УДК 539.3

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ МЕТОДЕ ФАКТОРИЗАЦИИ В СЛОЖНЫХ МАКРО-, МИКРО- И НАНОСТРУКТУРАХ[1]

Евдокимова О. В.[2]***, Бабешко В. А.***[3]***, Федоренко А. Г.***[4]***, Бабешко О. М.***[5]

ABOUT A DIFFERENTIAL METHOD OF FACTORIZATION IN COMPLEX MACRO-, MICRO- AND NANO-STRUCTURES

Evdokimova O. V., Babeshko V. A., Fedorenko A. G., Babeshko O. M.

The differential method of factorization is developed for an aggregate of different adjoining domains called block structures. Such structures are natural generalization for layered structures and they are the most widely spread ones in the environment. They can be regarded as separate parts of complex structures of natural or man-caused origin. They can have different scales — from nano- and micro-scales in materials science and electronics, to macro-scales used in construction when assessing seismic stability of structures, in geology, and seismology. When solving boundary-value problems with the application of differential factorization method for the above aggregates of domains, we have to face certain peculiarities, which differ from traditional approaches. For example, boundary conditions in the differential factorization method cannot be satisfied in the traditional form simply by introducing limiting values of solutions and their derivatives on the domain boundary into the given boundary conditions. In this work we show possible ways of overcoming the difficulties connected with the application of the differential method of factorization in block structures, an example is given.

Дифференциальный метод факторизации [1] развивается для совокупности различных областей, граничащих между собой, называемых блочными структурами. Такие структуры являются естественным обобщением слоистых структур и являются наиболее распространенными в окружающем мире. Их можно рассматривать как отдельные части сложных конструкций природного или техногенного происхождения. Они могут иметь разные масштабы — от нано и микромасштабов в материаловедении, электронике, до макромасштабов, с которыми приходится иметь дело в строительстве при оценке сейсмостойкости сооружений, в геологии, сейсмологии. Решение дифференциальным методом факторизации краевых задач для таких совокупностей областей имеет свою специфику, отличающуюся от традиционных подходов. Например, граничные условия в дифференциальном методе факторизации не могут удовлетворяться в традиционной форме путем внесения в заданные граничные условия предельных значений решений и их производных на границе области. Из [2] следует, что это невозможно, поскольку производные от построенного методом факторизации решения краевой задачи на границе имеют наряду с классическими, также и составляющие в виде обобщенных функций — δ-функций и их производных. Их происхождение детально разъяснено в указанной работе и они не являются помехой при решении краевых задач. В настоящей работе показано, каким образом преодолеваются эти сложности при применении дифферен-

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (06-01-00295, 06-01-08017, 06-08-00671), программа Юг России (06-01-96802 – 06-01-96805, 06-05-96806, 06-01-96634 – 06-01-96638), гранта Президента РФ (НШ-4839.2006.1), программ отделения ЭММПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН.

[2]Евдокимова Ольга Владимировна, канд. физ.-мат. наук, заведующая кафедрой художественного проектирования костюма Кубанского государственного университета.

[3]Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, директор НИИ проблем механики и геоэкологии, ректор Кубанского государственного университета.

[4]Федоренко Алексей Григорьевич, научный сотрудник Кубанского государственного университета.

[5]Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат.наук, гл. научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета.

циального метода факторизации в блочных структурах.

1. Ниже под блочными структурами понимаются материалы, занимающие ограниченные, полуограниченные или неограниченные области, называемые контактирующими блоками. Предполагается, что в блочной структуре каждый блок обладает своими специфическими свойствами поведения при воздействии физическими полями различной природы. Считается, что эти поля описываются краевыми задачами для систем связанных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Среды такого типа свойственны строению коры Земли [3], конструкционным материалам, находящимся в сложных физико-механических условиях [4], наноматериалам, кристаллическим структурам разнотипной компоновки, материалам электроники [5]. Аналогичное строение имеют и различные материалы, в том числе создаваемые на основе комбинации не только наноразмерных, но и макро- и наноразмерных составляющих [6]. В данной работе рассматривается случай структуры, блоки которой являются трехмерными. Отсутствие существенных ограничений на краевые задачи, описывающие свойства отдельных блоков, свидетельствует о том, что исследуемые блочные структуры могут иметь большое разнообразие свойств. В общем случае понятие блока включает в себя требование неизменности границы области задания краевой задачи, в том числе многосвязной, и требование ее кусочной гладкости.

Блок может быть как ограниченным, так и неограниченным и в нем могут протекать связанные процессы механики деформируемого твердого тела, гидромеханики, электромагнитные, диффузионные, тепловые, акустические и др. Введенные блочные структуры, являются более общими, чем кусочно-однородные структуры, предполагающие лишь скачкообразное изменение физических параметров среды при переходе от блока к блоку, с сохранением материала среды. Последнее выражается в скачкообразном изменении отдельных коэффициентов дифференциальных уравнений краевых задач, происходящем при переходе из блока в блок с сохранением типа краевой задачи. Естественно, введенные блочные структуры имеют более широкий спектр свойств, чем кусочно-однородные. Это вытекает как из разнообразия свойств блоков, их формы, характера взаимодействия между собой, так и взаимодействия физических полей блоков, которые излучаются или трансформируются, проходя через них. Частным случаем блочных структур являются слоистые структуры. Такие структуры с плоскими границами для линейных краевых задач можно считать в настоящее время достаточно полно исследоваными. Исследование блочных структур проводится, в основном, численными методами, для которых наличие неограниченных областей всегда создает трудности. Дифференциальный метод факторизации, являясь обобщением метода интегральных преобразований, позволяет уже на этапе решения краевой задачи отвечать на ряд вопросов относительно свойств физических полей в каждом блоке. Следует заметить, что интегральные преобразования в краевой задаче в области Ω для дифференциальных уравнений в частных производных оказываются удобным инструментом для исследований в тех случаях, когда дифференциальные уравнения, область Ω и функции, описывающие интегральное преобразование, согласованы. Под согласованностью понимается возможность трансформации дифференциальных уравнений в частных производных в обыкновенные в результате применения интегрального преобразования и задание граничных условий на границе, описываемой постоянными значениями геометрических параметров. Такое свойство имеет место, если функции интегральных преобразований являются собственными для дифференциального оператора в рассматриваемой области Ω. В терминах топологической алгебры это свойство будет иметь место в том случае, если группы преобразований, порождаемые автоморфизмом многообразия Ω, имеют представления, инвариантные относительно дифференцируемого отображения векторного поля, заданного на этом многообразии. Для ряда простых областей, которые будем называть классическими, это преобразования Фурье в областях с плоскими границами, преобразования Бесселя в областях с круговыми границами, преобразования Бесселя-Лежандра в областях со сферическими границами, применяемые, например, к уравнениям с постоянными коэффициентами Гельмгольца, Шредингера, Ламе, Навье–Стокса [7]. В [8] показано, что эти и другие интегральные преобразования являются следствием тех или иных отображений на себя многообразий, порождающих группы преобразований пространства,

их движений. Представления этих групп достигаются введением специальных функций, о которых говорилось выше. В тех случаях, когда области относятся к классическим, краевые задачи решаются сравнительно просто: сводятся к простым функциональным или обыкновенным дифференциальным уравнениям после интегрального преобразования, затем применяется интегральное обращение.

Если области сложные, то для анализа подобных краевых задач применим дифференциальный метод факторизации, который позволяет сводить краевые задачи к функциональным уравнениям с понижением размерностей последующих задач.

2. Сформулируем краевую задачу для блочной структуры. Будем считать, что область Ω блочной структуры состоит из областей Ω_b, $b = 1, 2, \ldots, B$ с границами $\partial\Omega_b$. Может оказаться, что часть границы блока является общей с границей другого блока, ее называем контактирующей. Остальная часть, не контактирующая, может быть свободной или подчиненной внешним воздействиям. Предполагается, что в каждой области Ω_b ставится краевая задача для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными в каждой области коэффициентами.

Краевую задачу для системы P дифференциальных уравнений в частных производных в блочной трехмерной области Ω, можно записать для каждого блока в виде

$$\mathbf{K}_b(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\varphi_b = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{p=1}^{P} A^b_{spmnk}\varphi^{(m)(n)(k)}_{bp,x_1x_2x_3} = 0,$$

$$s = 1, 2, \ldots, P_b, \quad A^b_{sqmnk} = \text{const},$$

$$\boldsymbol{\varphi}_b = \{\varphi_{b1}, \varphi_{b2}, \ldots, \varphi_{bP}\},$$

$$b = 1, 2, \ldots, B.$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2, x_3), \qquad (1)$$

$$\mathbf{x} \in \Omega_b.$$

На общей, контактирующей, границе $\partial\Omega_b \cap \partial\Omega_d$ задаются следующие граничные условия сопряжения:

$$\mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\varphi_b + \mathbf{R}_d(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\varphi_d = \sum_{m=1}^{M_1}\sum_{n=1}^{N_1}\sum_{k=1}^{K_1}\sum_{p=1}^{P}\Big[B^b_{spmnk}\varphi^{(m)(n)(k)}_{bp,x_1x_2x_3} + B^d_{spmnk}\varphi^{(m)(n)(k)}_{dp,x_1x_2x_3}\Big] = f_{bds}, \qquad (2)$$

$$s = 1, 2, \ldots, s_{b0} < P, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_b \cap \partial\Omega_d,$$

$$M_1 < M, \quad N_1 < N, \quad K_1 < K,$$

$$b, d = 1, 2, \ldots, B.$$

Краевая задача исследуется в пространствах медленно растущих обобщенных функций $\mathbf{H_s}(\Omega)$, описанных в [1].

Эти граничные условия в общем виде описывают случай контакта блоков, когда на общих границах принимается условие совпадения необходимых компонент физических полей, продиктованные соответствующими физическими законами. Например, в задачах термоэлектроупругости эти соотношения приведены в [9]. В частности, условия (2) могут быть намного проще — не иметь на границе внешних воздействий f_{bds} и представлять лишь требование равенства на общей границе решений и их производных. Но как указано выше, это обстоятельство не позволяет приравнивать производные от решений, записанных в интегральной форме, поскольку их составляющими в методе факторизации являются обобщенные функции [2].

Если речь идет о частях границ блоков, не являющихся общими ни с каким другим блоком, то на них принимаются граничные условия краевой задачи, рассмотренной в работы [1]. Изложим схему применения дифференциального метода факторизации к таким областям.

Следуя дифференциальному методу факторизации [1], сведем краевую задачу к системе функциональных уравнений, рассматривая каждую область Ω_b в отдельности. В результате приходим к системе функциональных уравнений вида

$$\mathbf{K}_b(\alpha)\boldsymbol{\Phi}_b = \iint\limits_{\partial\Omega_b} \boldsymbol{\omega}_b, \qquad (3)$$

$$\mathbf{K}_b(\alpha) \equiv -\mathbf{K}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2, -i\alpha_3) = \|k_{bnm}(\alpha)\|,$$

$$b = 1, 2, \ldots, B.$$

Вид и описание всех, участвующих в этой системе обозначений, заимствованы из [1], с добавлением индексов b. В частности, $\boldsymbol{\omega}_b$ — вектор внешних форм краевой задачи в области Ω_b.

Сопоставляя настоящий случай с рассмотренным в [1], заметим, что граничные условия (2) в общем случае содержат значения решений и их производных на границе, по крайней мере, из двух соседних областей.

Этим блочные структуры существенно отличаются от изучавшихся в [1].

3. В соответствии с правилами дифференциального метода факторизации дальнейшее исследование задачи предполагает факторизацию матрицы-функции $\mathbf{K}_b(\alpha_3^\nu)$, задаваемой формулой (3). Для этого выберем матрицу-функцию $\mathbf{K}_b^*(\alpha_3^\nu, m)$ порядка $P-1$, получающуюся вычеркиванием строки и столбца под номером m у сопряженной матрицы-функции $\mathbf{K}_b^*(\alpha_3^\nu)$, такую, что нули ξ_n^ν ее определителя $Q_b\left(\alpha_3^\nu\right) = \det \mathrm{K}_b\left(\alpha_3^\nu, m\right)$ не совпадают с нулями z_{s+}^ν, z_{s-}^ν [1].

Обозначим элементы обратной матрицы-функции в виде

$$[\ \mathbf{K}_b^*(\alpha_3^\nu, m)\ ]^{-1} = \left\| Q_b^{-1} Q_{psb} \right\|$$

Тогда элементы матрицы-функции $\mathrm{K}^{-1}\left(\alpha_3^\nu, -\right)$, имеющей вид

$$\mathbf{K}_b^{-1}\left(\alpha_{3,}^\nu -\right) = \\ = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ S_{m1} & S_{m2} & \dots & S_{mm} & \dots & S_{mN} \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

допускают интегральное представление в форме

$$S_{mp}(\alpha_3^\nu) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\mp} {\sum_{s=1}^{N}}' \frac{Q_{psb}(u_3) M_{sm}(u_3) du_3}{Q_b(u_3) K(u_3)(u_3 - \alpha_3^\nu)} - \\ - (\frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}) \frac{R_{mp}(\alpha_3^\nu)}{K(\alpha_3^\nu)}, \quad (5)$$

$$m \neq p,$$

$$\frac{R_{mp}(\alpha_3^\nu)}{K_b(\alpha_3^\nu)} = \frac{Z_{mp}(\alpha_3^\nu)}{Q_b(\alpha_3^\nu) K_b(\alpha_3^\nu)} + \\ + \sum_n \frac{Z_{mp}(\xi_n^\nu)}{Q_b'(\xi_n^\nu) K_b(\xi_n^\nu)(\xi_n^\nu - \alpha_3^\nu)},$$

$$S_{mm}(\alpha_3^\nu) = K_b^{-1}(\alpha_3^\nu), \quad \alpha_3^\nu \in \lambda_\mp,$$

$$Z_{mp}(\alpha_3^\nu) = {\sum_{s=1}^{N}}' Q_{psb}(\alpha_3^\nu) M_{sm}(\alpha_3^\nu).$$

Здесь замкнутый контур Γ_+ занимает положение, при котором область λ_+ содержит только нули z_{s+}^ν, z_{s-}^ν, а область λ_- — только нули ξ_n^ν. Замкнутый контур Γ_- охватывает область, содержащую все нули z_{s+}^ν, z_{s-}^ν, ξ_n^ν.

Из этого представления следует, что элементы матрицы-функции $\mathbf{K}_b^{-1}(\alpha_3^\nu, -)$ — рациональные функции, единственными особенностями которых являются нули z_{s+}^ν, z_{s-}^ν, причем содержащий их член $K_b^{-1}(\alpha_3^\nu)$ явно выделен.

Граничные условия в соответствии с алгоритмом применения дифференциального метода факторизации в случаях не контактирующих границ применяются в соответствии с правилами, оговоренными в [1].

Удовлетворение граничным условиям осуществляется по следующей схеме. Вначале граничные условия на неконтактирующей границе для каждого отдельного блока вносятся в соответствующие векторы внешних форм функциональных уравнений (3). При контакте блоков на общих границах соседних блоков выполняются условия сопряжения (2), которые могут, в зависимости от свойств описываемых полей, включать некоторые соотношения для решений и их производных. В простейшем случае это равенство на общей границе решений и их производных при переходе из одного блока в соседний. Эти соотношения должны быть внесены в соответствующие векторы внешних форм функциональных уравнений (3), предварительно разрешенных относительно неизвестных на границе производных по нормали. Последнее обеспечит выполнение контактных граничных условий (2) при решении псевдодифференциальных уравнений, что доказывается по схеме, изложенной в [2].

Опуская дальнейшие преобразования, изложенные в [1], получаем в случае блоков, занимающих выпуклые области, представление решения в каждом блоке в виде

$$\varphi_b(\mathbf{x}^\nu) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_{rb}^{-1}(\alpha_3^\nu) \mathbf{K}_b^{-1}(\alpha_3^\nu, -) \times \\ \times \iint_{\partial\Omega} \boldsymbol{\omega}_b e^{-i\langle \alpha_3^\nu x_3^\nu \rangle} d\alpha_1^\nu d\alpha_2^\nu d\alpha_3^\nu,$$

$$\mathbf{x}^\nu \in \Omega_b.$$

Решение можно сделать более наглядным, вычислив интеграл по параметру α_3^ν по теории

форм-вычетов Лере. В результате имеем

$$\varphi_b(\mathbf{x}^\nu) = \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\sum_s e^{-i(\alpha_1^\nu x_1^\nu+\alpha_2^\nu x_2^\nu)}\times$$
$$\times\left[\mathbf{K}_{rb}^{-1}\left(i\frac{\partial}{\partial x_3^\nu}\right)\mathbf{T}_{+b}(\alpha_1^\nu,\alpha_2^\nu,z_{s+}^\nu)e^{-iz_{s+}^\nu x_3^\nu}-\right.$$
$$\left.-\mathbf{K}_{rb}^{-1}\left(i\frac{\partial}{\partial x_3^\nu}\right)\mathbf{T}_{-b}\left(\alpha_1^\nu,\alpha_2^\nu,z_{s-}^\nu\right)e^{-iz_{s-}^\nu x_3^\nu}\right]\times$$
$$\times\, d\alpha_1^\nu d\alpha_2^\nu,$$

$$t_{m\pm b}\left(\alpha_1^\nu,\alpha_2^\nu,z_{s\pm}^\nu\right) = -\sum_{p=1}^{P}\iint\limits_{\partial\Omega_{\pm b}}\frac{\omega_{pb}Z_{mp}(z_{s\pm}^\nu)}{Q_b(z_{s\pm}^\nu)K_b'(z_{s\pm}^\nu)},$$

$$b = 1,2,\ldots,B,$$

$$\mathbf{T}_{\pm b} = \{0,0,\ldots,0,t_{m\pm b},0,\ldots,0\},$$

В этой формуле граница $\partial\Omega_b$ для выбранного $x_3^\nu < 0$, $\mathbf{x}^\nu \in \Omega$ разбита по следующему правилу:

$$\iint\limits_{\partial\Omega_b}\boldsymbol{\omega}_b = \iint\limits_{\partial\Omega_{+b}}\boldsymbol{\omega}_b + \iint\limits_{\partial\Omega_{-b}}\boldsymbol{\omega}_b,$$

$$\iint\limits_{\partial\Omega_{+b}}\boldsymbol{\omega}_b\exp(-i\alpha_3^\nu x_3^\nu)\to 0,\quad \operatorname{Im}\alpha_3^\nu\to\infty,$$

$$\iint\limits_{\partial\Omega_{-b}}\boldsymbol{\omega}_b\exp(-i\alpha_3^\nu x_3^\nu)\to 0,\quad \operatorname{Im}\alpha_3^\nu\to-\infty.$$

В случае, если блок вырождается в полупространство или слоистую среду, псевдодифференциальные уравнения, появляющиеся в процессе решения краевой задачи, вырождаются в алгебраические, после обращения которых решение строится в конечном виде [1].

В том случае, если рассматриваемый блок не является выпуклым телом, для исследования краевой задачи применяется метод обобщенной факторизации [10].

Замечание. Вопрос «сшивания» решений, получаемых в каждом блоке, в методе факторизации осуществляется автоматически при удовлетворении граничных условий. При наличии трещин, разломов или включений меньших размерностей, последние надо рассматривать как границы блоков. В результате получается однотипный алгоритм исследования блочных структур с указанными неоднородностями.

В том случае, когда блоки вырождаются в слои с плоско-параллельными границами, изложенный алгоритм исследования блочных структур приводит к решениям, полностью совпадающим с получаемыми традиционными методами интегральных преобразований по координатам, лежащим в граничной плоскости [11].

Пример. В качестве примера рассмотрим случай краевой задачи для двухслойной среды, когда в каждом слое задается свое уравнение Гельмгольца. Расположив координатную систему таким образом, чтобы плоскость yoz была бы параллельна плоскостям слоя, а ось ox-перпендикулярна, двойным преобразованием Фурье по y, z эту задачу легко свести к обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка вида

$$\varphi_1'' - \kappa_1^2\varphi_1 = 0,\quad a\leqslant x\leqslant b$$
$$\varphi_2'' - \kappa_2^2\varphi_2 = 0,\quad b\leqslant x\leqslant c.$$

Здесь $b-a$ — толщина первого слоя, $c-b$ — толщина второго слоя, k_1, k_2 — постоянные коэффициенты, вид которых не существенен.

Граничные условия принимаем в следующем виде:

$$\varphi_1(a) = f_1,\quad \varphi_2'(c) = f_2.$$

На границе контакта слоев $x = b$ задаются условия равенства функций и производных

$$\varphi_1(b) = \varphi_2(b),\quad \varphi_1'(b) = \varphi_2'(b).$$

Применяя дифференциальный метод факторизации, используя приемы, изложенные в [12], приходим к следующей системе алгебраических уравнений

$$\varphi_2'(b) - \varphi_1'(a)e^{-k_1(b-a)} - $$
$$- k_1\varphi_2(b) + k_1 f_1 e^{-k_1(b-a)} = 0,$$

$$\varphi_2'(b)e^{-k_1(b-a)} - \varphi_1'(a) +$$
$$+ k_1\varphi_2(b)e^{-k_1(b-a)} - k_1 f_1 = 0,$$

$$f_2 - \varphi_2'(b)e^{-k_2(c-b)} - k_2\varphi_2(c) +$$
$$+ k_2\varphi_2(b)e^{-k_2(c-b)} = 0$$

$$f_2 e^{-k_2(c-b)} - \varphi_2'(b) +$$
$$+ k_2\varphi_2(c)e^{-k_2(c-b)} - k_2\varphi_2(b) = 0.$$

Решая эту систему относительно неизвестных

$$\varphi_2(c) = x_1,\quad \varphi_1'(a) = x_2,$$

$$\varphi_2(b) = x_3, \quad \varphi_2'(b) = x_4,$$

получаем после внесения их во внешние формы и вычисления интеграла, решения краевой задачи в виде

$$\varphi_1 = A_1 e^{\kappa_1 x} + A_2 e^{-\kappa_1 x},$$

$$\varphi_2 = A_3 e^{\kappa_2 x} + A_4 e^{-\kappa_2 x},$$

$$\Delta A_1 = -2k_1k_2e^{-k_1b}f_1\Big[(k_1+k_2)e^{-k_2(c-b)}+ + (k_1-k_2)e^{+k_2(c-b)}\Big] - f_2e^{-k_1a}4k_1k_2,$$

$$\Delta A_2 = -2k_1k_2e^{k_1b}f_1\Big[(k_1+k_2)e^{k_2(c-b)}+ + (k_1-k_2)e^{-k_2(c-b)}\Big] + f_2e^{k_1a}4k_1k_2,$$

$$\Delta A_3 = -4k_1^2k_2e^{-k_2c}f_1 - 2k_1e^{-k_2b}f_2\times \times \Big[(k_1-k_2)e^{-k_1(b-a)} + (k_1+k_2)e^{k_1(b-a)}\Big],$$

$$\Delta A_4 = -4k_1^2k_2e^{k_2c}f_1 + 2k_1e^{k_2b}f_2\times \times \Big[(k_1+k_2)e^{-k_1(b-a)} + (k_1-k_2)e^{k_1(b-a)}\Big].$$

Здесь

$$\Delta = -4\kappa_1\kappa_2\big\{(\kappa_1-\kappa_2)\times \times \operatorname{ch}[\kappa_2(c-b)-\kappa_1(b-a)] + (\kappa_1+\kappa_2)\times \times \operatorname{ch}[\kappa_2(c-b)+\kappa_1(b-a)]\big\}.$$

Найденные функции φ_1, φ_2 являются точным решением краевой задачи.

Литература

1. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* Об интегральном и дифференциальном методах факторизации // ДАН. 2006. Т. 410. № 2. С. 168–172.
2. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* Выполнение граничных условий в дифференциальном методе факторизации. ДАН. Т. 412. № 5. 2007. С. 600–603.
3. *Садовский М. А., Болховитинов Л. Г., Писаренко В. Ф.* Деформирование геофизической среды и сейсмический процесс. М.: Наука, 1987. 104 с.
4. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. М., Мир, 1986. С. 160.
5. *Нефедов Е. И., Саидов А. С., Тагилаев А. Р.* Широкополосные микрополосковые управляющие устройства СВЧ. Москва, Радио и связь, 1994. С. 168.
6. *Гуткин М. Ю., Овидько И. А.* Физическая механика деформируемых наноструктур. С-П: Янус, 2003. Т. 1. С. 192; Т. 2. С. 352.
7. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. С. 724
8. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представления групп. М.: Наука, 1991. 576 с.
9. *Ворович И. И., Бабешко В. А., Пряхина О. Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 248 с.
10. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Обобщенная факторизация в краевых задачах в многосвязных областях // ДАН. 2003. Т. 392. № 2. С. 185–189.
11. *Бреховских Л. М., Годин О. А.* Акустика слоистых сред. М.: Наука, 1989. 412 с.
12. *Евдокимова О. В.* Дифференциальный метод факторизации в механике разрушения, материаловедении и сейсмологии // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. № 4. С. 32–42.

Статья поступила 16 января 2007 г.
Кубанский государственный университет
© Евдокимова О. В., Бабешко В. А., Федоренко А. Г., Бабешко О. М., 2007