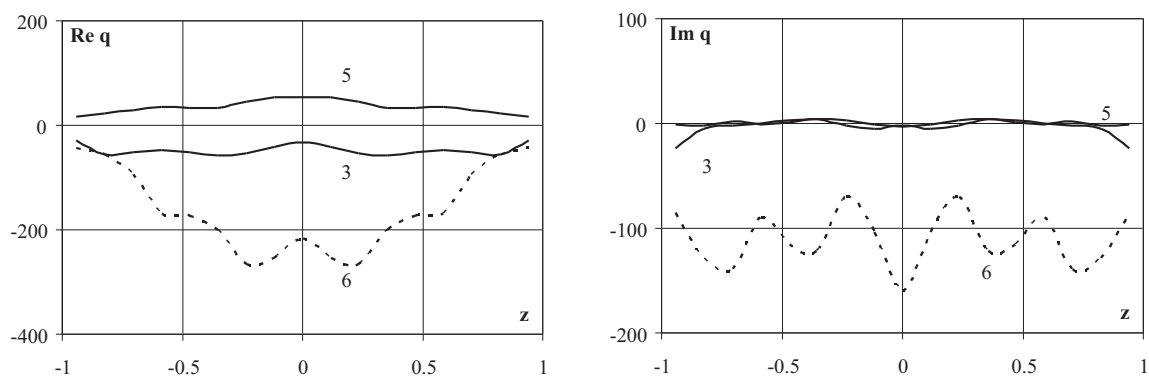


Рис. 4. Распределение контактных напряжений для однородного (кривые 3) и неоднородного «нормально ориентированного» (кривые 5) и «аномально ориентированного» (кривые 6) материала стенки цилиндра при наличии жидкости при значении частоты  $\kappa_2 = 2,48$

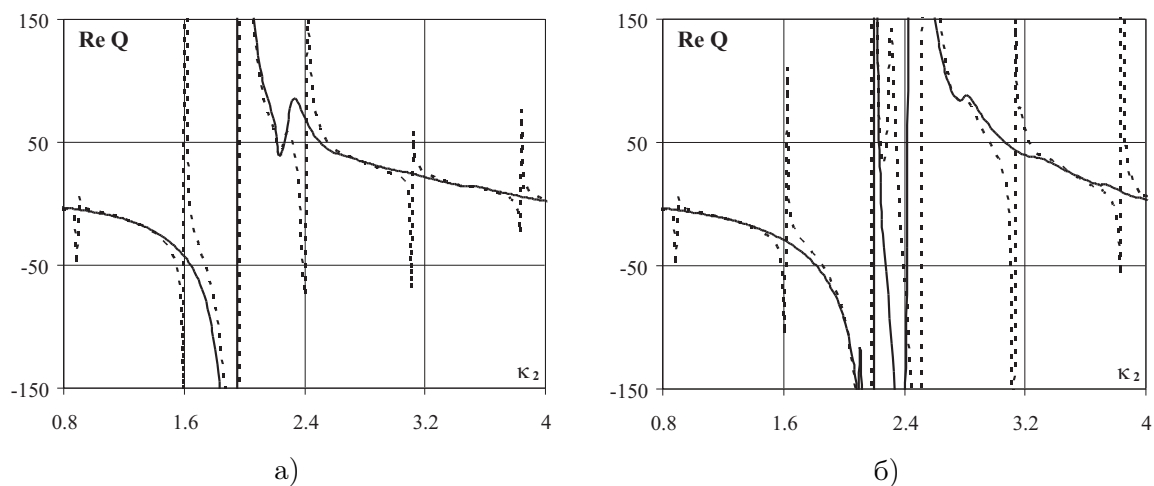


Рис. 5. Реальная составляющая динамической жесткости неоднородного цилиндра. *а* — «нормально ориентированный», *б* — «аномально ориентированный» материал. Пустой цилиндр — сплошная линия, заполненный цилиндр — прерывистая линия

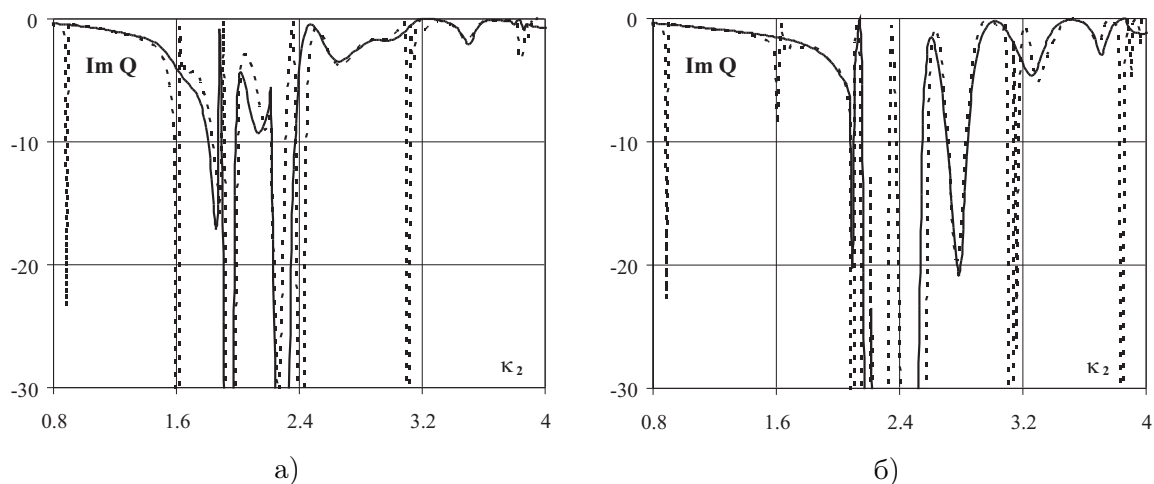


Рис. 6. Мнимая составляющая динамической жесткости неоднородного цилиндра. *а* — «нормально ориентированный», *б* — «аномально ориентированный» материал. Пустой цилиндр — сплошная линия, заполненный цилиндр — прерывистая линия

никновения резонансных явлений при взаимодействии с массивным бандажом (диапазон, в котором  $\operatorname{Re} Q > 0$ ,  $|\operatorname{Im} Q| \approx \varepsilon < 1$ ). Изменяется характер излучения из области контакта, что определяется поведением  $\operatorname{Im} Q$ . Из графиков следует, что на низких частотах поведение динамической жесткости определяется интегральным коэффициентом неоднородности материала — кривые, соответствующие различной ориентации материала, почти неразличимы. В области высоких частот ориентация неоднородного материала играет более существенную роль. Заполнение цилиндра жидкостью приводит к значительному изменению его динамической жесткости. На амплитудно-частотной характеристике появляется счетное множество, связанных с критическими частотами возникновения нулей, максимумов. Интерес представляет то обстоятельство, что существуют диапазоны частот, на которых наличие жидкости почти не влияет на динамическую жесткость цилиндра. Наличие жидкости проявляется лишь в окрестности частот возникновения или (в случае отрицательной кривизны) исчезновения нулей. Представленные графики иллюстрируют, что динамическая жесткость является более информативной характеристикой свойств среды по сравнению с поверхностным волновым полем. Исследования показывают, что подбором свойств материала можно эффективно управлять жесткостью конструкции, добиваясь на заданной частоте значительного ее повышения.

### Заключение

Разработан и реализован метод исследования колебаний жесткого бандажа на поверхности неоднородного цилиндра, заполненного идеальной жидкостью. Изучены закономерности влияния параметров материала цилиндра на напряженное состояние в зоне контакта. Установлено, что ориентация неоднородного материала существенно влияет на распределение напряжений в зоне контакта и на динамическую жесткость объекта. Показано,

что динамическая жесткость является информативной характеристикой, позволяющей эффективно регистрировать изменение свойств среды.

### Литература

1. *Калинчук В. В., Белянкова Т. И., Лыжов В. А.* К проблеме моделирования динамических процессов в нефте-газо-трубопроводах // Экологический вестник научных центров черноморского экономического сотрудничества. 2005. № 4. С. 5–13.
2. *Калинчук В. В., Белянкова Т. И.* Динамическая контактная задача для заполненного несжимаемой жидкостью бесконечного цилиндра // Экологический вестник научных центров черноморского экономического сотрудничества. 2006. № 1. С. 33–38.
3. *Ананьев И. В., Бабешко В. А.* Колебания штампа на слое с переменными по глубине характеристиками // МТТ. 1978. № 1. С. 64–69.
4. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука. 1989. 343 с.
5. *Ананьев И. В., Калинчук В. В., Полякова И. Б.* О возбуждении волн вибрирующим штампом в среде с неоднородными начальными напряжениями // ПММ. 1983. Т. 47. Вып. 3. С. 483–489.
6. *Калинчук В. В., Белянкова Т. И.* Динамические контактные задачи для предварительно напряженных тел. М.: Физматлит. 2002. 240 с.
7. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
8. *Бабешко В. А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука. 1984. 256 с.
9. *Ворович И. И., Бабешко В. А., Прягина О. Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир. 1999. 246 с.
10. *Бабешко В. А., Белянкова Т. И., Калинчук В. В.* Метод фиктивного поглощения в задачах теории упругости для неоднородного полупространства // ПММ. 2002. Т. 66. Вып. 2. С. 276–284.