

М Е Х А Н И К А

УДК 539.3

О СМЕШАННЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ СО МНОЖЕСТВЕННЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ¹*Зарецкая М. В.², Москвичев С. В.³, Павлова А. В.⁴, Плужник А. В.⁵, Ратнер С. В.⁶, Сыромятников П. В.⁷*

ABOUT MIXED PROBLEMS FOR MULTILAYERED ANISOTROPIC MATERIALS WITH NUMEROUS INHOMOGENEITIES

Zaretskaya M. V., Moskvichev S. V., Pavlova A. V., Pluzhnik A. V., Ratner S. V., Syromyatnikov P. V.

Integral equations of dynamic elasticity theory are obtained for a multilayered convex solid with arbitrary elastic anisotropy of layers containing plane line cracks. Systems of integral equations relate jumps of displacements and stresses on crack edges. For the case of plane-parallel layers with an aggregate of cracks on interfaces, a numerical-analytical method of constructing the Fourier symbol of the kernel matrix of a system of integral equations is offered. The method can be applied for an arbitrary combination of continuous and discontinuous conditions on interfaces. The numerical techniques of approximate estimation of the amplitudes of displacements generated by the aggregate of cracks are demonstrated for the case of three anisotropic layers with different elastic properties attached to the rigid base.

Наличие совокупностей неоднородностей в значительной степени усложняет как описание прочностных свойств материала их содержащего, так и возможность дефектоскопии таких неоднородностей. Если в случае одной трещины критерий разрушения диктуется концентрацией напряжения в ее вершине, то в случае совокупности критерий разрушения материала может зависеть уже от взаимодействия трещин.

В экспериментальном отношении единственный дефект, как правило, поддается локализации. В случае совокупности неоднородностей задача усложняется в связи со способностью со-

вокупности неоднородностей сильно рассеивать падающий ультразвуковой луч. И лишь очень тонкое амплитудно-частотное исследование позволяет выявить такие скрытые дефекты, которые в работе [1] были названы «вирусами вибропрочности». Расчет влияния таких объектов на прочностные свойства материалов намного сложнее, чем в случае одной трещины. Введение анизотропии существенно усложняет имеющиеся проблемы.

Исследованиям поведения анизотропной среды с одиночной неоднородностью посвящено большое количество работ, однако задачи о динамическом поведении анизотропных

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (п. 06-01-96802, 06-01-96803, 06-01-96804, 06-01-96805, 06-05-96806, 05-01-00902), гранта Президента РФ (НШ-4839.2006.1), программ отделения ЭММПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН.

²Зарецкая Марина Валерьевна, канд. физ.-мат. наук, ст. научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета.

³Москвичев Сергей Викторович, научный сотрудник лаборатории прикладной математики и механики ЮНЦ РАН.

⁴Павлова Алла Владимировна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета.

⁵Плужник Андрей Валерьевич, младший научный сотрудник лаборатории прикладной математики и механики ЮНЦ РАН.

⁶Ратнер Светлана Валерьевна, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник отдела проблем математики и механики ЮНЦ РАН.

⁷Сыромятников Павел Викторович, канд. физ.-мат. наук, зав. лаборатории прикладной математики и механики ЮНЦ РАН.

тел со множественными неоднородностями в трехмерной постановке практически не исследовались. Это связано, по всей видимости, и со сложностью соответствующих краевых задач, и с тем, что традиционно применяемые в таких случаях полуаналитические и численные методы зачастую оказываются неэффективными.

Для «вирусов вибропрочности» [1, 2] — множественных неоднородностей специального вида — в работе [3] был предложен существенно модифицированный для этих целей метод факторизации, применимый к краевым задачам для сред различной физической природы, не только деформируемых, в произвольных областях с кусочно-гладкими границами [4].

В данной работе развивается более частный, чем метод факторизации, но и более простой подход, основанный на обобщении теоремы Бетти на случай анизотропных сред [5], предложенный первоначально в [1, 2] для сред изотропных.

Рассмотрим выпуклое упругое анизотропное тело, разделенное на N параллельных сечений. В теле слои ограничены и, если исходное тело не является слоем, верхняя граница самого верхнего слоя и нижняя граница самого нижнего слоя не будут уже являться плоскостями. В случае неограниченного тела появляются два разделенных полуограниченных тела типа полупространств.

Расположим плоскость $x_1 O x_2$ параллельно плоскостям неоднородностей и рассмотрим задачу, когда в сечении $x_3 = h_n$ внутри упругого ограниченного тела имеются неоднородности с носителями S_n , $n = 1, 2, \dots, N$, объединение которых может представлять собой совокупность многосвязных или односвязных областей. В соответствии с принятыми в [1] обозначениями, такая совокупность неоднородностей называется N -уровневым «вирусом» вибропрочности класса 2 вида S и обозначается $V(S_n)$, $n < N$. Неоднородности — трещины или включения — описываются теорией Гриффитса [6].

Для вывода интегральных уравнений применим метод, развитый в [1, 7]. Обозначим через h_{N+1} и h_0 соответственно вертикальную координату самой верхней и самой нижней точек тела. Пусть S_0 — полная поверхность тела, представляющая собой объединение внешних областей, занятых неоднородностями; $u_{ns}^\pm$, $\tau_{ns}^\pm$ — перемещения и напряжения, действующие в сечениях $x_3 = h_n$ при $x_3 \rightarrow h_n \pm 0$; u_{ns} — перемещения на поверхности тела, причем на

куполе тела — для самого верхнего слоя, на донной части тела — для нижнего, для промежуточных слоев — на их боковых поверхностях и в сечениях; $\mathbf{l} = (l_1, l_2, l_3)$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S рассматриваемого тела с сечениями $x_3 = h_n$

$$\tau_{ns} = \begin{cases} \tau_{ns}^+, x_3 = h_n + 0, \\ \tau_{ns}^-, x_3 = h_n - 0, \end{cases}$$

$$u_{ns} = \begin{cases} u_{ns}^+, x_3 = h_n + 0, \\ u_{ns}^-, x_3 = h_n - 0. \end{cases}$$

При сделанных предположениях краевая задача приводит к системе интегральных уравнений (СИУ) следующего вида:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{N+1} \sum_{m=1}^3 \iint_{S_n} L_{km}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \kappa, \mathbf{l}) \times \\ & \quad \times u_{nm}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \times \\ & \quad \times \exp(i(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3)) dS = \\ & = \sum_{n=0}^{N+1} \sum_{m=1}^3 \iint_{S_n} D_{km}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \kappa) \times \\ & \quad \times \tau_{nm}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \times \\ & \quad \times \exp(i(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \alpha_3 \xi_3)) dS, \quad (1) \end{aligned}$$

$$|\alpha_1| \leq \infty, \quad |\alpha_2| \leq \infty, \quad \alpha_3 = \sigma_k^\pm(\alpha_1, \alpha_2, \kappa),$$

$$k = \overline{1, 3}.$$

Опишем входящие в уравнение (1) величины. Рассмотрим матрицу $\mathbf{Y}$ с элементами

$$Y_{nm} = - \sum_{j=1}^3 \sum_{p=1}^3 C_{mjnp} \alpha_j \alpha_p + \delta_{nm} \kappa^2, \quad (2)$$

$$\kappa^2 = \rho \omega^2, \quad n, m = \overline{1, 3},$$

где C_{mjnp} — элементы тензора коэффициентов упругости тела; ω — круговая частота; ρ — плотность; κ — приведенная частота; δ_{nm} — символ Кронекера; α_j — параметры преобразования Фурье.

Элементы матрицы $\mathbf{Y}$ запишем в виде квадратичных многочленов от α_3 , коэффициенты $b_{nm}^{(j)}$ которых зависят от $\alpha_1, \alpha_2, \kappa$

$$Y_{nm} = b_{nm}^{(2)} \alpha_3^2 + b_{nm}^{(1)} \alpha_3 + b_{nm}^{(0)}, \quad (3)$$

где

$$b_{nm}^{(2)} = -C_{m3n3},$$

$$b_{nm}^{(1)} = b_{nm}^{(1)}(\alpha_1, \alpha_2) = \\ = -(C_{m1n3} + C_{m3n1})\alpha_1 - \\ - (C_{m2n3} + C_{m3n2})\alpha_2,$$

$$b_{nm}^{(0)} = b_{nm}^{(0)}(\alpha_1, \alpha_2, \kappa) = \\ = -C_{m1n1}\alpha_1^2 - (C_{m1n2} + C_{m2n1})\alpha_1\alpha_2 - \\ - C_{m2n2}\alpha_2^2 + \delta_{mn}\kappa^2.$$

Обозначим определитель матрицы $\mathbf{Y}$ через V

$$V = \det \mathbf{Y} = Y_{11}Y_{22}Y_{33} + \\ + Y_{31}Y_{12}Y_{21} + Y_{13}Y_{21}Y_{12} - Y_{13}Y_{22}Y_{31} - \\ - Y_{11}Y_{21}Y_{32} - Y_{33}Y_{12}Y_{21}. \quad (4)$$

Как видно из (3), (4), V является многочленом шестой степени относительно α_3

$$V = \sum_{r=0}^6 P_r \alpha_3^r. \quad (5)$$

Используя формулы (3), (4), коэффициенты P_r многочлена (5) можно получить явно.

Корни многочлена (5) σ_n разобьем на две равные группы и обозначим как $\sigma_n^\pm$, $n = 1, 2, 3$. Здесь σ_n^+ соответствуют $l_3 > 0$ и выбираются согласно условиям убывания или излучения при $x_3 \rightarrow +\infty$ [7], в свою очередь, σ_n^- соответствуют $l_3 < 0$ и выбираются согласно условиям убывания или излучения при $x_3 \rightarrow -\infty$ (предполагается, что l_3 может обращаться в ноль лишь на бесконечности).

В матрицы $\mathbf{L}$, $\mathbf{D}$ (1) величины $\sigma_n^\pm$ входят в составе экспонент $\exp(i\sigma_n^\pm x_3)$. Корни σ_n^+ с положительной мнимой частью удовлетворяют условию убывания при $x_3 \rightarrow +\infty$, а σ_n^- с отрицательной мнимой частью — соответственно при $x_3 \rightarrow -\infty$. Кратко условия убывания при $x_3 \rightarrow \pm\infty$, когда $\text{Im } \sigma_n^\pm \neq 0$, можно сформулировать следующим образом

$$\text{Im } \sigma_n^+ > 0 \leftrightarrow x_3 \rightarrow +\infty,$$

$$\text{Im } \sigma_n^- < 0 \leftrightarrow x_3 \rightarrow -\infty.$$

Для классификации чисто действительных $\sigma_m^\pm$ можно дополнительно использовать принцип предельного поглощения [7]: введение комплексной частоты $\omega_\varepsilon = \omega^2 + i\varepsilon\omega/\rho$, ($\varepsilon > 0$), соответствующей малому внутреннему трению, придает возмущенным $\sigma_m(\varepsilon)$ ненулевую мнимую часть для любых α_1, α_2 , ($\omega \neq 0$). При этом в любом наборе $\sigma_m(\varepsilon)$ число величин с положительной мнимой частью равно числу $\sigma_m(\varepsilon)$

с отрицательной мнимой частью. В окончательное разбиение попадают $\sigma_m^\pm$, являющиеся соответствующими пределами $\sigma_m(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Разбиение самих $\sigma_m(\varepsilon)$ не представляет труда, так как $\text{Im } \sigma_m(\varepsilon) \neq 0$. Таким образом, согласно принципу предельного поглощения и условиям убывания $\sigma_m^\pm$ отбираются по следующему правилу:

$$\sigma_m^- = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\sigma_m(\varepsilon)), \quad \text{Im } \sigma_m(\varepsilon) < 0,$$

$$\sigma_m^+ = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\sigma_m(\varepsilon)), \quad \text{Im } \sigma_m(\varepsilon) > 0.$$

В частности, в изотропном случае $\sigma_n^\pm = \pm\sigma_n$. Для анизотропных материалов более подробно способы выбора $\sigma_n^\pm$ описаны в [8].

Выпишем в явном виде матрицу $\mathbf{c}^0$, являющуюся присоединенной к матрице $\mathbf{c} = \mathbf{Y}^{-1}$

$$\mathbf{c}^0 = V\mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$c_{11} = Y_{22}Y_{33} - Y_{23}Y_{32}, \quad c_{12} = Y_{13}Y_{32} - Y_{12}Y_{33},$$

$$c_{13} = Y_{12}Y_{23} - Y_{13}Y_{22},$$

$$c_{21} = Y_{23}Y_{31} - Y_{21}Y_{33}, \quad c_{22} = Y_{11}Y_{33} - Y_{13}Y_{31},$$

$$c_{23} = Y_{13}Y_{21} - Y_{11}Y_{23},$$

$$c_{31} = Y_{21}Y_{32} - Y_{22}Y_{31}, \quad c_{32} = Y_{12}Y_{31} - Y_{11}Y_{32},$$

$$c_{33} = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}.$$

Матрицы $\mathbf{L}$, $\mathbf{D}$ формируются следующим образом. Если $\sigma_n^\pm$ является простым корнем (5), то, выбрав любую ненулевую строку p матрицы $c_{pm}^0 = f_m$ можно положить

$$L_{ni}^\pm L_{ni}^\pm = \sum_{m=1}^3 f_m(\alpha_1, \alpha_2, \sigma_n^\pm, \kappa) \times \\ \times t_{mi}(\alpha_1, \alpha_2, \sigma_n^\pm, \kappa, 1),$$

$$D_{nm} = D_{nm}^\pm = f_m(\alpha_1, \alpha_2, \sigma_n^\pm, \kappa), \quad i, m = \overline{1, 3},$$

где

$$t_{km} = i \sum_{n=1}^3 \sum_{j=1}^3 C_{njk} \alpha_m l_j, \quad m, k = \overline{1, 3}.$$

Если $\sigma_n^\pm$ является двукратным корнем (5), то, выбрав две линейно независимые строки p, r матрицы $\mathbf{c}^0$ и положив $f_m^{(1)} = c_{pm}^0$, $f_m^{(2)} = c_{rm}^0$, можно записать

$$L_{ji} = L_{ji}^\pm = \sum_{m=1}^3 f_m^{(j)} t_{mi}, \quad D_{jm} = D_{jm}^\pm = f_m^{(j)}, \\ j = 1, 2, \quad i, m = \overline{1, 3}.$$

В случае изотропных материалов предпочтительнее использовать явные выражения матриц $\mathbf{L}$, $\mathbf{D}$ [1, 2].

В формулах (1) в случае, если боковые стороны каждого ограниченного слоя уходят на бесконечность, получается неограниченный слой, содержащий плоские неоднородности, параллельные границам слоя. При этом верхняя и нижняя границы слоя — рельефные. Уравнения (1) значительно упрощаются, когда верхние и нижние границы — плоские, так как $l_1 = l_2 = 0$, $l_3 = \pm 1$. Обозначим через U_{nm} , T_{nk} двумерное преобразование Фурье функций u_{nm} , τ_{nk} и положим

$$U_{nm}(\alpha_1, \alpha_2) \exp(i\alpha_3 h_n) = \iint_{S_n} u_{nm}(\xi_1, \xi_2, h_n) \exp(i(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2)) d\xi_1 d\xi_2,$$

$$T_{nk}(\alpha_1, \alpha_2) \exp(i\alpha_3 h_n) = \iint_{S_n} \tau_{nk}(\xi_1, \xi_2, h_n) \exp(i(\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2)) d\xi_1 d\xi_2.$$

После преобразований и упрощений получим матричные уравнения

$$\mathbf{L}_n^\pm \mathbf{U}_n^\pm - \mathbf{L}_{n+1}^\pm \mathbf{U}_{n+1}^\pm = \mathbf{D}_n^\pm \mathbf{T}_n^\pm - \mathbf{D}_{n+1}^\pm \mathbf{T}_{n+1}^\pm. \quad (7)$$

Здесь

$$\mathbf{L}_n^\pm = \mathbf{E}^{(n)\pm} \mathbf{L}^\pm, \quad \mathbf{D}_n^\pm = \mathbf{E}^{(n)\pm} \mathbf{D}^\pm,$$

$$E_{km}^{(n)\pm} = \delta_{km} \exp(i\sigma_k^\pm h_n), \quad k, m = \overline{1, 3}.$$

Соотношения (7) позволяют получить СИУ для слоя с плоскими неоднородностями. Для построения СИУ в случае полупространства $x_3 \geq h_0$ необходимо в выражениях (7) формулы, соответствующие $n = 0$, заменить одним уравнением $\mathbf{L}_0^- \mathbf{U}_0^- = \mathbf{D}_0^- \mathbf{T}_0^-$. В случае пространства $-\infty \leq x_3 \leq +\infty$ дополнительно к этому группе формул, соответствующих $n = N + 1$, также необходимо заменить уравнением $\mathbf{L}_{N+1}^+ \mathbf{U}_{N+1}^+ = \mathbf{D}_{N+1}^+ \mathbf{T}_{N+1}^+$. Ниже будем считать, что рассматривается упругий слой с N неоднородностями. Примем во внимание, что в случае трещин необходимо положить $\mathbf{T}_n^+ = \mathbf{T}_n^- = \mathbf{T}_n$.

Решение линейной системы уравнений (7) относительно ее правой или левой части можно получить, обращая однотипные блоки матриц, имеющие размерность шесть. Обозначим через $\mathbf{F}^{(m,k)\pm}$, $\mathbf{G}^{(n)}$ следующие матрицы:

$$F_{pr}^{(m,k)\pm} = \delta_{pr} \exp(i\sigma_p^\pm (h_k - h_m)), \quad (8)$$

$$p, r = \overline{1, 3},$$

$$\mathbf{G}^{(n)} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}^- & -\mathbf{F}^{(n,n+1)-} \mathbf{L}^- \\ \mathbf{L}^+ & -\mathbf{F}^{(n,n+1)+} \mathbf{L}^+ \end{pmatrix}^{-1} \times \\ \times \begin{pmatrix} \mathbf{D}^- & -\mathbf{F}^{(n,n+1)-} \mathbf{D}^- \\ \mathbf{D}^+ & -\mathbf{F}^{(n,n+1)+} \mathbf{D}^+ \end{pmatrix},$$

$$n = \overline{0, N-1},$$

$$\mathbf{G}^{(N)} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}^- & \mathbf{F}^{(N,N+1)-} \mathbf{L}^- \\ \mathbf{D}^+ & \mathbf{F}^{(N,N+1)+} \mathbf{L}^+ \end{pmatrix}^{-1} \times \\ \times \begin{pmatrix} \mathbf{L}^- & \mathbf{F}^{(N,N+1)-} \mathbf{D}^- \\ \mathbf{L}^+ & \mathbf{F}^{(N,N+1)+} \mathbf{D}^+ \end{pmatrix}.$$

Соотношения (7) упрощаются, если ввести новые неизвестные $\mathbf{U}^{(n)} = \mathbf{U}_n^+ - \mathbf{U}_n^-$, $n = 1, 2, \dots, N$, имеющие смысл символов скачков перемещений. Относительно векторов

$$\mathbf{U} = \{ \mathbf{U}^{(0)}, \mathbf{U}^{(1)}, \dots, \mathbf{U}^{(N)}, \mathbf{U}^{(N+1)} \},$$

где

$$\mathbf{U}^{(0)} = \mathbf{U}_0^+, \mathbf{U}^{(N+1)} = \mathbf{T}_{N+1}$$

$$\text{и } \mathbf{T} = \{ \mathbf{T}^{(0)}, \mathbf{T}^{(1)}, \dots, \mathbf{T}^{(N)}, \mathbf{T}^{(N+1)} \},$$

где

$$\mathbf{T}^{(n)} = \mathbf{T}_n, \mathbf{T}^{(N+1)} = \mathbf{U}_{N+1}^-,$$

$$n = \overline{0, N},$$

выпишем преобразованные уравнения

$$\mathbf{U}^{(0)} = \mathbf{G}_{11}^{(0)} \mathbf{T}^{(0)} + \mathbf{G}_{12}^{(0)} \mathbf{T}^{(1)},$$

$$\mathbf{U}^{(N+1)} = \mathbf{G}_{21}^{(N)} \mathbf{T}_N \mathbf{T}^{(N)} + \mathbf{G}_{22}^{(N)} \mathbf{T}^{(N+1)}, \quad (9)$$

$$\mathbf{U}^{(n)} = -\mathbf{G}_{21}^{(n-1)} \mathbf{T}^{(n-1)} + \\ + (\mathbf{G}_{11}^{(n)} - \mathbf{G}_{22}^{(n-1)}) \mathbf{T}^{(n)} + \mathbf{G}_{12}^{(n)} \mathbf{T}^{(n+1)},$$

$$n = \overline{1, N}.$$

Здесь матрицы $\mathbf{G}_{ij}^{(n)}$ являются блоками матрицы $\mathbf{G}^{(n)}$ (8)

$$\mathbf{G}^{(n)} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{11}^{(n)} & \mathbf{G}_{12}^{(n)} \\ \mathbf{G}_{21}^{(n)} & \mathbf{G}_{22}^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Уравнения (9) запишем в матричном виде

$$\mathbf{U}^{(n)} = \sum_{j=0}^{N+1} \mathbf{K}^{(n,j)} \mathbf{T}^{(j)}.$$

Матрицы $\mathbf{K}^{(i,j)}$ — соответствующие блоки матрицы $\mathbf{K} = \|\mathbf{K}^{(i,j)}\|$, $i, j = \overline{0, N+1}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(0,0)} &= \mathbf{G}_{11}^{(0)}, \quad \mathbf{K}^{(0,1)} = \mathbf{G}_{12}^{(0)}, \\ \mathbf{K}^{(N+1,N)} &= \mathbf{G}_{21}^{(N)}, \\ \mathbf{K}^{(N+1,N+1)} &= \mathbf{G}_{22}^{(N)}, \\ \mathbf{K}^{(n,n-1)} &= -\mathbf{G}_{21}^{(n-1)}, \\ \mathbf{K}^{(n,n)} &= \mathbf{G}_{11}^{(n)} - \mathbf{G}_{22}^{(n-1)}, \\ \mathbf{K}^{(n,n+1)} &= \mathbf{G}_{12}^{(n)}, \quad n = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (10)$$

Представление матрицы $\mathbf{K}$ легко обобщить на случай, когда свойства слоев различны: достаточно вычислять матрицы $\mathbf{G}^{(n)}$ (8) для каждого слоя со своими материальными константами $\mathbf{G}^{(n)} = \mathbf{G}^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, \omega, C_{ijk}^{(n)}, \rho^{(n)}, h_{n+1} - h_n)$.

С учетом приведенных выше обозначений получаем СИУ вида

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N+1} \sum_{s=1}^3 \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K_{ms}^{(p,n)} Q_s^{(n)} \times \\ \times \exp(-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) d\alpha_1 d\alpha_2 = \\ = z_m^{(p)}(x_1, x_2), \quad (11) \end{aligned}$$

$$x_1, x_2 \in S_p, \quad m = 1, 2, 3, \quad p = \overline{0, N+1}.$$

Контуры интегрирования Γ_1, Γ_2 выбираются в соответствии с принципом излучения на бесконечности [7]; $Q_s^{(n)}$ — образы Фурье функций $q_s^{(n)} = \tau_{ns}$; $z_m^{(p)} = u_{pm}^+ - u_{pm}^-$, $p = 1, 2, \dots, N$ — заданные амплитуды скачков перемещений, действующих на границах неоднородностей с частотой ω ; $z_m^{(0)} = u_{0m}^+$, $z_m^{(N+1)} = u_{(N+1)m}^+$ — заданные амплитуды перемещений на нижней и верхней границе слоя соответственно, также действующих с частотой ω .

Рассмотрим частный случай слоя на жестком основании, когда $\mathbf{U}^{(0)} \equiv 0$. Размерность системы (9) при этом можно понизить, поскольку вектор $\mathbf{U}^{(0)}$ известен, а $\mathbf{T}^{(0)} = -(\mathbf{G}_{11}^{(0)})^{-1} \mathbf{G}_{12}^{(0)} \mathbf{T}^{(1)}$.

Матрица системы $\mathbf{K}$ при этом преобразуется в новую матрицу $\bar{\mathbf{K}}$ следующим образом

$$\bar{\mathbf{K}}^{(i,j)} = \mathbf{K}^{(i,j)}, \quad i, j = \overline{1, N+1},$$

за исключением $\bar{\mathbf{K}}^{(1,1)}$

$$\bar{\mathbf{K}}^{(1,1)} = \mathbf{K}^{(1,1)} + \mathbf{G}_{21}^{(0)} (\mathbf{G}_{11}^{(0)})^{-1} \mathbf{G}_{12}^{(0)}.$$

Запишем соотношение между векторами $\bar{\mathbf{U}} = \{\mathbf{U}^{(1)}, \dots, \mathbf{U}^{(N+1)}\}$ и $\bar{\mathbf{T}} = \{\mathbf{T}^{(1)}, \dots, \mathbf{T}^{(N+1)}\}$

$$\bar{\mathbf{T}} = \mathbf{K}_0 \bar{\mathbf{U}},$$

где $\mathbf{K}_0 = \bar{\mathbf{K}}^{-1}$. Применяя обратное преобразование Фурье к предпоследнему равенству, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{(p)}(x_1, x_2) = \\ = \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{K}_0^{(p,j)}(\alpha_1, \alpha_2) \mathbf{U}^{(j)}(\alpha_1, \alpha_2) \times \\ \times \exp(-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) d\alpha_1 d\alpha_2, \quad (12) \end{aligned}$$

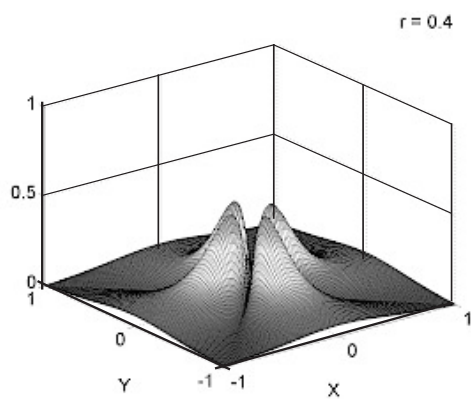
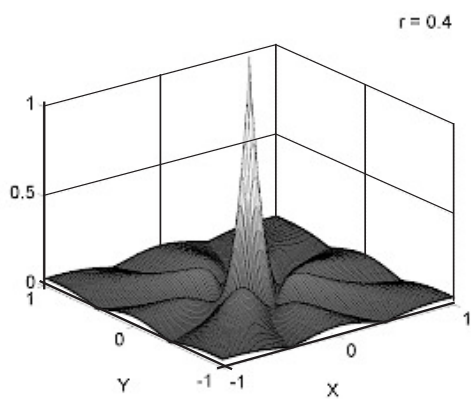
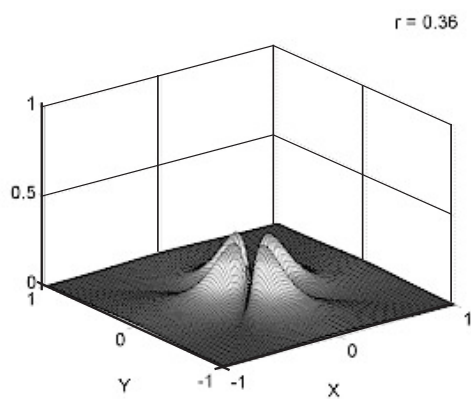
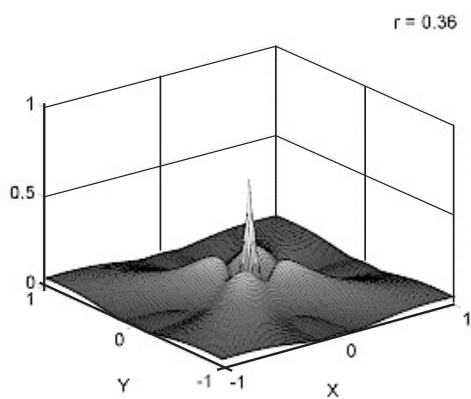
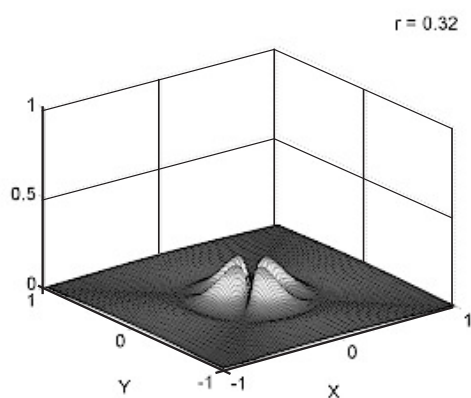
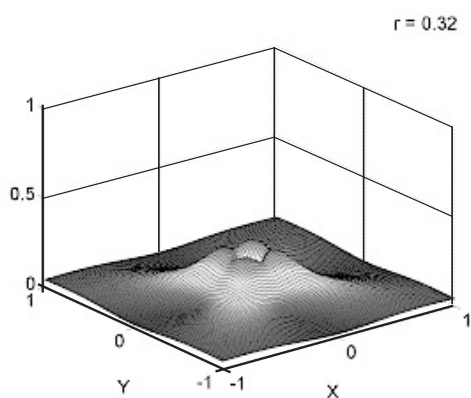
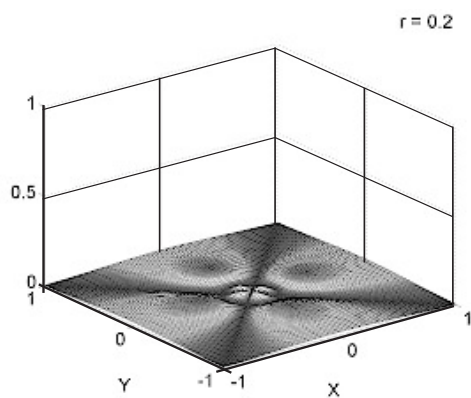
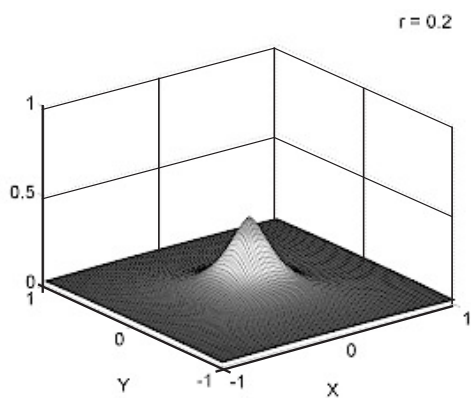
$$p = \overline{1, N+1}.$$

В приложении к задачам идентификации внутренних неоднородностей в качестве первого приближения физически наблюдаемых на поверхности слоя явлений можно рассматривать решение прямой задачи, когда характеристики неоднородностей $\mathbf{U}^{(j)}$ в уравнении (12) заданы.

В проведенных модельных расчетах были сделаны приближенные численные оценки интеграла (12) с помощью подхода [9], использующего лемму Жордана и интегрирование вычетов матрицы $\mathbf{K}_0$. Рассматривался пакет из трех различных анизотропных слоев на жестком основании с совокупностью из четырех трещин, расположенных между первым и вторым слоем.

Слой 1 (нумерация сверху-вниз) имеет упругие свойства танталата лития (LiTaO_3 , тригональная сингония, класс 3m): упругие модули $C_{11} = 2,33$, $C_{12} = 0,47$, $C_{13} = 0,8$, $C_{14} = -0,11$, $C_{33} = 2,75$, $C_{44} = 0,94$ (10^{11} Н/м²); плотность кристалла $\rho = 0,73$ (10^4 кг/м³). Слой 2 имеет свойства окиси цинка (ZnO , гексагональная сингония, класс 6mm): $C_{11} = 2,097$, $C_{12} = 1,211$, $C_{13} = 1,051$, $C_{33} = 2,109$, $C_{44} = 0,4245$, $\rho = 0,5642$ [10]. Слой 3 имеет свойства ниобата лития (LiNbO_3 , тригональная сингония, класс 3m): $C_{11} = 2,03$, $C_{13} = 0,53$, $C_{14} = 0,75$, $C_{33} = 0,09$, $C_{44} = 2,45$, $C_{66} = 0,6$, $\rho = 0,47$. Ориентации кристаллов соответствуют стандартным установкам. В качестве характерных величин были использованы следующие значения: $l_0 = 10^{-3}$ м, $t_0 = 10^{-6}$ с, $m_0 = 10^4$ кг. Толщина h всех слоев одинакова: $h = 0,1 \cdot l_0$.

В качестве примеров расчетов на рисунке в условной шкале изображены амплитуды



вертикальных перемещений $|u_3(x_1, x_2, 0)|$, создаваемые механическим источником $U_3^{(2)}$, соответствующим группе из четырех точечных трещин вертикального отрыва, действующим между первым и вторым слоем с нормированной частотой $\omega = 10$. На рисунках принято обозначение $x = x_1$, $y = x_2$.

Первые две координаты $(x_1^{(j)}, x_2^{(j)})$ трещин описываются радиусом r и двумя углами ψ, ϕ :

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= r \cos(\psi), & x_2^{(1)} &= r \sin(\psi), \\ x_1^{(2)} &= -x_1^{(1)}, & x_2^{(2)} &= -x_2^{(1)}, \\ x_1^{(3)} &= r \cos(\psi + \phi), & x_2^{(3)} &= r \sin(\psi + \phi), \\ x_1^{(4)} &= -x_1^{(3)}, & x_2^{(4)} &= -x_2^{(3)}. \end{aligned}$$

Для простоты амплитуды всех источников полагались равными. Рассматривались различные значения r, ψ, ϕ и фазы ω_0 между двумя группами источников с координатами $(x_1^{(1)}, x_2^{(1)})$, $(x_1^{(2)}, x_2^{(2)})$ и $(x_1^{(3)}, x_2^{(3)})$, $(x_1^{(4)}, x_2^{(4)})$.

В левой колонке рисунка показан вид амплитуд вертикальных перемещений $|u_3|$ в зависимости от радиуса $0,2 \leq r \leq 0,4$ в случае синфазности источников. Как видно из этих рисунков, картина сложным образом зависит от данного параметра.

В правой колонке рисунка представлена аналогичная серия расчетов для случая, когда фазы двух групп источников отличаются на π . Как видно из этой серии рисунков, вид $|u_3|$ существенно зависит и от радиуса r , и от фазы ω_0 , и качественно, и количественно отличается от первой серии расчетов.

Влияние параметров ψ, ϕ на общую картину тоже может быть существенным.

В случае произвольных фаз и амплитуд источников, их координат, поверхность $|u_3|$

усложняется в значительной степени и теряет всякую симметричность, например, даже при изменении фазы только одного источника.

Литература

1. Бабешко В. А. Среды с неоднородностями (случай совокупностей включений и трещин) // Известия РАН. МТТ. 2000. № 3. С. 5–9.
2. Бабешко В. А., Павлова А. В., Ратнер С. В., Вильямс Р. К решению задачи о вибрации упругого тела, содержащего систему внутренних полостей // ДАН. 2002. Т. 382. № 5. С. 625–628.
3. Бабешко В. А., Бабешко О. М. Метод факторизации в теории вирусов вибропрочности // ДАН. 2003. Т. 393. № 4. С. 473–477.
4. Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В. Об интегральном и дифференциальном методах факторизации // ДАН. 2006. Т. 410. № 1. С. 49–52.
5. Новацкий В. Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 159 с.
6. Александров В. М., Сметанин Б. И., Соболев Б. В. Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Наука, 1993. 224 с.
7. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука. 1989. 344 с.
8. Бабешко В. А., Сыромятников П. В. Метод построения символа Фурье матрицы Грина многослойного электроупругого полупространства // МТТ. 2002. № 5. С. 35–47.
9. Бабешко В. А., Ратнер С. В., Сыромятников П. В. О смешанных задачах для термоэлектроупругих сред с разрывными граничными условиями // ДАН. 2007. Т. 412. № 6. С. 1–6.
10. Акустические кристаллы. Справочник / Под ред. М.П. Шаскольской. М.: Наука, 1982. 632 с.

Статья поступила 23 января 2007 г.

Кубанский государственный университет

© Зарецкая М. В., Москвичев С. В., Павлова А. В., Плужник А. В., Ратнер С. В., Сыромятников П. В., 2007