

УДК 539.3

**ВИНТОВЫЕ ТУРБУЛЕНТНЫЕ ТЕЧЕНИЯ В УГЛОВЫХ ОБЛАСТЯХ***Никаноров А. М.<sup>1</sup>, Заволженский М. В.<sup>2</sup>, Трунов Н. М.<sup>3</sup>*

## SCREW TURBULENT CURRENTS IN ANGULAR DOMAINS

Nikanorov A. M., Zavolzhensky M. V., Trunov N. M.

On the basis of the Navier-Stokes equations with anisotropic turbulent resistance determined by the tensor of Reynolds stresses, the problem is solved concerning movement of liquid in angular domains and in the domains limited by surfaces with different characteristics of curvature. At first, we construct integrated representations of longitudinal velocity of a stream in wedge-shaped domains and study asymptotic fields of velocities and asymptotic components of stresses tensor at the surface of a wedge. Then, with the application of the tensor of anisotropic turbulent resistance, we analytically describe characteristics of the screw current in the dihedral angle (a pair of symmetric screws) and in the vicinities of a type of a wing — fuselage joint (one asymmetrical screw). The results of modeling are verified by the data of aerodynamic, hydrological and aerologic experiments.

**1. Введение**

В настоящей работе турбулентные сопротивления моделируются на основании того факта, что тензор напряжений Рейнольдса  $\mathbf{P}'$  является функцией относительной скорости жидкости. Поэтому тензор  $\mathbf{P}'$  разлагается в ряд по степеням относительной скорости жидкости. Используется первое приближение, в котором  $\operatorname{div} \mathbf{P}' = -\rho \kappa_{ij}(v_j - V_j)$ , где  $V_j$  — компоненты скорости течения жидкости на бесконечности,  $\kappa_{ij}$  — тензор частот, которые находятся экспериментально. Частоты  $\kappa_{ij}$  назовём турбулентными сопротивлениями. Получим уравнения Навье-Стокса с анизотропным турбулентным сопротивлением, определяемым напряжениями Рейнольдса

$$v_{i,4} + v_j v_{i,j} = -\rho^{-1} p_{,i} + \nu v_{i,jj} - \kappa_{ij}(v_j - V_j) + f_i, \quad (1.1)$$

$$v_{j,j} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Уравнения (1.1) без статистики описывают макрохарактеристики турбулентных потоков, полученные в результате статистической обработки данных экспериментов [1–5]. С помощью (1.1) очень просто описываются трапециевидные профили скорости течения в тру-

бах [2]. Уравнения Навье-Стокса без турбулентного сопротивления не позволяют решить задачу о течении жидкости в окрестности скользящей в ней плоскости. В этом случае уравнения (1.1) дают у плоскости простой погранслои, исчезающий вместе с вязкостью [3]. Из экспериментов известно [6], что такие погранслои устанавливаются за конечный промежуток времени. Именно из-за отсутствия погранслоев у цилиндров, на основе уравнений Навье-Стокса при  $\kappa_{ij} = 0$  не существует подходов к решению внешних задач о ламинарном и турбулентном продольном обтекании цилиндров и пластин. На основе же уравнений (1.1) задача о продольном одномерном обтекании цилиндров сводится к интегрированию уравнения Гельмгольца. Обратим движение и изучим поведение жидкости, покоящейся на бесконечности, в окрестности цилиндра, скользящего в жидком пространстве вдоль своих образующих. Перепад давления включается в граничные условия на контуре поперечного сечения цилиндра.

**2. Течение в двугранном углу**

Задача о турбулентном течении жидкости в двугранном русле возникла при анализе экс-

<sup>1</sup>Никаноров Анатолий Максимович, чл.-кор. РАН, д-р геол.-минерал. наук, профессор, директор Гидрохимического института, заведующий Южным отделом ИВП РАН.

<sup>2</sup>Заволженский Михаил Вадимович, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Южного отдела ИВП РАН.

<sup>3</sup>Трунов Николай Михайлович, канд. тех. наук, старший научный сотрудник Южного отдела ИВП РАН.

периментальных данных об обтекании жидкостью двугранного угла, равного  $90^\circ$  [6].

Задачу о движении бесконечного двугранного угла (клина) раствора  $\alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ , в направлении вдоль среза клина с постоянной скоростью  $V$  в жидкости, покоящейся на бесконечном удалении от среза клина, решаем в полярных координатах  $(r, \theta)$ ,  $0 \leq r \leq \infty$ ,  $|\theta| \leq \alpha/2$ . Турбулентное сопротивление временно считаем изотропным. В этом случае частоты  $\kappa_{ii} = \kappa > 0$ ,  $\kappa_{ij} = 0$ ,  $j \neq i$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ . Граничная задача для определения параллельной срезу клина скорости  $v'(r, \theta)$  жидкости внутри клина в переменных

$$v' = Vw(x, \theta), \quad x = r\sqrt{\frac{\kappa}{\nu}} \quad (2.1)$$

на основе уравнений (1.1) формулируется следующим образом:

$$x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x \frac{\partial w}{\partial x} - x^2 w + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} w\left(x, \pm \frac{\alpha}{2}\right) &= 1 \quad (0 \leq x \leq \infty), \\ w(\infty, \theta) &= 0 \quad \left(\theta \neq \frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Решение задачи (2.2) ищем в виде интеграла Канторовича-Лебедева

$$w(x, \theta) = \int_0^\infty F(\tau, \theta) K_{i\tau}(x) d\tau. \quad (2.4)$$

Подстановка интеграла (2.4) в уравнение (2.2) дает

$$\int_0^\infty \left\{ \left[ x^2 K_{i\tau}''(x) + x K_{i\tau}'(x) - x^2 K_{i\tau}(x) \right] F(\tau, \theta) + \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} K_{i\tau}(x) \right\} d\tau = 0,$$

где штрих означает производную по  $x$ . Из дифференциального уравнения для  $K_{i\tau}(x)$  находим  $x^2 K_{i\tau}''(x) + x K_{i\tau}'(x) - x^2 K_{i\tau}(x) = -\tau^2 K_{i\tau}(x)$ . Поэтому при любом значении  $x$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left[ \frac{\partial^2 F(\tau, \theta)}{\partial \theta^2} - \tau^2 F(\tau, \theta) \right] K_{i\tau}(x) d\tau &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial^2 F(\tau, \theta)}{\partial \theta^2} - \tau^2 F(\tau, \theta) &= 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Введём интеграл (2.4) в условие (2.3) на границе клина  $\theta = \pm\alpha/2$

$$\int_0^\infty F\left(\tau, \pm \frac{\alpha}{2}\right) K_{i\tau}(x) d\tau = 1.$$

В той части теории цилиндрических функций, которая исследует интегрирование таких функций по индексу, известно соотношение

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{2} K_{i\tau}(x) d\tau = 1. \quad (2.6)$$

Сравнивая его с предыдущим, выводим граничное условие для  $F$

$$F\left(\tau, \pm \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{2}. \quad (2.7)$$

Из уравнения (2.5) при условии (2.7) находим

$$F(\tau, \theta) = \frac{2 \operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{2} \operatorname{ch}(\theta\tau)}{\pi \operatorname{ch} \frac{\alpha\tau}{2}}.$$

Вводя найденное выражение  $F(\tau, \theta)$  в (2.4), получим интегральное представление скорости внутри клина

$$w = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{2} \operatorname{ch}(\theta\tau)}{\operatorname{ch} \frac{\alpha\tau}{2}} K_{i\tau}(x) d\tau, \quad (2.8)$$

$$0 \leq x \leq \infty, \quad |\theta| \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Из асимптотики  $K_{i\tau}(x)$  при  $x \rightarrow \infty$  по формуле (2.6) следует, что граничные условия (2.3) для функции (2.8) выполнены. Проверка уравнения (2.2) не составляет труда. Положим в интеграле (2.8)  $\alpha = \pi$  и воспользуемся известным соотношением

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{ch}(\theta\tau) K_{i\tau}(x) d\tau = e^{-x \cos \theta}, \quad |\theta| < \frac{\pi}{2}.$$

Тогда  $w = e^{-x \cos \theta}$ ,  $|\theta| < \pi/2$ ,  $\alpha = \pi$ . Так как  $x \cos \theta = z$  — расстояние жидкой точки от плоскости  $\theta = \pm\pi/2$ , выражение  $w = e^{-x \cos \theta}$  совпадает с найденным в [3] для скорости жидкости, вызванной движением в жидком пространстве плоскости в направлении лежащей в ней прямой линии.

Для дальнейшего исследования выражения (2.8) воспользуемся интегральным представлением

$$K_{i\tau}(x) \cos \frac{\pi\tau}{2} = \int_0^{\infty} \cos(xsh t) \cos(\tau t) dt.$$

После подстановки в (2.8) и замены порядка интегрирования, получаем

$$w = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(xsh t) \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(\theta\tau) \cos(\tau t)}{\operatorname{ch} \frac{\alpha\tau}{2}} d\tau dt.$$

Внутренний интеграл является элементарной функцией. Поэтому (заменой  $t = \alpha z$ ) находим интегральное представление, эквивалентное (2.8),

$$w = 4 \cos \frac{\pi\theta}{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(\pi z) \cos(xsh\alpha z)}{\operatorname{ch}(2\pi z) + \cos \frac{2\pi\theta}{\alpha}} dz. \quad (2.9)$$

Из-за экспоненциального убывания отношения гиперболических косинусов при  $z \rightarrow \infty$  основной вклад в интеграл (2.9) вносит окрестность точки  $z = 0$ . Это дает возможность заменить в подынтегральном выражении  $sh\alpha z \sim \alpha z$ . Тогда

$$w \sim \frac{\operatorname{ch}(\theta x)}{\operatorname{ch} \frac{\alpha x}{2}}, \quad (2.10)$$

$$0 \leq x \leq \infty, \quad |\theta| \leq \frac{\alpha}{2}, \quad 0 < \alpha \leq 2\pi.$$

Отсюда, как и из точных формул (2.8) и (2.9), следует, что изотакси  $w = \text{const}$  симметричны относительно биссекторной плоскости  $\theta = 0$ , что известно по наблюдениям [6]. Оценка погрешности соотношения (2.10) не проводится. Отметим, что все граничные условия (2.3) (включая точку  $x = 0$ ) соотношением (2.10) удовлетворены. Кроме этого, приближенное соотношение (2.10), справедливое при  $x \geq 0$ , тем точнее, чем больше  $x$ , т.к. при  $x \rightarrow \infty$  из-за быстрых осцилляций  $\cos(xsh\alpha z)$  в интеграле (2.9) вклад окрестности точки  $z = 0$  в значение этого интеграла все более возрастает. Наоборот, при  $x \rightarrow 0$  вклад окрестности этой точки убывает, так как в этом случае осцилляция косинуса будет влиять только при  $z \rightarrow \infty$ . Поэтому соотношение (2.10) при малых  $x$  нельзя дифференцировать по  $\theta$  для определения напряжений, действующих

на клин в окрестности его вершины. Вне указанной окрестности безразмерные касательные напряжения  $p_{\theta z}$  в области течения жидкости

$$p_{\theta z} = \frac{p'_{\theta z}}{\rho V \sqrt{\kappa\nu}} = \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial \theta} \sim \frac{\operatorname{sh}(\theta x)}{\operatorname{ch} \frac{\alpha x}{2}}, \quad x \neq 0,$$

где  $p'_{\theta z}$  — размерные напряжения. Заметим, что вдали от вершины клина ( $x \rightarrow \infty$ ) напряжения на его поверхности ( $|\theta| = \alpha/2$ ) перестают зависеть от угла раствора клина  $\alpha$  и практически постоянны.

Изучение напряжений в окрестности вершины клина ( $x \rightarrow 0$ ) сложнее. При  $x = 0$  производная интеграла (2.8) по  $\theta$  обращается в ноль. Поэтому отношение  $x^{-1} \partial w / \partial \theta$  при  $x \rightarrow 0$  не определено. Чтобы выделить соответствующую особенность, выведем приближение для  $\partial w / \partial \theta$ , справедливое при  $x \rightarrow 0$ . Исходим из соотношения (2.8), в которое введем главный член разложения  $K_{i\tau}(x)$  при малых  $x$

$$\begin{aligned} K_{i\tau}(x) &= \frac{\pi}{2 \sin(\pi i\tau)} [I_{-i\tau}(x) - I_{i\tau}(x)] = \\ &= -\frac{\pi}{\sin(\pi\tau)} \operatorname{Im} \frac{(x/2)^{i\tau} \Gamma(1-i\tau)}{\Gamma(1+i\tau)\Gamma(1-i\tau)} [1 + O(x^2)] = \\ &= -\frac{1 + O(x^2)}{\tau} \operatorname{Im} \left[ \left(\frac{x}{2}\right)^{i\tau} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-i\tau} dt \right] = \\ &= \frac{1 + O(x^2)}{\tau} \int_0^{\infty} e^{-t} \sin \left( \tau \ln \frac{2t}{x} \right) dt. \end{aligned}$$

Тогда, опуская  $O(x^2)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial \theta} &\sim \\ &\sim \frac{2}{\pi x} \int_0^{\infty} e^{-t} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{2} \operatorname{sh}(\theta\tau)}{\operatorname{ch} \frac{\alpha\tau}{2}} \sin \left( \tau \ln \frac{2t}{x} \right) d\tau dt, \\ &x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл представляет собой элементарную функцию

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial \theta} &\sim \frac{2}{\alpha x} \int_0^{\infty} e^{-t} \times \\ &\times \left[ \frac{\sin \theta_+}{\operatorname{ch} 2\vartheta + \cos \theta_+} + \frac{\sin \theta_-}{\operatorname{ch} 2\vartheta + \cos \theta_-} \right] \operatorname{sh} \vartheta dt. \end{aligned}$$

Здесь

$$\theta_{\pm} = (2\theta \pm \pi)\pi, \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} \ln \frac{2t}{x}.$$

При  $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \left( \frac{\pi}{\alpha} \ln \frac{2t}{x} \right) &\sim \frac{1}{2} \left( \frac{2t}{x} \right)^{\pi/\alpha}, \\ \operatorname{ch} \left( \frac{2\pi}{\alpha} \ln \frac{2t}{x} \right) &\sim \frac{1}{2} \left( \frac{2t}{x} \right)^{2\pi/\alpha}, \end{aligned}$$

поэтому получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial \theta} &\sim \frac{2}{\alpha x} [\sin \theta_+ + \sin \theta_-] \times \\ &\times \int_0^\infty e^{-t} \left( \frac{2t}{x} \right)^{-\pi/\alpha} dt, \\ x &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

и касательные напряжения в окрестности вершины клина

$$\begin{aligned} p_{z\theta} &\sim 2^{\frac{2\alpha-\pi}{\alpha}} x^{\frac{\alpha-\pi}{\alpha}} \frac{1}{\alpha} \Gamma \left( \frac{\alpha-\pi}{\alpha} \right) \times \\ &\times \cos \frac{\pi^2}{2\alpha} \sin \frac{\pi\theta}{\alpha}, \quad (2.11) \\ x &\ll 1. \end{aligned}$$

Разлагая гамма-функцию в бесконечное произведение, находим

$$\lim_{\alpha \rightarrow \pi} \Gamma \left( \frac{\alpha-\pi}{\alpha} \right) \cos \frac{\pi^2}{2\alpha} = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,  $p_{z\theta} \Big|_{\alpha=\pi} \sim \sin \theta$ ,  $x \ll 1$ . Это значит, что касательные напряжения при обтекании бесконечной пластины на самой пластине ( $\theta = \pi/2$ ) постоянны и равны  $\rho V(\kappa\nu)^{1/2}$ . Далее, из (2.11) следует, что, если жидкость течет по коническому желобу раствора  $0 < \alpha < \pi$ , то касательные напряжения в вершине желоба  $x = 0$  отсутствуют, хотя в окрестности самой вершины, особенно при малых растворах желоба  $\alpha$ , поведение касательных напряжений сложное. Если жидкость обтекает двугранный угол раствора  $\pi < \alpha \leq 2\pi$  вдоль среза клина, то в вершине  $x = 0$  клина напряжения бесконечны. В частности, при  $\alpha = 2\pi$ ,  $\theta = -\pi$  напряжения на пластине в окрестности ее среза при обтекании вдоль среза  $p_{z\theta} \sim -\frac{1}{\sqrt{\pi x}}$ ,  $x \rightarrow 0$ . Аналогично исследуются касательные напряжения  $p'_{rz}$ . Из формулы (2.10) находим ( $x \neq 0$ )

$$\begin{aligned} p_{rz} &= \frac{\partial w}{\partial x} \sim \\ &\sim 4 \operatorname{ch}^{-2} \frac{\alpha x}{2} \left( \theta \operatorname{ch} \frac{\alpha x}{2} \operatorname{sh}(\theta x) - \frac{\alpha}{2} \operatorname{sh} \frac{\theta x}{2} \operatorname{ch}(\theta x) \right). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} p_{rz} &\sim - \left( \frac{\alpha}{2} - |\theta| \right) \exp \left[ - \left( \frac{\alpha}{2} - |\theta| \right) x \right], \\ x &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

В окрестности вершины клина аналогично (2.11)

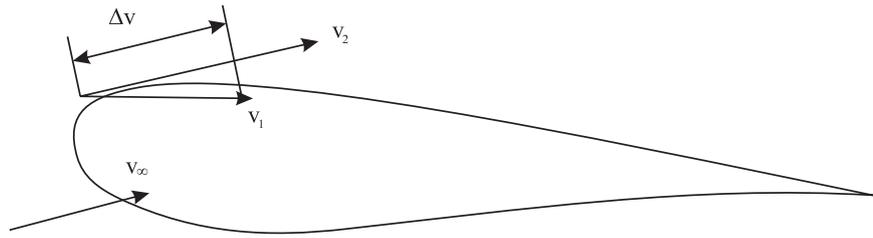
$$\begin{aligned} p_{rz} &\sim 2^{\frac{2\alpha-\pi}{\alpha}} x^{\frac{\alpha-\pi}{\alpha}} \frac{1}{\alpha} \Gamma \left( \frac{\alpha-\pi}{\alpha} \right) \cos \frac{\pi^2}{2\alpha} \cos \frac{\pi\theta}{\alpha}, \\ x &\ll 1. \end{aligned}$$

Радиальные касательные напряжения на поверхности клина  $|\theta| = \alpha/2$  равны нулю.

### 3. Поверхности с разными радиусами кривизны

Задача о течении жидкости в окрестности стыка поверхностей с разными радиусами кривизны возникла при анализе экспериментальных данных об обтекании окрестности крыло-фюзеляж [6].

Второй пример моделирования одномерного течения связан с двугранным углом с подвижной гранью. В качестве примера рассмотрим окрестность стыка крыло-фюзеляж. Поместим начало координат в точку  $O$  потока, близкую к линии сочленения крыла с фюзеляжем в лобовой зоне крыла выше точки его встречи с набегающим потоком. Набегающий на крыло поток вдоль фюзеляжа в такой точке имеет скорость  $\mathbf{v}_1$ , а вдоль крыла — скорость  $\mathbf{v}_2$ , причем длины  $|\mathbf{v}_1| < |\mathbf{v}_2|$ , так как крыло лобовым сопротивлением тормозит набегающий поток (рисунок). Величина разности  $\Delta v$  между  $|\mathbf{v}_2|$  и проекцией  $\mathbf{v}_1$  на  $\mathbf{v}_2$  зависит от формы крыла. Считаем ее известной, причем  $\Delta v > 0$ . Связываем систему координат с фюзеляжем и направляем  $Oz$  по  $\mathbf{v}_1$ . Жидкость относительно такой системы вдоль крыла движется со скоростью  $\Delta v$  в направлении  $Oz$  и неподвижна относительно фюзеляжа. Заменяя крыло и фюзеляж в окрестности точки  $O$  плоскостями, приходим к задаче определения поля скоростей жидкости в двугранном углу, когда одна его грань движется относительно другой вдоль ребра угла  $Oz$  с заданной скоростью  $V = \Delta v$ . Такая задача возникает всякий раз, когда исследуется продольное обтекание пересекающихся поверхностей с разными кривизнами потоком жидкости вдоль линии их пересечения: обтекание крыла у торца, течение по криволинейным



Скорости у стыка поверхностей с разными радиусами кривизны

участкам вентиляционных и гидродинамических труб прямоугольного сечения, течения в криволинейных руслах и др. Поэтому решение задачи о движении жидкости в двугранном углу, одна из граней которого движется относительно другой вдоль ребра с заданной постоянной скоростью  $V$ , актуально для любых растворов угла  $0 < \alpha \leq 2\pi$ .

Определение составляющей скорости, параллельной ребру рассматриваемого двугранного угла, в безразмерных переменных (2.1) сводится к интегрированию уравнения (2.2) при граничных условиях

$$\begin{aligned} w\left(x, -\frac{\alpha}{2}\right) &= 1, & w\left(x, \frac{\alpha}{2}\right) &= 0, \\ w(\infty, \theta) &= 0, & \left(\theta \neq \frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Решение отыскивается в виде интеграла (2.4). Тогда для определения  $F(\tau, \theta)$  получаем уравнение (2.5) и, с учетом соотношений (2.4), (3.1), (2.6), граничные условия

$$F\left(\tau, -\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2}{\pi} \operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{2}, \quad F\left(\tau, \frac{\alpha}{2}\right) = 0.$$

Поэтому имеем

$$\begin{aligned} F(\tau, \theta) &= \frac{2 \operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{2}}{\pi \operatorname{sh}(\alpha\tau)} \sin \left[ \left( \frac{\alpha}{2} - \theta \right) \tau \right], \\ w &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\operatorname{ch} \frac{\pi\tau}{2}}{\operatorname{sh}(\alpha\tau)} \times \\ &\quad \times \sin \left[ \left( \frac{\alpha}{2} - \theta \right) \tau \right] K_{i\tau}(x) d\tau \quad (3.2) \end{aligned}$$

( $0 \leq x \leq \infty$ ,  $|\theta| \leq \frac{\alpha}{2}$ ,  $0 < \alpha \leq 2\pi$ ) или, по аналогии с (см. (2.9))

$$w = \cos \frac{\pi\theta}{\alpha} \int_0^\infty \frac{\cos(x \operatorname{sh} \alpha z)}{\operatorname{ch}(\pi z) + \sin \frac{\pi\theta}{\alpha}} dz,$$

$$0 \leq x \leq \infty, \quad |\theta| \leq \frac{\alpha}{2}, \quad 0 < \alpha \leq 2\pi.$$

Основной вклад здесь при любых  $x$  дает окрестность точки  $z = 0$  ( $\operatorname{sh} \alpha z \sim \alpha z$ ):

$$w \sim \frac{\operatorname{sh} \frac{(\alpha - 2\theta)x}{2}}{\operatorname{sh}(\alpha x)}, \quad (3.3)$$

$$0 \leq x \leq \infty, \quad |\theta| \leq \frac{\alpha}{2}, \quad 0 < \alpha \leq 2\pi.$$

Производная

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} \sim -\frac{x \operatorname{ch} \frac{(\alpha - 2\theta)x}{2}}{\operatorname{sh}(\alpha x)}$$

при  $\theta \sim \alpha/2$  экспоненциально убывает с ростом  $x$ , а при  $\theta \sim -\alpha/2$  растет по  $x$  линейно. При  $x \rightarrow 0$   $\partial w / \partial \theta$  больше у поверхности  $\theta = \alpha/2$ , чем у  $\theta = -\alpha/2$ . Поэтому у поверхности  $\theta = \alpha/2$  скорость  $w$  медленно, а при  $\theta = -\alpha/2$  быстро меняется по  $\theta$ . Следовательно изотакхи  $w = \operatorname{const}$  гуще у подвижной грани угла (крыло  $\theta = -\alpha/2$ ), чем у неподвижной (фюзеляж  $\theta = \alpha/2$ ). Это известно по наблюдениям [6]. Азимутальные касательные напряжения

$$p_{z\theta} = \frac{1}{x} \frac{\partial w}{\partial \theta} \sim -\frac{\operatorname{ch} \frac{(\alpha - 2\theta)x}{2}}{\operatorname{sh}(\alpha x)},$$

$$0 < x \leq \infty.$$

Используя в (3.2) прием, примененный при выводе формулы (2.11), убеждаемся, что последнее выражение справедливо при всех  $x > 0$ . Так, напряжения на подвижной грани угла  $p_{z\theta}|_{\theta = -\alpha/2} = -\operatorname{cth}(\alpha x)$  слабо зависят от  $x$  при  $x \rightarrow \infty$ , как этого и следовало ожидать. На неподвижной грани  $p_{z\theta}|_{\theta = \alpha/2} \sim -\frac{1}{\operatorname{sh}(\alpha x)}$ . Такие напряжения экспоненциально убывают с ростом  $x$ . Неподвижная грань с удалением от ребра перестает ощущать влияние подвижной, и тем быстрее,

чем больше раствор угла  $\alpha$ . Безразмерные касательные напряжения

$$\begin{aligned} p_{zr} &= \frac{\partial w}{\partial x} \sim \\ &\sim \left[ \left( \frac{\alpha}{2} - \theta \right) \operatorname{ch} \left[ \left( \frac{\alpha}{2} - \theta \right) x \right] \operatorname{sh}(\alpha x) - \right. \\ &\quad \left. - \alpha \operatorname{sh} \left[ \left( \frac{\alpha}{2} - \theta \right) x \right] \operatorname{ch} \alpha x \right] \operatorname{sh}^{-2}(\alpha x), \\ &0 < x \leq \infty \end{aligned}$$

обращаются в ноль на подвижной и неподвижной гранях угла ( $|\theta| = \alpha/2$ ).

#### 4. Симметричный вихрь внутри клина

Экспериментально установлено [6], что при симметричном продольном обтекании двугранного угла раствора  $0 < \alpha < \pi$  внутри угла на первичное течение с продольной скоростью  $w(r, \theta)$  (ось  $Oz$  фиксирована вдоль ребра угла по направлению набегающего потока) накладывается вторичное течение, состоящее из двух стационарных винтовых течений, симметричных относительно биссекторной плоскости. Ориентация вращения винтов такова, что в районе биссекторной плоскости жидкость движется к вершине угла. В указанной работе отмечены трудности аналитического описания пары винтов-вихрей и предполагается, что для численного моделирования вихрей необходим учет анизотропной турбулентности. Ниже на основе уравнений (1.1) с анизотропным сопротивлением строится аналитическая модель двух вихрей. Упрощения тензора  $\kappa_{ij}$  в данном случае следующие. Первичное течение направлено вдоль оси  $Oz$ . Поэтому в тензоре  $\kappa_{ij}$  в первую очередь нужно учитывать компоненты, связанные с осью  $Oz$  (лобовые сопротивления в радиальном и азимутальном направлениях, а также касательные сопротивления, не связанные с  $Oz$ , слабее лобового  $Oz$ -сопротивления). Поэтому

$$\kappa_{\theta r} = \kappa_{r\theta} = \kappa_{\theta\theta} = \kappa_{rr} = 0. \quad (4.1)$$

Симметрия течения относительно биссекторной плоскости  $\theta = 0$  говорит о том, что анизотропное турбулентное сопротивление в азимутальном направлении развито слабее, чем в направлении радиальной оси. Поэтому касательными компонентами  $\kappa_{\theta z} = \kappa_{z\theta}$  пренебрегаем по сравнению с  $\kappa_{rz} = \kappa_{zr}$ . Кроме этого считаем, что касательное сопротивление слабее лобового т. е.  $|\kappa_{rz}/\kappa_{zz}| < 1$ . Учитывая эти

соображения, расписываем уравнения (1.1) в безразмерных переменных

$$\begin{aligned} x &= r \sqrt{\frac{\kappa_{zz}}{\nu}}, \\ v_r &= \varepsilon V u, \quad v_\theta = \varepsilon V v, \quad v_z = V w, \\ p' &= \varepsilon \rho V \sqrt{\kappa \nu} p, \quad \beta = \frac{\alpha}{2}, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon = \kappa_{rz}/\kappa_{zz}$ ,  $V$  — скорость продольного перемещения двугранного угла вдоль своего ребра относительно жидкости, покоящейся на бесконечности, и опускаем величины  $O(\varepsilon)$  по сравнению с единицей. Тогда с учетом равенств (4.1) для определения функций  $u(x, \theta)$ ,  $v(x, \theta)$  и  $p(x, \theta)$  получим следующие уравнения и граничные условия:

$$\begin{aligned} x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} - u + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - 2 \frac{\partial v}{\partial \theta} - x^2 \frac{\partial p}{\partial x} = \\ = x^2 w(x, \theta), \quad (4.2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + x \frac{\partial v}{\partial x} - v + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial \theta} - x \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{\partial(xu)}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0, \end{aligned}$$

$$u = v = 0 \quad (\theta = \pm\beta), \quad v = v = 0 \quad (x \rightarrow \infty).$$

Для продольной компоненты  $w(x, \theta)$  поля скоростей при этом получается задача (2.2)–(2.3). Поэтому  $w$  — точное решение (2.8) задачи о продольном движении двугранного угла в жидкости с изотропным турбулентным сопротивлением. Поскольку вихревые образования в рассматриваемом течении сконцентрированы в окрестности вершины двугранного угла, решение задачи (4.2) ищем в виде рядов, описывающих течение в окрестности  $0 < x \ll 1$ . Отвлекаясь от описания течения при  $x \rightarrow \infty$ , разложим функцию (2.8) и искомое решение задачи (4.2) в ряды

$$x^2 w(x, \theta) = \sum_{k=2}^{\infty} W_k(\theta) x^k, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \{u, v, p\} = \\ = \sum_{k=2}^{\infty} \left\{ U_k(\theta), V_k(\theta), \frac{1}{x} P_k(\theta) \right\} x^k. \quad (4.4) \end{aligned}$$

Внося ряды (4.3), (4.4) в (4.2), сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  и обозначая штрихом производную по  $\theta$ , получим для определения коэффициентов рядов (4.4) систему дифференциальных уравнений и граничных условий

$$U_k'' + (k^2 - 1)U_k - 2V_k' - (k - 1)P_k = W_k,$$

$$\begin{aligned}(k+1)U_k + V_k' &= 0, \quad k = 2, 3, \dots, \\ V_k'' + (k^2 - 1)V_k + 2U_k' - P_k' &= 0, \\ U_k(\pm\beta) = V_k(\pm\beta) &= 0.\end{aligned}$$

Исключая  $U_k, P_k$ , получим дифференциальное уравнение для определения  $V_k$

$$\begin{aligned}V_k^{IV} + 2(k^2 + 1)V_k'' + (k^2 - 1)^2 V_k &= -(k+1)W_k', \\ V_k(\pm\beta) = V_k'(\pm\beta) &= 0.\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}V_k &= \left[ (k-1) \cos((k-1)\beta) \sin((k+1)\theta) - \right. \\ &- (k+1) \cos((k+1)\beta) \sin((k-1)\theta) \left. \right] J_k(\beta) \Delta_+^{-1} + \\ &+ \left[ \sin((k+1)\beta) \sin((k-1)\theta) - \right. \\ &- \sin((k+1)\theta) \sin((k-1)\beta) \left. \right] J_k'(\beta) \Delta_+^{-1} + \\ &+ J_k(\theta), \quad (4.5)\end{aligned}$$

$$\Delta_+ = \sin(k\alpha) - k \sin \alpha,$$

$$J_k(\theta) = \frac{1}{4k(k-1)} \int_0^\theta [D_0(t, \Theta)] W_k'(t) dt,$$

$$\begin{aligned}D_0(t, \Theta) &= (k-1) \sin((k+1)(\theta-t)) - \\ &- (k+1) \sin((k-1)(\theta-t)),\end{aligned}$$

$$U_k = -\frac{1}{k+1} V_k', \quad k = 2, 3, \dots, \quad \alpha = 2\beta.$$

Опишем особые точки течения по двум отличным от нуля членам разложения (4.4), (4.5) для движения в жидкости прямого угла ( $\alpha = \pi/2$ ). Для этого случая имеются экспериментальные данные о паре вихрей у вершины угла [6]. Для  $w(x, \theta)$  в (4.3) используем асимптотику (2.10), разложив ее в ряд по  $x$  с тремя членами. Тогда из условий  $u(x, \theta) = v(x, \theta) = 0$ , определяющих особую точку  $(x_0, \theta_0)$ , находим  $x_0 = 2,001$ ,  $\theta_0 = \pi/8$ . Значение  $\theta_0 = \pi/8$  полностью соответствует как экспериментальным данным, так и численным расчетам [6]. Дифференциальное уравнение линий тока в окрестности особой точки

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{a(\theta - \theta_0) + b(x - x_0)}{c(\theta - \theta_0) + d(x - x_0)}, \quad (4.6)$$

где с тремя верными знаками после запятой  $a = -1,233$ ,  $b = 0,103$ ,  $c = -0,103$ ,  $d = 0.106$ . В характеристическом уравнении  $z^2 - (b+c)z + bc - ad = 0$  этого уравнения

$b+c=0$ ,  $bc-ad > 0$ . Поэтому всего двух отличных от нуля членов в (4.4), (4.5) достаточно для доказательства того, что особая точка течения является особой точкой типа центр. Ниже показано, что этот результат не случаен. Исследование направления вращения вокруг центра методом изоклин показывает, что вращение происходит таким образом, что в окрестности биссекторной плоскости жидкость движется от вершины угла. Это тоже соответствует наблюдениям, так как в экспериментах угол неподвижен, движение обратное [6]. Результаты исследования особой точки для других  $\alpha$  на основе двух членов разложения (2.3) сведены в таблицу.

При меньших и больших значениях  $\alpha$  двух членов рядов (4.4), (4.5) для определения положения особой точки потока недостаточно. Из этой таблицы следует, что для углов  $0 < \alpha < 100^\circ$  существует такой раствор обтекаемого угла ( $\alpha \sim 60^\circ$ ), при котором особая точка располагается ближе всего к вершине угла.

## 5. Несимметричный вихрь у крыла и фюзеляжа

Перейдем к описанию несимметричного вихря в окрестности стыка крыла с фюзеляжем. При обтекании стыка крыла с фюзеляжем на первичный поток накладывается течение, состоящее из одиночного вихря, центр которого смещен в область с меньшим градиентом осевой (первичной) скорости — к фюзеляжу. Ориентация вращения в вихре — от крыла к фюзеляжу [6]. Для моделирования вихря на основе уравнений (1.1) используем подход, в котором окрестность заменяется двугранным углом, одна из граней которого ( $\theta = -\alpha$ ) движется относительно другой ( $\theta = \alpha$ ) вдоль ребра с постоянной скоростью  $V$ , так что с удалением от ребра внутрь угла течение исчезает. Изучаемое течение обладает большей анизотропией турбулентности по сравнению с предыдущим. Поэтому в тензоре турбулентного сопротивления нужно учитывать наибольшее число компонент. Принимаем условия  $\kappa_{\theta r} = \kappa_{r\theta} = 0$ , так как основные эффекты касательного сопротивления рождаются движением вдоль оси  $Oz$  — ребра угла. Но в данном случае из двух условий (4.1) на лобовое сопротивление остается только одно  $\kappa_{rr} = 0$ ,  $\kappa_{\theta\theta} \neq 0$ , так как имеется скос течения в азимутальном направлении  $\theta$ . В остальном принимаем предыдущие предположения об анизотропном сопротивлении:  $\kappa_{rz} = \kappa_{zr}$ ,  $\kappa_{\theta z} = \kappa_{z\theta}$ ,  $|\kappa_{z\theta}/\kappa_{zz}| < 1$ . Тогда в прежних без-

$\alpha$	$\theta_0$	$x_0$
20°	±5°	4,947
40°	±10°	2,435
60°	±15°	1,579
90°	±22°30′	2,001
100°	±25°	2,950

размерных переменных (в которых  $\varepsilon$  следует заменить на  $\varepsilon = \kappa_{z\theta}/\kappa_{zz}$ ) из (1.1) для определения  $u(x, \theta)$ ,  $v(x, \theta)$  и  $p(x, \theta)$  получим систему уравнений, пренебрегая величиной  $O(\varepsilon^2)$  в сравнении с единицей

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} - u + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - 2 \frac{\partial v}{\partial \theta} - x^2 \frac{\partial p}{\partial x} = \eta x^2 w(x, \theta), \quad (5.1)$$

$$\eta = \frac{\kappa_{rz}}{\kappa_{zz}}, \quad \zeta = \frac{\kappa_{\theta\theta}}{\kappa_{zz}},$$

$$x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + x \frac{\partial v}{\partial x} - v + \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial \theta} - x \frac{\partial p}{\partial \theta} = x^2 (w + \zeta v),$$

$$\frac{\partial(xu)}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0.$$

В таком приближении для осевой составляющей безразмерной скорости течения  $w$  получается ранее решенная задача (2.2), (3.1). Граничные условия для (5.1)

$$u = v = 0 \quad (\theta = \pm\beta),$$

$$u = v = 0 \quad (x \rightarrow \infty). \quad (5.2)$$

Отвлекаясь от описания течения при  $x \rightarrow \infty$ , разложим функцию (3.2) в степенной ряд (4.3) и представим решение задачи (5.1)–(5.2) в виде рядов (4.4). Тогда для определения коэффициентов этих рядов получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений и граничных условий:

$$U_k'' + (k^2 - 1)U_k - 2V_k' - (k - 1)P_k = \eta W_k,$$

$$(k + 1)U_k + V_k' = 0, \quad k = 2, 3, \dots,$$

$$V_k'' + (k^2 - 1)V_k + 2U_k' - P_k' = W_k + \zeta V_{k-2},$$

$$U_k(\pm\beta) = V_k(\pm\beta) = 0, \quad V_0 = V_1 \equiv 0.$$

Исключая  $U_k$  и  $P_k$ , получаем граничную задачу для определения  $V_k$ :

$$V_k^{IV} + 2(k^2 + 1)V_k'' + (k^2 - 1)^2 V_k =$$

$$= (k^2 - 1)(W_k + \zeta V_{k-2}) - \eta(k + 1)W_k',$$

$$V_k(\pm\beta) = V_k'(\pm\beta) = 0.$$

Отсюда находим

$$V_k = \frac{1}{2} \left[ -\sin((k - 1)\beta) \sin((k + 1)\theta) + \right.$$

$$+ \sin((k + 1)\beta) \sin((k - 1)\theta)] \Delta_+^{-1} G_k'(\beta) -$$

$$- \frac{1}{2} [\cos((k + 1)\beta) \cos((k - 1)\theta) -$$

$$- \cos((k - 1)\beta) \cos((k + 1)\theta)] \Delta_-^{-1} \times$$

$$\times G_k'(\beta) + G_k(\theta) +$$

$$+ \frac{1}{2} [-(k + 1) \cos((k + 1)\beta) \sin((k - 1)\theta) +$$

$$+ (k - 1) \cos((k - 1)\beta) \sin((k + 1)\theta)] \Delta_+^{-1} -$$

$$- [(k + 1) \sin((k + 1)\beta) \cos((k - 1)\theta) -$$

$$- (k - 1) \sin((k - 1)\beta) \cos((k + 1)\theta)] \times$$

$$\times \Delta_-^{-1} G_k(\beta), \quad (5.3)$$

$$\Delta_{\pm} = k \sin \alpha - \sin(k\alpha),$$

$$U_k = -\frac{1}{k + 1} V_k,$$

$$G_k(\theta) = I_k(\theta) + \eta I_{k\eta}(\theta) + \zeta I_{k\zeta}(\theta),$$

$$I_k(\theta) = L_k(W_k, \theta),$$

$$I_{k\eta}(\theta) = \frac{1}{k - 1} L_k(W_k', \theta),$$

$$I_{k\zeta}(\theta) = L_k(V_{k-2}, \theta),$$

$$L_k(\Phi, \theta) = -\frac{1}{4k} \int_{-\beta}^{\theta} \Phi(t) [D_0(t, \Theta)] dt.$$

Проанализируем характер особой точки этого течения по двум отличным от нуля членам разложений (4.3) для случая движения жидкости в прямом углу ( $\beta = \pi/4$ ) с подвижной гранью  $\theta = -\pi/4$ . Для  $w$  вместо (3.2) используем асимптотику (3.3), разложив ее в ряд по  $x$  и ограничиваясь двумя членами разложения. Тогда

$$u = x^2 [U_{21} + \eta U_{2\eta} + x^2 (U_{41} + \eta U_{4\eta} + \zeta U_{4\zeta})],$$

$$v = x^2 [V_{21} + \eta V_{2\eta} + x^2 (V_{41} + \eta V_{4\eta} + \zeta V_{4\zeta})], \quad (5.4)$$

где первые индексы (2 и 4) — номера членов рядов (4.4), а вторые (1,  $\eta$  и  $\zeta$ ) соответствуют вкладам в  $u$  и  $v$  интегралов  $I_k$ ,  $I_{k\eta}$  и  $I_{k\zeta}$  из (5.3) соответственно. Из условия  $u(x, \theta) = v(x, \theta) = 0$  для особой точки  $(x_0, \theta_0)$  потока с учетом (5.4) находим

$$\begin{aligned} x_0^2 &= \frac{U_{21} + \eta U_{2\eta}}{U_{41} + \eta U_{4\eta} + \zeta U_{4\zeta}} \Big|_{\theta=\theta_0} = \\ &= -\frac{V_{21} + \eta V_{2\eta}}{V_{41} + \eta V_{4\eta} + \zeta V_{4\zeta}} \Big|_{\theta=\theta_0}. \end{aligned} \quad (5.5)$$

В уравнении линий тока (4.6)

$$c = V'_{21} + \eta V'_{2\eta} + x_0^2 (V'_{41} + \eta V'_{4\eta} + \zeta V'_{4\zeta}),$$

$$b = U_{21} + \eta U_{2\eta} + 3x_0^2 (U_{41} + \eta U_{4\eta} + \zeta U_{4\zeta}).$$

Учитывая выражения (5.5) для  $x_0^2$  и уравнение неразрывности, записанное в форме  $V'_{kj} = -(k+1)U_{kj}$ , где  $j$  — любой из индексов 1,  $\eta$  или  $\zeta$ , находим  $b = -c$ . Заметим, что аналогичные рассуждения в общем виде можно проделать и для предыдущей, более простой, ситуации симметричного течения с двумя вихрями в двугранной области. Поэтому в характеристическом уравнении дифференциального уравнения (4.6)  $b + c = 0$ . Это означает, что особая точка течения  $(x_0, \theta_0)$  являются либо центром, либо седлом. Численный расчет на основе (5.3) показывает, что условие существования особой точки  $x_0^2 > 0$  при положительном лобовом турбулентном сопротивлении  $\kappa_{zz} > 0$  в том месте, где эта точка наблюдается в экспериментах  $\theta_0 \approx \pi/3$  [6] автоматически обеспечивает то, что эта особая точка — центр. При этом сопротивления  $\kappa_{rz}$  и  $\kappa_{z\theta}$  имеют разные знаки:  $\eta < -1/2$ . Направление вращения в вихре — к подвижной грани двугранного угла. Обращая движение, приходим к выводу, что вихрь вращается от крыла к фюзеляжу, что соответствует наблюдениям [6].

Отметим еще один результат численного решения задачи. Если в уравнениях (1.1) пренебречь хотя бы одним из учтенных компонентов тензора турбулентных сопротивлений ( $\eta = 0$  или  $\zeta = 0$ ), то совпадения с наблюдениями не достигаются — центр вихря смещается к крылу в зону с большим градиентом осевой скорости. В рассматриваемом случае анизотропия турбулентности наиболее развита, что соответствует наблюдениям [6].

## Заключение

Проведённое исследование показывает, что модель динамики вязкой несжимаемой жидкости, основанная на уравнениях Навье-Стокса с анизотропным турбулентным сопротивлением позволяет качественно описать течения, для моделирования которых традиционным способом не существует подходов. Модель винтовых течений в угловых областях была основана на экспериментальных аэродинамических исследованиях. Позже эта модель получила и гидрологическое подтверждение. При исследовании сотрудниками Гидрохимического института (Ростов-на-Дону) течения в русле Северского Донца с помощью трассеров (микрочастиц, маркирующих поток [7]) была обнаружена высокая концентрация трассера в двух точках течения реки [7]. Такая картина концентрации маркирующих поток частиц сохранялась на протяжении двух километров, несмотря на искривления русла и изменения глубины реки. Экспериментальная картина течения означает, что течение по руслу реки идёт по винтовым линиям с центрами гидродинамических винтов, расположенных в точках наибольшей концентрации трассера. Глубокая часть русла Северского Донца в месте наблюдения имеет клиновидную форму. Поэтому для описания течения в Донце применима построенная выше модель течений в угловых областях. Кроме этого, при исследовании ветровых течений в горных ущельях были обнаружены два винтовых течения, возникающих в ущельях при сильном ветре [8]. Ветровые течения маркировались в ущельях, имеющих клиновидную форму.

Результаты, полученные в данной работе, показывают, что турбулентные течения в глубоких спокойных реках с клиновидным руслом идут не статистическим хаосом в одном направлении, а двумя винтами. Течение у обрывистого берега происходит одним винтом. Полученные результаты могут найти применения не только в технической гидроаэродинамике (воздействие на крылья и рули самолетов и подлодок, оперения космических аппаратов и т. п.), но и в задачах вентиляции карьеров, промывки русел, вопросах, связанных с диагностикой и распространением загрязнений в водоёмах и т. д.

## Литература

1. Заволженский М. В., Руткевич П. Б. Большие числа Рейнольдса: обтекание контуров. Препринт Пр-2117. М.: ИКИ РАН, 2006, 60 с.

2. Кондратьев К. Я., Никаноров А. М., Пантюхин Я. В., Заволженский М. В. Некоторые турбулентные течения в водоемах. ДАН. 1992. Т. 324, № 3. С. 676–680.
3. Кондратьев К. Я., Никаноров А. М., Пантюхин Я. В., Заволженский М. В. Экмановский дрейф и другие течения в неограниченных областях. ДАН СССР. 1990. Т. 310. № 5. С. 1070–1074.
4. Кондратьев К. Я., Никаноров А. М., Пантюхин Я. В., Заволженский М. В. Вихревые режимы течений в водоемах. ДАН СССР. 1989. Т. 308. № 5. С. 1220–1223.
5. Кондратьев К. Я., Никаноров А. М., Пантюхин Я. В., Заволженский М. В. Слабая конвекция в больших объемах жидкости. ДАН СССР. 1990. Т. 310. № 4. С. 814–816.
6. Трехмерные турбулентные пограничные слои. Сборник статей под редакцией Х. Фернхольца, Е. Краузе. М.: Мир, 1985. 383 с.
7. Никаноров А. М., Трунов Н. М. Внутриводоёмные процессы и контроль качества природных вод. С.-Пб. Гидрометеоиздат. 1999, 155 с.
8. Радионов А. А. Течение воздуха и распространение загрязняющих веществ в горных ущельях. Дис. ... кандидата технических наук. Ростов-на-Дону, 2004. 31 с.

---

Статья поступила 23 января 2007 г.

Кубанский государственный университет

© Никаноров А. М., Заволженский М. В., Трунов Н. М., 2007