

УДК 624.131; 532.546

ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНСОЛИДАЦИИ ТОРФА¹*Костерин А. В.², Поташёв К. А.³***A ONE-DIMENSIONAL MODEL OF PEAT FILTRATIONAL CONSOLIDATION**

Kosterin A. V., Potashev K. A.

The work discusses various ways of mathematical modeling of the process of filtrational consolidation of water-saturated peat under the action of constant external loading. Water flow in pores thus is supposed to submit to the Darcy's law with a threshold gradient. The engineering scheme of the one-dimensional consolidation process is studied, according to which the ground is supposed to be freely-deformable down to the limiting rate of deformation. Within the framework of the given model, the problem has the analytical solution with a small number of parameters. The results obtained are compared to the problem solution according to the model of viscoelastic medium. Also, the work offers generalization of the mathematical model of viscoelastic medium for the case of the ground strengthened during consolidation.

Введение

Теория фильтрационной консолидации с успехом применяется в задачах строительства и геомеханики. Отсюда неугасающий интерес к ней и огромное количество работ [2]. Консолидация в глинистых грунтах и грунтах с большим содержанием органики (торф) [3–5] приводит к эффекту запираания транспортных пор, который адекватно описывается моделью фильтрации жидкости с предельным градиентом. Работ, учитывающих такой эффект, сравнительно мало [1, 6–8]. В то же время учет начального градиента давления жидкости под внешней нагрузкой весьма существенно сказывается на прогнозной величине усадки.

Отдельно отметим серию работ [9–11], в которых описывается состояние грунта, когда процесс фильтрации закончился, состояние грунта стабильное, и наблюдается избыточное поровое давление. Для объяснения этого факта авторы не привлекают модель жидкости с начальным градиентом, поскольку это делает задачу нелинейной [11]. Для учета избыточного порового давления высказаны две математические гипотезы. Согласно первой гипотезе [9], избыточная поровая вода держит нагрузку, подобно скелету грунта, и вводится линейная связь избыточного дав-

ления и деформаций. Вторая гипотеза описывает реологию насыщенную пористой среды на базе линейной теории упругости. Такая модель удобна, однако физического обоснования она не имеет. Модель нарушает фундаментальный принцип Терцаги [11], согласно которому должно выполняться $b_i = 0$.

В настоящей работе предложена упрощенная аналитическая модель одномерной фильтрационной консолидации с предельным градиентом. Предполагается, что пористая матрица деформируется совершенно свободно до некоторого жесткого предела [1]. Модель описывает мягкие горные породы (неуплотненные глины и торф). Оправдание такого упрощения заключается в том, что, во-первых, на этапе первичного уплотнения отжим воды лимитируется не напряжением матрицы грунта, а фильтрационным сопротивлением, во-вторых, вторичное уплотнение мало по сравнению с первичным уплотнением.

Результаты анализа процесса одномерной консолидации по предложенной упрощенной модели сопоставляются с результатами анализа по известной математической модели с вязкоупругой реологией торфа. Показана их хорошая согласованность.

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (05-01-00516).

²Костерин Александр Васильевич, д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник НИИММ им. Н. Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

³Поташев Константин Андреевич, ассистент кафедры аэрогидромеханики Казанского государственного университета.

Далее предлагается обобщение математической модели консолидации на случай упрочняющегося во время уплотнения грунта.

1. Постановка задачи

Рассматриваем процесс уплотнения водонасыщенного слабого грунта под действием приложенной к его поверхности в начальный момент времени постоянной по величине нагрузки Π . К категории слабых органоминеральных грунтов принято относить такие природные пористые среды как глины и торфяные грунты [5].

При удаленном расположении границ деформируемого грунта от места приложения нагрузки область, занятую грунтом, можно считать полубесконечной и перейти к одномерной задаче. Пространственную координату x будем отсчитывать внутрь грунта вниз от точки нагружения.

Процесс одномерного уплотнения грунтов может происходить лишь за счет отжатия поровой жидкости и уменьшения объема газовой фазы. Как известно, объемные изменения жидкой и твердой фаз грунтов в практических условиях уплотнения ничтожно малы, и ими можно пренебречь. Отжатие насыщающей грунт жидкости происходит через нагруженную поверхность («высокопроницаемый поршень») [12].

Учитывая, что слабые органоминеральные грунты в природном залегании представляют собой избыточно-увлажненные системы с малым объемом газов (0,5–3 %), примем в качестве гипотезы, что при рассмотрении процесса сжатия этих систем газовую фазу можно не учитывать [5].

2. Предельная реологическая схема

Уравнение квазиравновесия среды [13] с учетом величины внешней нагрузки Π записывается в виде

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \text{ или } \sigma + p = \Pi. \quad (2.1)$$

Здесь p — давление в воде, σ — эффективные напряжения в скелете грунта (положительные при сжатии).

Условие неразрывности процесса фильтрационной консолидации обеспечивается равенством скорости деформации грунта удельному

расходу вытесняемой из порового пространства воды [12]

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (2.2)$$

Здесь ε — относительная объемная деформация грунта, t — время, q — скорость фильтрации воды через грунт.

Для адекватного математического описания процесса фильтрации в глинистых и торфяных грунтах, как уже было отмечено, необходимо использовать модель фильтрации с предельным градиентом напора, требуемым для начала движения жидкости по поровым каналам [3, 4]:

$$q = -K[\xi],$$

$$K[\xi] = k_0 \begin{cases} 0, & |\xi| \leq \Gamma, \\ \xi - \Gamma \frac{\xi}{|\xi|}, & |\xi| > \Gamma, \end{cases} \quad (2.3)$$

где $\xi = \frac{\partial p}{\partial x}$, k_0 — коэффициент фильтрации, Γ — предельный градиент давления.

В рамках предельной реологической схемы [1] предполагается, что пористая матрица деформируется совершенно свободно до некоторого жесткого предела

$$\begin{cases} \sigma = 0, & \varepsilon < \varepsilon_0, \\ \sigma \neq 0, & \varepsilon = \varepsilon_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Здесь ε_0 — величина предельной деформации грунта. После приложения внешней нагрузки от поверхности нагружения вглубь грунта будет формироваться область предельного сжатия с ненулевым напряжением. Вне этой области напряжения отсутствуют. Определим закон движения границы этой области $x = H(t)$, продвигающейся внутрь среды. Ниже фронта $x = H(t)$, $\sigma = 0$ и, по (2.1), $p = \text{const} = \Pi$. Следовательно, фильтрация насыщающей пористую среду жидкости ниже $x = H(t)$ не происходит.

Предположим, что за промежуток времени Δt фронт сместился вниз на величину ΔH , то есть у слоя грунта толщины ΔH величина относительного сжатия достигла значения ε_0 (2.4). Поскольку деформация пористой среды происходит лишь за счет изменения порового объема (заполненного жидкостью), то за тот же промежуток времени через границу $x = H(t)$ должен вытесниться объем жидкости равный $\Delta H \varepsilon_0$.

Таким образом, величина расхода жидкости на фронте с учетом направления потока есть

$$q^* = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta H \varepsilon_0}{\Delta t} = - \dot{H} \varepsilon_0.$$

Здесь через $\dot{(\)}$ обозначена производная по времени.

Далее, отжатая с фронта жидкость попадает в область грунта с предельным сжатием, где деформации уже не происходят. Следовательно, в силу несжимаемости жидкости, для отфильтровывания вытесненного с фронта сжатия объема воды расход должен быть одинаков во всех точках области предельного сжатия и должен совпадать с расходом на фронте предельного сжатия:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad x < H(t);$$

$$q \equiv \text{const} = q^* = - \dot{H} \varepsilon_0. \quad (2.5)$$

В рамках модели фильтрации (2.3) с постоянным по величине предельным градиентом Γ и постоянным коэффициентом фильтрации k_0 постоянство расхода может выполняться лишь при условии

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}.$$

С учетом граничных условий [12]

$$\begin{cases} lp(x=0, t) = 0, \\ p(x=H, t) = \Pi \end{cases}$$

получим следующий вид линейного распределения давления в области фильтрации:

$$p(x, t) = \frac{\Pi}{H(t)} x.$$

Следовательно, в этой области

$$q(x, t) = -k_0 \left(\frac{\Pi}{H(t)} - \Gamma \right) \quad (2.6)$$

и предельное положение фронта есть

$$H(\infty) = \frac{\Pi}{\Gamma}.$$

Таким образом, наличие предельного градиента давления Γ приводит к тому, что область фильтрации охватывает не весь слой грунта, а лишь ту его часть вблизи поверхности нагружения, где перепад давления в воде

достаточен для ее отжатия через поровые каналы.

Сопоставив уравнения (2.5) и (2.6), получим дифференциальное уравнение движения фронта предельного сжатия

$$\varepsilon_0 \dot{H}(t) = k_0 \left(\frac{\Pi}{H(t)} - \Gamma \right). \quad (2.7)$$

Зададим характерный линейный масштаб задачи $L = 1$ м и характерное значение нагрузки $\Pi = 0,1$ МПа. Масштаб времени в рамках предельной реологической схемы определим, зная характерные значения проницаемости слабых грунтов ($k \sim 10^{-12}$ м²) и вязкости насыщающих их в природных условиях жидкостей $\mu \sim 10^{-3}$ Па·с:

$$T = \frac{L^2}{k_0 \Pi} = \frac{L^2 \mu}{k \Pi} \sim$$

$$\sim \frac{1 \text{ м}^2 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}}{10^{-12} \text{ м}^2 \cdot 10^5 \text{ Па}} = 10^4 \text{ с}. \quad (2.8)$$

Введем безразмерный параметр $\alpha = L\Gamma/\Pi$. При среднем значении $\Gamma \sim 0,01$ МПа/м параметр α будет принимать значения порядка $\alpha \sim 0,1$.

В безразмерных переменных уравнение (2.7) примет вид

$$\varepsilon_0 \dot{H} \cdot H = 1 - \alpha H.$$

Отметим, что произведение αH изменяется в диапазоне $[0; 1]$.

Используя начальное условие $H(t=0) = 0$, получим решение этого уравнения

$$t = - \frac{\varepsilon_0}{\alpha^2} (\alpha H + \ln(1 - \alpha H)). \quad (2.9)$$

На рис. 1 приведен вид полученной траектории для различных значений величины ε_0/α^2 .

Таким образом, при использовании предельной реологической схемы для описания процесса консолидации водонасыщенного слабого грунта не требуется задавать подробное реологическое поведение среды. Это позволяет сократить число параметров, необходимых для решения поставленной задачи.

В то же время использование этой упрощенной схемы расчета в ряде случаев оказывается достаточным для получения оценки основных характеристик процесса с требуемой для инженерных расчетов точностью.

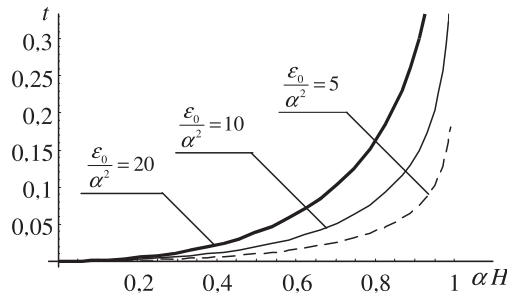


Рис. 1. Траектории фронта предельного сжатия

3. Обоснование предельной схемы

где

В качестве обоснования предельной схемы проведем сопоставление полученных результатов с моделью фильтрационной консолидации вязкоупругого грунта [13], соответствующей исследуемым слабым грунтам:

$$\sigma = -\lambda \left(\varepsilon + \tau_0 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \right), \quad (3.1)$$

где λ , τ_0 — описывают упругие и вязкие свойства системы.

Перегруппировка уравнений (2.1)–(2.3), (3.1) дает одно уравнение относительно эффективных напряжений

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \lambda \left(1 + \tau_0 \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial x} K \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] = 0. \quad (3.2)$$

Оценивая масштаб времени для задачи о вязкоупругой среде, отметим, что по данным Н. А. Цытовича и Б. И. Далматова для слабых грунтов характерна прочность ниже 0,1 МПа и модуль деформации менее 3–5 МПа. Например, торфяная залежь в естественном залегании обладает весьма низкой несущей способностью (менее 0,03 МПа) и сильной сжимаемостью с модулем общей деформации менее 0,1 МПа. Тогда для характерного времени получим

$$T = \frac{L^2}{k_0 \lambda} \sim \frac{1 \text{ м}^2 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}}{10^{-12} \text{ м}^2 \cdot 10^5 \text{ Па}} = 10^4 \text{ с}$$

и, следовательно, при таком выборе масштаб времени имеет тот же порядок, что и для предельной реологической схемы (2.8).

Далее, не изменяя обозначений, будем использовать безразмерные величины. Уравнение (3.2) примет вид

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} - \left(1 + \delta \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial x} \bar{K} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] = 0, \quad (3.3)$$

$$\delta = \frac{\tau_0}{T}, \quad \bar{K} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right] = \begin{cases} 0, & \left| \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right| \leq \alpha, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \alpha \operatorname{sgn} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right), & \left| \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right| > \alpha. \end{cases}$$

Начальные и граничные условия

На нагруженной поверхности эффективные напряжения грунта совпадают с величиной внешней нагрузки. На фронте $x = H(t)$ абсолютная величина перепада давления принимает минимальное значение, достаточное для начала процесса фильтрации $\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \alpha$. Итак, граничные условия имеют вид:

$$\begin{cases} \sigma|_{x=0} = 1, \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x}|_{x=H(t)} = -\alpha. \end{cases}$$

Начальное распределение напряжений $\sigma_0(x) = \sigma(x, t=0)$ получим, переписав (3.3) при условии $\left| \frac{\partial \sigma}{\partial x} \right| > \alpha$ в виде

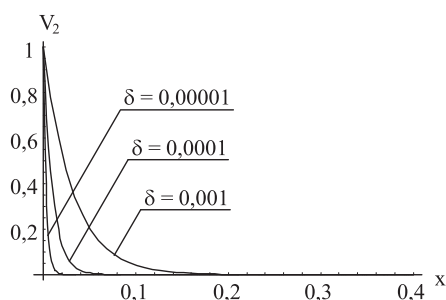
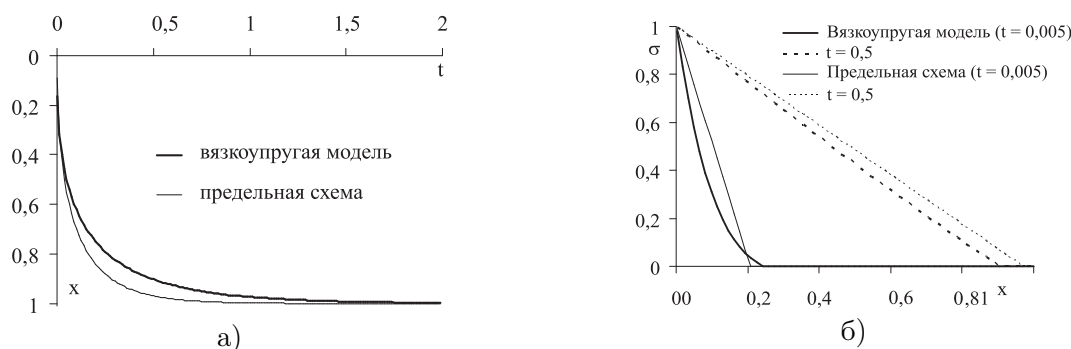
$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma - \delta \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = 0.$$

Тогда уравнение для определения $\sigma_0(x)$

$$\sigma_0 - \delta \frac{\partial^2 \sigma_0}{\partial x^2} = 0.$$

Используя в качестве граничных условий соотношения

$$\begin{cases} \sigma_0(0) = 1, \\ \sigma_0(l_0) = 0, \end{cases}$$

Рис. 2. Начальное распределение напряжений в грунте при $\alpha = 0,1$ Рис. 3. Сопоставление предельной схемы и модели вязкоупругой среды $\alpha = 1$, $\delta = 0,001$, $\varepsilon_0 = 0,2$.
а — траектории фронта области фильтрации, б — распределение напряжений в различные моменты времени

получим решение

$$\sigma_0 = \operatorname{sh} \left(\frac{l_0 - x}{\sqrt{\delta}} \right) / \operatorname{sh} \left(\frac{l_0}{\sqrt{\delta}} \right).$$

Величину l_0 определим из условия $\frac{\partial \sigma_0}{\partial x}(x = l_0) = -\alpha$:

$$l_0 = \sqrt{\delta} \ln \left[\frac{1 + \sqrt{\alpha^2 \delta + 1}}{\alpha \sqrt{\delta}} \right].$$

В качестве примера на рис. 2 приведена зависимость начального распределения напряжений от параметра δ , характеризующего вязкие свойства системы.

Основа численного алгоритма, использованного при решении задачи в рамках вязкоупругой реологии грунта, описана в работе [13].

На рис. 3 приведено сопоставление траектории фронта предельного сжатия, а также распределения напряжений по обеим схемам.

Отметим, что при изменении величины α характер соответствия предельной реологической схемы и вязкоупругой модели сохраняется, изменяются лишь предельная глубина области фильтрации $H(\infty)$ и продолжительность процесса усадки. Продолжительностью

процесса будем называть момент достижения фронтом величины $0,98H(\infty)$.

4. Упрочнение грунта

Уплотнение насыщенного грунта вызывает его упрочнение, выражаемое в повышении фильтрационного сопротивления среды. Влияние этого явления на процесс фильтрационной консолидации рассмотрим с двух позиций. В первом случае предельный градиент будет возрастать при сжатии грунта вследствие изменения свойств насыщающей грунт жидкости. Во втором — сжатие грунта будет приводить к снижению его абсолютной проницаемости и, как следствие, к повышению предельного градиента фильтрации.

Далее представлены результаты обобщения математической модели фильтрационной консолидации вязкоупругого грунта с учетом его упрочнения.

Снижение подвижности жидкости при ее отжатии из пор

Впервые рассмотрим кинетику изменения порового пространства торфа различной степени разложения D по значениям гидравличе-

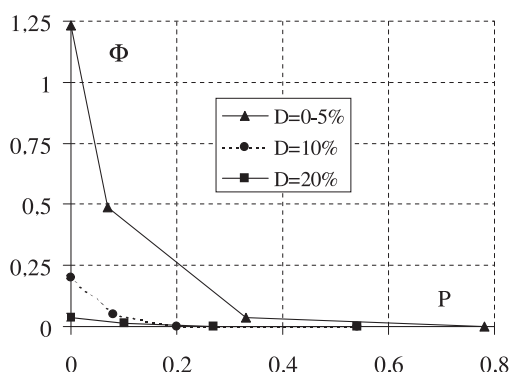


Рис. 4. Изменение коэффициента фильтрации (Φ , м/сут) слабых органо-минеральных грунтов различной степени разложения D при различных величинах давления уплотнения (P , 10^5 Па) [14]

ского радиуса и эффективного диаметра пор в процессе их уплотнения позволили исследования, проведенные в работе [14] (рис. 4). Именно эти параметры играют решающую роль в оценке подвижности поровой жидкости при внешнем давлении.

Глинистые частицы рассматриваемых в работе грунтов способны присоединять значительное количество воды и могут легко отрываться от основной массы материала, образуя коллоидный раствор, способный к структурированию.

Консолидация грунта будет приводить к повышению концентрации коллоидного раствора, поскольку при сжатии будет происходить преимущественное отжатие отдаленных от твердых поверхностей объемов воды. Следовательно, можно предположить, что при сжатии торфяных и глинистых грунтов будет увеличиваться предельный градиент фильтрации насыщающей их воды, способствуя при этом повышению фильтрационного сопротивления консолидации грунта. Таким образом, можно говорить о явлении упрочнения сжимаемого водонасыщенного грунта.

Для учета эффекта упрочнения к математической записи модели фильтрационной консолидации добавим связь величины предельного градиента и относительной деформации пористой матрицы грунта $\Gamma(\varepsilon)$

$$\Gamma(\varepsilon) = (\Gamma_0 - \Gamma^*)e^{-\omega\varepsilon} + \Gamma^*, \quad (4.1)$$

где Γ_0 — начальный градиент недеформированного грунта, Γ^* — максимальный для грунта предельный градиент фильтрации, ω — некоторый коэффициент, влияющий на скорость структурирования насыщающей грунт жидкости при сжатии грунта. Зависимость (4.1) записана в безразмерных величинах.

Чтобы воспользоваться зависимостью (4.1) при численном расчете необходимо определять распределение деформаций по глубине грунта в течение процесса консолидации. Решая задачу в постановке относительно напряжений, величину деформации в точке можно определить по реологическому закону (3.1), записанному в безразмерных переменных

$$\sigma = -\left(\varepsilon + \delta \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right). \quad (4.2)$$

Начальным условием будет отсутствие деформаций в начальный момент времени

$$\varepsilon(x, t) = 0.$$

Поскольку напряжение в данный момент времени зависит от актуальной деформации и актуальной скорости деформаций, то конечно-разностная запись уравнения (4.2) имеет вид

$$\sigma = -\left(\varepsilon + \delta \frac{\widehat{\varepsilon} - \varepsilon}{\Delta t}\right),$$

где Δt — шаг по времени, а галочка над величиной указывает на следующий временной слой. Тогда по найденному распределению напряжений в данный момент времени можно определить деформации и, соответственно, предельный градиент фильтрации для нового временного слоя.

Эффект «упрочнения» будет приводить к замедлению скорости фронта фильтрации в грунте. На рис. 5 приведено сравнение траекторий фронта области деформаций грунта по вязкоупругой модели без упрочнения и с учетом упрочнения при $\Gamma^* = 2$ с различными значениями параметра ω .

Очевидно, что повышение величины предельного градиента фильтрации приведет

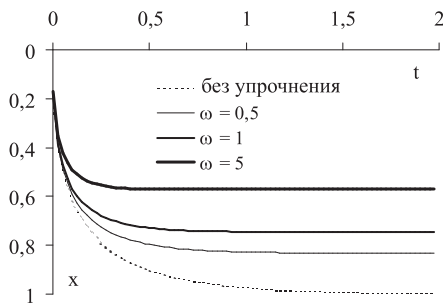


Рис. 5. Вид траектории фронта области деформаций $H(t)$ по модели без упрочнения и с учетом упрочнения при различных значениях параметра ω ($\alpha = 1$, $\delta = 0,001$, $\Gamma^* = 2$)

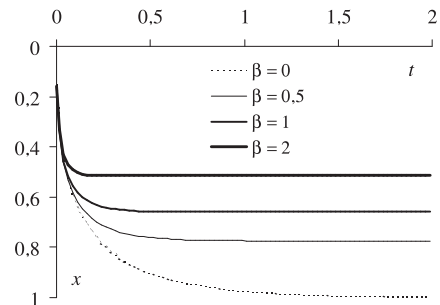


Рис. 6. Траектория фронта области фильтрации по вязкоупругой модели при различных значениях коэффициента снижения проницаемости β ($\alpha = 1$, $\delta = 0,001$)

к сокращению максимальной протяженности области H^* , охваченной процессом фильтрации.

Продолжительность процесса усадки также будет сокращаться при возрастающем предельном градиенте фильтрации.

Снижение проницаемости грунта при сжатии

Очень малые значения пористости и высокая сжимаемость могут приводить к существенной зависимости гидропроводности слабых органо-минеральных грунтов от эффективных напряжений [15]. В глинистых и глинизированных породах может происходить как иммобилизация воды, благодаря удержанию ее вблизи частиц глины, так и закупоривание пор коллоидом. Лабораторные исследования проницаемости торфов показали, что насыщенная гидропроводность является экспоненциальной функцией эффективных напряжений [16]

$$K = K_0 e^{-\beta \sigma}, \quad (4.3)$$

где K_0 — начальная гидропроводность насыщенного торфа, β — некоторая константа.

В свою очередь, согласно [3], начальный градиент является функцией проницаемости пористой среды

$$\frac{\Gamma}{\Gamma_0} = \sqrt{\frac{K_0}{K}} = e^{\frac{\beta}{2} \sigma}. \quad (4.4)$$

При такой взаимосвязи начального градиента фильтрации, проницаемости и эффективных напряжений будет происходить более быстрое достижение деформируемым грунтом стабилизированного состояния (рис. 6).

В рамках предельной реологической схемы переменная величина проницаемости приведет к нелинейному распределению давления в жидкости по глубине грунта

$$p(x) = \frac{1}{\alpha} \ln \left[\frac{e^{\alpha \Gamma H} - e^{\alpha \Pi} - e^{\alpha \Gamma x} + e^{\alpha (\Pi + \Gamma x)}}{e^{\alpha \Gamma H} - 1} \right],$$

а также изменит закон движения фронта предельного сжатия (2.7), (2.9).

Заключение

Торф как слабый грунт позволяет использовать упрощенную модель консолидации (предельную схему), предполагающую свободную деформируемость грунта вплоть до достижения предельной величины деформации. Сравнение такой упрощенной модели с моделью фильтрационной консолидации вязкоупругого грунта показало, что упрощенная схема хорошо отражает процесс посредством простой инженерной формулы (2.9).

Торф как мягкий грунт обладает способностью упрочняться при сжатии, что выражается в повышении фильтрационного сопротивления среды. В таком случае проницаемость пористой среды оказывается неоднородной и зависящей от эффективного напряжения (4.3). Анализ размерностей показывает, что существует связь проницаемости и предельного градиента (4.4), согласно которой предельный градиент также является неоднородным.

Предложена обобщенная модель консолидации вязкоупругого грунта, учитывающая неоднородный характер предельного градиента фильтрации.

Литература

1. *Егоров А. Г., Костерин А. В.* Автомодельные решения задач об уплотнении и водоотдаче глин при отборе жидкости из пластов // Доклады АН России. 2002. Т. 383. № 2. С. 202–205.
2. *Schiffman R. L.* A bibliography of consolidation // Bear J., Corapcioglu M. Y. (Eds.) Fundamentals of transport in porous media (NATO ASF Ser.) Martinus Nijhoff Publishers. 1984. P. 619–669.
3. *Бернадинер М. Г., Ентов В. М.* Гидродинамическая фильтрация аномальных жидкостей. М.: Наука, 1975. 200 с.
4. *Осипов В. И.* Природа прочностных и деформационных свойств глинистых пород. М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1979. 235 с.
5. *Амарян Л. С.* Свойства слабых грунтов и методы их изучения. М.: Недра, 1990. 224 с.
6. *Мазуров П. А.* Расчет одномерной нелинейной консолидации // Вопросы подземной гидромеханики и оптимизации нефтедобычи. Казань: Казан. физ.-техн. ин-т КФАН СССР, 1987. С. 55–62.
7. *Нуриджанян С. Ш., Хачатарян Э. А.* Влияние начального градиента напора на процесс консолидации // Изв. АН Арм. ССР. Сер. техн. наук. 1983. Т. 36. № 5. С. 22–25.
8. *Pascal Florica, Pascal Hanry, Murray D. W.* Consolidation with threshold gradients // Intern. J. Numer. and Anal. Geomech. 1981. Vol. 5. No. 3. P. 247–261.
9. *Мальцев Л. Е., Бай В. Ф., Мальцева Т. В.* Кинематическая модель грунта и биоматериалов. СПб.: Стройиздат, 2002. 320 с.
10. *Мальцева Т. В., Трефилина Е. Р.* Моделирование двухфазного тела с учетом несущей способности жидкой фазы // Математическое моделирование. 2004. Т. 16. № 11. С. 47–60.
11. *Мальцева Т. В.* Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния водонасыщенного грунта с позиций теории вязкоупругости: Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. Казань, 2006. 38 с.
12. *Николаевский В. Н.* Механика пористых и трещиноватых сред. М.: Недра, 1984. 232 с.
13. *Егоров А. Г., Костерин А. В., Сахабудинова Д. Р.* Одномерные задачи консолидации с неизвестной подвижной границей // Механика твердого тела. 1998. № 6. С. 132–142.
14. *Афанасьев А. Е., Чураев Н. В.* Оптимизация процессов сушки и структурообразования в технологии торфяного производства. М.: Недра, 1992. 287 с.
15. *Hemond H., Goldman J.* On non-Darcian water flow in peat // Journal of Ecology. 1985. No. 73. P. 579–584.
16. *Lang Y.* Influence of water table changes on saturated peat compressibility and permeability. MEng Thesis, University of Waterloo. 2002.