УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНО УПРАВЛЯЕМЫХ МАТЕРИАЛОВ И НАНОМАТЕРИАЛОВ[1]

В. А. Бабешко[2]***, О. В. Евдокимова***[3]***, С. М. Евдокимов***[4]

STUDY OF PHYSICAL PROPERTIES
OF INTELLECTUALLY CONTROLLED MATERIALS AND NANOMATERIALS

V. A. Babeshko, O. V. Evdokimova, S. M. Evdokimov

Factorization methods, developed to solve boundary-value problems, which are generated by the systems of differential equations in partial derivatives, are applied to study a number of materials with definite physical properties. On the basis of the developed solutions, the conditions have been determined, under which physical properties of materials are characterized by the ability to radiate waves with the given wave number at a rather large distance.

Методы факторизации, развитые в [1, 2] для исследования краевых задач, порождаемых системами дифференциальных уравнений в частных производных, применяются для изучения ряда материалов. Рассматриваются материалы, имеющие активные компоненты, обладающие определенными физическими свойствами, в частности, при определенных внешних воздействиях они способны излучать волны в некоторых спектрах частот. В работе не делается никаких ограничений на тип возбуждаемых волн — это могут быть электромагнитные, акустические, магнитостатические, тепловые, световые или волны любой другой природы. Предполагается, что среда, в которой находится материал, способна нести информацию о нескольких свойствах материала и его компонентов. Требуется, чтобы поведение волновых полей в средах описывалось бы дифференциальными уравнениями в частных производных, имеющих постоянные коэффициенты. Уравнения могут быть связными, конечного порядка, эллиптического типа. Будем считать, что среда, в которой расположен материал, — неограниченная, трехмерная, однородная. Компоненты материала являются трехмерными объектами, в отличие от молекулярных, точечных, не имеющих измерений моделей. Число компонент составляет некоторую совокупность. Ставится проблема исследования свойств и параметров компонент, входящих в состав материала, на предмет проявления материалом такого строения вполне определенных физических свойств, например, излучения им лишь определенного спектра частот и в определенных направлениях. Нетрудно видеть, что задача имеет и другую, эквивалентную постановку — материал с пассивными компонентами, способными отражать лишь волны определенного спектра, подвергается внешнему облучению. Ставится задача управления свойствами такого материала. В частности, это могут быть материалы, используемые для изготовления одежды.

Сформулированная таким образом задача имеет различные варианты при ее математической постановке. Рассмотрим простейший вариант, предпологая, что все компоненты своими поверхностями излучают волны одного спектра, отражаемые без поглощения соседними компонентами или уходящими на бесконечность.

Тогда указанная задача сводится к исследованию краевой задачи в неограниченном трехмерном пространстве, ставшем многосвязной областью ввиду исключения из него областей, занятых компонентами материала.

Будем считать, что в трехмерном пространстве протекают процессы, описываемые M функциями, удовлетворяющими системам линейных дифференциальных уравнений вто-

[1]Работа выполнена при поддержке грантов Минобразования России (Е02-4.0-190, З/Н-241, 379, 380, ГН-374), РФФИ (03-01-00694), РФФИ Р2003ЮГ (03-01-96537, 03-01-96527, 03-01-96519, 03-01-96584), ФЦП «Интеграция» (Б0121), программы CRDF (REC-004).

[2]Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, директор НИИ проблем механики и геоэкологии.

[3]Евдокимова Ольга Владимировна, канд. физ.-мат. наук, заведующая кафедрой факультета архитектуры и дизайна КубГУ.

[4]Евдокимов Сергей Михайлович, канд. физ.-мат. наук, заместитель директора Интернет-центра КубГУ.

рого порядка в частных производных с постоянными коэффициентами.

1. Рассматривается неограниченная многосвязная область Ω с составной, границей Γ, которая образуется в трехмерном пространстве после исключения ограниченных с гладкими границами Γ_n областей Ω_n, $n = 1, 2, \ldots, N$.

Таким образом,

$$\Gamma = \cup\Gamma_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N.$$

В соответствии с постановкой задачи все Γ_n не пересекаются. Будем считать, что касание также отсутствует.

Предполагая, что функции φ_n, $n = 1, 2, \ldots, M$ несут информацию о свойствах материала и его компонентов, поставим в указанной области краевую задачу для системы дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, исследовавшуюся в более общей постановке в [1]:

$$\mathbf{Q}(\partial x_n, \partial x_k)\boldsymbol{\varphi} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega(R^3), \tag{1}$$

$$\mathbf{R}(\partial x_k)\boldsymbol{\varphi} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma = \partial\Omega. \tag{2}$$

Оператор $\mathbf{Q}$ представим матрицей вида

$$\mathbf{Q}(\partial x_n, \partial x_k) = \|a_{mrnk}\partial x_n \partial x_k + b_{mrk}\partial x_k + c_{mr}\|.$$

Здесь приняты обозначения (суммирование по повторяющимся индексам):

$$a_{mrnk} f_n f_k = \sum_{n=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{mrnk} f_n f_k,$$

$$\mathbf{R}(\partial x_k) = \|h_{mrk}\partial x_k + p_{mr}\|,$$

$$\partial x = \partial/\partial x, \quad h_{mrk} = h_{mrk}(\Gamma),$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_r\}, \quad r = 1, 2, \ldots, M, \quad m = 1, 2, \ldots, M,$$

$$\mathbf{f} = \{f_r\}, \quad \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2, x_3),$$

$$\mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}) \equiv -\mathbf{Q}(-i\alpha_n, -i\alpha_k), \quad n, k = 1, 2, 3,$$

$$Q = \det \mathbf{Q}(\boldsymbol{\alpha}).$$

Для вещественных α_k $\det \|a_{mrnk}\alpha_n\alpha_k\| \neq 0$.

Предполагается, что граничные условия удовлетворяют условию дополнительности для эллиптических систем [3].

Для применения в случае неограниченной области изложенного в [1, 2] подхода, основанного на использовании геометрии многообразий, необходимо неограниченную область компактифицировать. Это достигается известными приемами. Применимы либо гомеоморфизм трехмерного пространства трехмерной сферы с присоединенной бесконечно удаленной точкой, в результате которого неограниченная область отображается в ограниченную, либо введением окрестности бесконечно удаленной точки. Для прикладных целей предпочтительнее второй вариант, поэтому считаем, что вводится окрестность бесконечно удаленной точки, описываемая внешностями сфер, радиусы которых стремятся к бесконечности. В случае первого типа областей бесконечно удаленная точка является внутренней, в случае второго — граничной.

При сделанных построениях, вводя топологию, порождаемую евклидовым пространством, будем рассматривать область как ориентированную цепь с ориентированной границей.

Краевая задача исследуется в пространствах медленно растущих обобщенных функций $H_s(\Omega)$ (содержащих также классические), вводимых нормами:

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_s^2 = \sum \|\varphi_r\|_s^2,$$

$$\|\boldsymbol{\varphi}_r\|_s^2 = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} |F\varphi_r|^2 (1 + |\boldsymbol{\alpha}|)^{2s}\, d\boldsymbol{\alpha},$$
$$r = 1, 2, \ldots, M,$$

$$|\boldsymbol{\alpha}|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2, \quad d\boldsymbol{\alpha} = d\alpha_1\, d\alpha_2\, d\alpha_3,$$
$$d\mathbf{x} = dx_1\, dx_2\, dx_3,$$

$$F\varphi_r = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi_r(\mathbf{x}) e^{i\langle\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x}\rangle}\, d\mathbf{x},$$

$$\varphi_r = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} F\varphi_r e^{-i\langle\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x}\rangle}\, d\boldsymbol{\alpha},$$

$$\langle\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}\rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3,$$

$$\mathbf{f} \in \mathrm{H}_\lambda(\Gamma), \quad \lambda > s + 0,5.$$

Для исследования краевой задачи по аналогии с [1] вводится векторная внешняя форма $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x})$, компоненты которой ω_m имеют вид

$$\begin{aligned}
&\omega_m(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}) = R_m dx_1 \Lambda dx_2 + \\
&\quad + Q_m dx_1 \Lambda dx_3 + P_m dx_2 \Lambda dx_3, \\
&P_m = \sum_r e^{i<\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x}>} \Big[a_{mr11}(\partial x_1 \varphi_r - \\
&\quad - i\alpha_1 \varphi_r) - a_{mr12} i\alpha_2 \varphi_r + \\
&\quad + a_{mr13} \partial x_3 \varphi_r + b_{mr1} \varphi_r \Big], \\
&Q_m = -\sum_r e^{i<\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x}>} \Big[a_{mr22}(\partial x_2 \varphi_r - \\
&\quad - i\alpha_2 \varphi_r) - a_{mr23} i\alpha_3 \varphi_r + \\
&\quad + a_{mr12} \partial x_1 \varphi_r + b_{mr2} \varphi_r \Big], \\
&R_m = \sum_r e^{i<\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x}>} \Big[a_{m33}(\partial x_3 \varphi_r - \\
&\quad - i\alpha_3 \varphi_r) - a_{mr13} i\alpha_1 \varphi_r - \\
&\quad - a_{mr23} i\alpha_2 \varphi_r + b_{mr3} \varphi_r \Big].
\end{aligned} \tag{3}$$

2. Вводя топологию, порождаемую евклидовым пространством, будем рассматривать область Ω как ориентированную цепь с границей, ориентация которой индуцируется ориентацией области [4]. Остановимся на случае установившихся гармонических колебаний неограниченной среды. Известно, что в этом случае для обеспечения единственности решение должно удовлетворять в той или иной форме условию излучения Зоммерфельда, требующего выполнения предельного дифференциального соотношения на бесконечности; принципу предельного поглощения Игнатовского, состоящего в переходе к системе без поглощения через систему с искусственным внутренним трением; принципу предельной амплитуды, требующего рассмотрения установившихся колебаний как предельного во времени решения задачи Коши; условию излучения энергии Мандельштама. На примере динамических смешанных задач для неоднородной полосы детальный анализ всех этих условий выполнил И. И. Ворович [5–7]. Им установлено, что при всех аномальных ситуациях, связанных с физикой распространения волн в сложных средах и областях, остаются эквивалентными принципы Игнатовского и Мандельштама. Вследствие этого применение метода факторизации позволяет осуществить отбор единственных решений предельно просто, подобно одномерному случаю. Действительно, в этом случае нули определителя Q($\boldsymbol{\alpha}$) обнаруживаются также и на вещественной оси [4]. Произведя разделение этих нулей по принадлежности к верхней полуплоскости α_{3k}^{+}, если

$$\operatorname{Re} \alpha_{3\text{K}}^{+} \geqslant 0, \quad \operatorname{Im} \alpha_{3\text{K}}^{+} \geqslant 0, \\ -\infty \leqslant \alpha_1, \alpha_2 \leqslant \infty,$$

и к нижней для α_{3k}^{-}, если

$$\operatorname{Re} \alpha_{3\text{K}}^{-} \leqslant 0, \quad \operatorname{Im} \alpha_{3\text{K}}^{-} \leqslant 0,$$

и используя формулы (8), (9) из работы [2], автоматически удовлетворяем требуемым условиям излучения. В случае многозначных функций необходим при вычислении нулей дисперсионного (характеристического) уравнения выбор нужных ветвей.

Используя теорему Стокса в области Ω и допуская, что вектор-функция $\boldsymbol{\varphi}$ обращает в тождество систему дифференциальных уравнений 1, приходим к выражению вида

$$\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{\sigma} \iint Q^{-1}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{D}(\boldsymbol{\alpha}) \times \\ \times \iint_{\Gamma} e^{-i\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x} \rangle} \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}) \, d\alpha_1 \Lambda \, d\alpha_2 \Lambda d\alpha_3,$$

$$\mathbf{Q}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}) = Q^{-1}(\boldsymbol{\alpha}) \mathbf{D}(\boldsymbol{\alpha}), \\ \mathbf{D}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{D}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3),$$

$$\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\omega}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \boldsymbol{\xi}), \quad \boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}.$$

Напомним, что, как и в [2], внешняя форма содержит и соотношения, описывающие заданные граничные условия, и нуждающиеся в определении функции или их нормальные производные со значениями на границе. В том случае, если комбинация производных и функций в граничных условиях (2) не совпадает с естественными, входящими в (3), то производится их формирование в (3) путем прибавления и вычитания необходимых членов до получения левых частей (2) без изменения значения $\boldsymbol{\omega}$. Не повторяя построения, выполненные теми же рассуждениями, что и в [2], вводя новые координаты, строим группу уравнений:

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\gamma}), \quad \boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\},$$

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\eta}), \quad \boldsymbol{\eta} = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\};$$

$$\iint\limits_{\Gamma} \mathbf{D}_k^0(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_{3r}^+)\{e^{i<\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\gamma}),\,\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\eta})>_+}\}_k^+ \times$$
$$\times \boldsymbol{\omega}^0(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_{3r}^+,\boldsymbol{\eta}) = 0, \tag{4}$$
$$r = 1,2,\ldots,M, \quad k = 0,1,2,\ldots,$$
$$\gamma_3 = \gamma_{3r}^+(\gamma_1,\gamma_2), \quad \operatorname{Im}\gamma_{3r}^+(\gamma_1,\gamma_2) > 0.$$

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{2k}^0(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3) &= \\ &= \mathbf{D}^0(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\mathbf{Q}^0(\gamma_1,\gamma_2,-\gamma_3)+ \\ &+ \mathbf{D}^0(\gamma_1,\gamma_2,-\gamma_3)\mathbf{Q}^0(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3), \\ \mathbf{D}_{2k+1}^0(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3) &= \\ &= \mathbf{D}^0(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)\mathbf{Q}^0(\gamma_1,\gamma_2,-\gamma_3)- \\ &- \mathbf{D}^0(\gamma_1,\gamma_2,-\gamma_3)\mathbf{Q}^0(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3).\end{aligned}$$

$\gamma_3 = \gamma_{3r}^{\pm}(\gamma_1,\gamma_2)$ — нулевые множества функции $\mathbf{Q}^0(\gamma_1,\gamma_2,\pm\gamma_3)$ в новых координатах.

Здесь в соответствии с техникой применения обобщенной факторизации [1]:

$$\left\{e^{i\langle\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\gamma}),\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\eta})\rangle}\right\}_k^+ = \\ = \left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty+io}^{\infty+io}\frac{e^{i\langle\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\gamma}),\,\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{\eta})\rangle}}{\gamma_3-\gamma_3^+}\,d\gamma_3\right)_k, \\ \operatorname{Im}\gamma_3^+ > 0. \tag{5}$$

Соотношение (9) из работы [2] в зависимости от представления группы преобразований пространства, диктуемого геометрией локальной зоны границы Γ_2 области Ω, порождает специальные функции, являющиеся компонентами представления группы. Нижний индекс означает номер удерживаемой после факторизации компоненты вектора представления выбранной группы преобразований. Например, в случае групп вращения сферы в трехмерном пространстве $\alpha_1 = \gamma_3\sin\gamma_1\cos\gamma_2$, $\alpha_2 = \gamma_3\sin\gamma_1\sin\gamma_2$, $\alpha_3 = \gamma_3\cos\gamma_1$ возникают функции Бесселя полуцелого индекса и сферические функции.

Таким образом, системы интегральных уравнений (4), (5) приводятся к системе интегральных уравнений вида

$$(\mathbf{I}+\mathbf{A})\mathbf{g} = \mathbf{B}\mathbf{f}. \tag{6}$$

Вектор-функция $\mathbf{g}$ ищется в тех же пространствах, что и в работе [2].

В соответствии со сказанным количество независимых уравнений в (6) может быть равно, меньше или больше числа неизвестных.

Система двумерных интегральных уравнений (6) допускает дискретизацию и приемлема для численного решения.

Основываясь на полученных результатах, доказывается

Теорема. *Пусть геометрические формы, положения в пространстве и смещения поверхностей компонент, входящих в состав материала обеспечивают удовлетворение соотношений (4) для всех* $\gamma_3 = \gamma_{3r}^+(\gamma_1,\gamma_2)$, *кроме* $\gamma_3 = \gamma_{3S}^+(\gamma_1,\gamma_2)$. *Тогда физические свойства материала характеризуются способностью излучать на достаточные расстояния только волны с волновым числом* $\gamma_{3S}^+(\gamma_1,\gamma_2)$.

Литература

1. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Метод факторизации решения некоторых краевых задач // ДАН. 2003. Т. 389. № 2. С. 184–188.
2. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Обобщенная факторизация в краевых задачах в многосвязных областях // ДАН. 2003. Т. 392. № 2. С. 163–167.
3. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. М.: ИЛ, 1962. 208 с.
4. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. Ч. 2. М.: Наука, 1985. 464 с.
5. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости в неограниченных областях. М.: Наука, 1979. 320 с.
6. *Ворович И. И.* Спектральные свойства краевой задачи теории упругости для неоднородной полосы // ДАН СССР. 1979. Т. 245. № 4. С. 817–820.
7. *Ворович И. И.* Резонансные свойства упругой неоднородной полосы // ДАН СССР. 1979. Т. 245. № 5. С. 1076–1079.

Статья поступила 20 марта 2003 г.
Кубанский государственный университет
© 2003 Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Евдокимов С. М.