Механика

УДК 539.3

ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ ПЛАСТИН

А. А. Атоян[1], ***С. О. Саркисян***[2]

DYNAMIC THEORY OF MICROPOLAR ELASTIC THIN PLATES

Atoyan A. A., Sargsyan S. O.

The system of dynamic equations of the asymmetric theory of elasticity with independent fields of displacement and rotation in three-dimensional area of thin plates is considered. On the basis of the asymptotic method of the integration of singular disturbance systems of differential equations the internal iteration process and the boundary layer of the plate have been constructed according to the asymmetric theory of elasticity. For the first asymptotic approximations the defining equations and corresponding boundary and initial conditions of the applied two-dimensional dynamic theory of bending and generalized stress state of micropolar elastic thin plates have been given.

Введение

Изучение динамических процессов в твердых телах с микроструктурой является весьма эффективным средством изучения проблем сейсмологии и геологии, исследования напряженно-деформированного состояния, структуры и свойств современных материалов.

Для описания упругих тел с микроструктурой служит микрополярная моментная несимметричная теория упругости [1–5].

В данной работе излагается асимптотическая динамическая теория микрополярных упругих тонких пластин (теория изгиба и теория обобщенного плоского напряженного состояния) на основе асимптотического метода интегрирования уравнений пространственной динамической задачи несимметричной теории упругости (НТУ) с независимыми полями перемещений и вращений.

1. Пространственная динамическая теория микрополярного упругого тела

Рассмотрим упругую изотропную пластину постоянной толщины $2h$. Будем исходить из основных уравнений пространственной динамической задачи НТУ с независимыми полями перемещений и вращений [2].

Запишем уравнения движения

$$\sigma_{ji,j} = \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad \mu_{ji,j} + э_{ijk}\sigma_{jk} = J\frac{\partial^2 \omega_i}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

физические соотношения

$$\begin{cases} \sigma_{ji} = (\mu+\alpha)\gamma_{ji} + \\ \qquad + (\mu-\alpha)\gamma_{ij} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{ij}, \\ \mu_{ji} = (\gamma+\varepsilon)\chi_{ji} + \\ \qquad + (\gamma-\varepsilon)\chi_{ij} + \beta\chi_{kk}\delta_{ij}, \end{cases} \quad (1.2)$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{ij} = u_{j,i} - э_{kij}\omega_k, \chi_{ij} = \omega_{j,i}, \quad (1.3)$$

где σ_{ij} , μ_{ij} — компоненты силового и моментного тензоров напряжений; γ_{ij}, χ_{ij} — компоненты несимметричного тензора деформаций и тензора изгиба-кручения; $\mathbf{u}$ — вектор перемещения; $\boldsymbol{\omega}$ — вектор независимого поворота точек пластины; λ, μ, α, β, γ, ε — упругие константы материала пластины; $э_{kij}$ — символы Леви–Чивита; запятой в индексах обозначается дифференцирование по соответствующей независимой переменной; $i, j = 1, 2, 3$.

[1]Атоян Арман Ашотович, аспирант Гюмрийского государственного педагогического иститута, Армения.

[2]Саркисян Самвел Оганесович, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений Гюмрийского государственного педагогического института, Армения.

Граничные условия на плоскостях $x_3 = \pm h$ пластины

$$\sigma_{3i} = p_i^{\pm}, \quad \mu_{3i} = m_i^{\pm}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1.4}$$

где $p_i^{\pm}$, $m_i^{\pm}$ — заданные компоненты векторов усилий и моментов на лицевых плоскостях пластины.

Граничные условия на боковой цилиндрической поверхности ($\sum = \sum_1 \cup \sum_2$)

$$\begin{cases} \sigma_{ji} n_j = p_{*i}, \quad \mu_{ji} n_j = m_{*i} \text{ на } \sum\nolimits_1, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_*, \quad \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_* \text{ на } \sum\nolimits_2, \end{cases} \tag{1.5}$$

где p_{*i}, m_{*i} — заданные компоненты векторов усилий и моментов; $\mathbf{u}_*$, $\boldsymbol{\omega}_*$ — заданные векторы перемещений и независимого поворота.

Начальные условия при $t = 0$ задаются для векторов перемещений, поступательной скорости, независимого поворота и угловой скорости.

Решение поставленной задачи (1.1)–(1.5) складывается из суммы решений задачи обобщенного плоского напряженного состояния пластины (симметричной по x_3) и задачи изгиба пластины (обратно-симметричной по x_3). В симметричной задаче четными по x_3 величинами будут σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}, σ_{12}, σ_{21}, μ_{13}, μ_{23}, μ_{31}, μ_{32}, u_1, u_2, ω_3, нечетными — σ_{31}, σ_{13}, σ_{32}, σ_{23}, μ_{11}, μ_{22}, μ_{33}, μ_{12}, μ_{21}, ω_1, ω_2, u_3; в обратно-симметричной задаче — наоборот.

Предполагается, что толщина пластины мала по сравнению с характерным ее размером a в срединной плоскости ($2h \ll a$, $\delta = h/a \ll 1$). Поэтому метод, излагаемый в данной работе, относится к категории методов сингулярных возмущений [6–10]. В основу рассуждений положим свойство напряженно-деформированного состояния (НДС), выражаемое структурной формулой

$$(\text{НДС})_{\text{полн}} = (\text{НДС})_{\text{вн}} + (\text{НДС})_{\text{кр}}. \tag{1.6}$$

В этом равенстве нижними индексами отмечены по НТУ полное, внутреннее (проникающее) и краевое НДС пластины. Предполагается, что краевое НДС пластины имеет квазистатический характер, следовательно, оно возникает вблизи боковой цилиндрической поверхности пластины $\sum$ и быстро (экспоненциально) затухает при удалении от нее в глубь пластины. Что касается внутреннего НДС, то оно в каждом приближении будет описываться двумерными динамическими дифференциальными уравнениями (по переменным x_1 и x_2 и времени t).

При этом основным будет вопрос о приближенных методах расчета $\text{НДС}_{\text{вн}}$ и $\text{НДС}_{\text{кр}}$ пластины по НТУ. Оба метода строятся на базе асимптотического интегрирования трехмерных линейных уравнений (1.1)–(1.3) с учетом соответствующих граничных условий (1.4), (1.5) и заданных начальных условий.

Переходя в (1.1)–(1.3) к безразмерным величинам

$$\begin{aligned} x_1 = a\xi, \quad x_2 = a\eta, \\ x_3 = h\zeta, \quad t = t_0\tau, \end{aligned} \tag{1.7}$$

где $t_0 = \delta^{\omega}\dfrac{h}{C_0}$, $C_0 = \sqrt{\dfrac{E}{\rho}}$, вместо уравнений (1.1)–(1.3) получим сингулярно-возмущенную систему дифференциальных уравнений с малым параметром δ.

Решение внутренней задачи представим в виде асимптотического разложения

$$Q^{\text{вн}} = \delta^{-q} \sum_{s=0}^{S} \delta^s Q^{(s)}, \tag{1.8}$$

где Q — любое из напряжений (силовых и моментных), перемещений и поворотов.

Натуральное число q определяется из условия получения непротиворечивой рекуррентной системы уравнений (после подстановки (1.8) в систему уравнений (1.1)–(1.3) с учетом (1.7) и приравнивания в каждом уравнении к нулю коэффициентов при всех степенях δ.

В результате получим для обратно-симметричной по x_3 задачи

$$\begin{aligned} &q = 1 \text{ для } \sigma_{13}, \sigma_{31}, \sigma_{23}, \sigma_{32}, u_3, \\ &\quad \mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33}, \mu_{12}, \mu_{21}, \omega_1, \omega_2, \\ &q = 0 \text{ для } \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \\ &\quad \mu_{13}, \mu_{31}, \mu_{23}, \mu_{32}, u_1, u_2, \omega_3, \\ &\omega = -1; \end{aligned} \tag{1.9}$$

для симметричной по x_3 задачи

$$\begin{aligned} &q = 2 \text{ для } \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \\ &\quad \mu_{13}, \mu_{31}, \mu_{23}, \mu_{32}, u_1, u_2, \omega_3, \\ &q = 1 \text{ для } \sigma_{13}, \sigma_{31}, \sigma_{23}, \sigma_{32}, u_3, \\ &\quad \mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33}, \mu_{12}, \mu_{21}, \omega_1, \omega_2, \\ &q = 0 \text{ для } \sigma_{33}, \\ &\omega = -1. \end{aligned} \tag{1.10}$$

2. Построение динамической двумерной прикладной теории пластины по НТУ

Так как полученная в асимптотических приближениях система уравнений НТУ допускает интегрирование по переменной ζ, то НДС$_{\text{вн}}$ изменяется по толщине пластины по довольно простому закону.

Остается выяснить роль переменных ξ, η, задающих положение точки на срединной плоскости пластины.

Здесь целесообразно рассматривать вместо силовых и моментных напряжений статически им эквивалентные усилия, моменты и гипермоменты.

Для задачи изгиба пластины по НТУ введем моменты L_{ij}, M_{ij} $(ij : 11, 22, 33, 12, 21)$, усилия N_{mn} и гипермоменты Λ_{mn} $(mn : 13, 31, 23, 32)$ [11]:

$$N_{mn} = \int\limits_{-h}^{h} \sigma_{mn} dx_3, \quad L_{ij} = \int\limits_{-h}^{h} \mu_{ij} dx_3,$$

$$M_{ij} = \int\limits_{-h}^{h} \sigma_{ij} x_3 dx_3, \quad \Lambda_{mn} = \int\limits_{-h}^{h} \mu_{mn} x_3 dx_3.$$

Для расчета НДС$_{\text{вн}}$ асимптотического приближения имеем:
уравнения движения

$$\frac{\partial N_{13}^{(s)}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}^{(s)}}{\partial x_2} = \rho \frac{\partial^2 W^{(s)}}{\partial t^2} - \left(\overset{s+}{p}_3 + \overset{s-}{p}_3 \right),$$

$$\frac{\partial L_{11}^{(s)}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{21}^{(s)}}{\partial x_2} + N_{23}^{(s)} - N_{32}^{(s)} = = J \frac{\partial^2 O_1^{(s)}}{\partial t^2} - \left(\overset{s+}{m}_1 + \overset{s-}{m}_1 \right), \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial L_{12}^{(s)}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{22}^{(s)}}{\partial x_2} + N_{31}^{(s)} - N_{13}^{(s)} = = J \frac{\partial^2 O_2^{(s)}}{\partial t^2} - \left(\overset{s+}{m}_2 + \overset{s-}{m}_2 \right);$$

соотношения упругости

$$\overset{2m(s)}{N}_{13} = \frac{2h^{2m+1}}{2m+1} \left[(\mu + \alpha) \overset{2m(s)}{\Gamma}_{13} + + (\mu - \alpha) \overset{2m(s)}{\Gamma}_{31} \right] (1 \rightleftarrows 3),$$

$$\overset{2m(s)}{N}_{23} = \frac{2h^{2m+1}}{2m+1} \left[(\mu + \alpha) \overset{2m(s)}{\Gamma}_{23} + + (\mu - \alpha) \overset{2m(s)}{\Gamma}_{32} \right] (2 \rightleftarrows 3),$$

$$\overset{2m(s)}{L}_{11} = \frac{2h^{2m+1}}{2m+1} \left[(2\gamma + \beta) \overset{2m(s)}{k}_{11} + + \beta (\overset{2m(s)}{k}_{22} + \overset{2m(s)}{k}_{33}) \right] \quad (2.2)$$

$(11 \to 22 \to 33$ *круг. перест. индексов*$)$,

$$\overset{2m(s)}{L}_{12} = \frac{2h^{2m+1}}{2m+1} \left[(\gamma + \varepsilon) \overset{2m(s)}{k}_{12} + + (\gamma - \varepsilon) \overset{2m(s)}{k}_{21} \right] (1 \rightleftarrows 2);$$

геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \overset{2m(s)}{\Gamma}_{13} &= \frac{\partial \overset{2m(s)}{W}}{\partial x_1} + \overset{2m(s)}{O}_2, \\ \overset{2m(s)}{\Gamma}_{23} &= \frac{\partial \overset{2m(s)}{W}}{\partial x_2} - \overset{2m(s)}{O}_1, \\ \overset{2m(s)}{k}_{11} &= \frac{\partial \overset{2m(s)}{O}_1}{\partial x_1} \ (1 \rightleftarrows 2), \\ \overset{2m(s)}{k}_{12} &= \frac{\partial \overset{2m(s)}{O}_2}{\partial x_1} \ (1 \rightleftarrows 2), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\overset{2m(s)}{W} = \frac{2m+1}{4mh^{2m+1}} \left[(2\mu' + \lambda') \overset{2m-1(s-2)}{M}_{33} + + \lambda' \left(\overset{2m-1(s-2)}{M}_{11} + \overset{2m-1(s-2)}{M}_{22} \right) \right],$$

$$\overset{2m(s)}{O}_1 = \frac{2m+1}{4mh^{2m+1}} \left[(\gamma' + \varepsilon') \overset{2m-1(s-2)}{\Lambda}_{31} + + (\gamma' - \varepsilon') \overset{2m-1(s-2)}{\Lambda}_{13} \right],$$

$$\overset{2m}{O}{}^{(s)}_{2} = \frac{2m+1}{4mh^{2m+1}}\left[(\gamma'+\varepsilon')\overset{2m-1}{\Lambda}{}^{(s-2)}_{32} + \right.$$
$$\left. + (\gamma'-\varepsilon')\overset{2m-1}{\Lambda}{}^{(s-2)}_{23}\right],$$

$$m = 1, 2, \ldots, \left[\frac{s}{2}\right], s \geqslant 2.$$

Следует принимать во внимание, что $P^{(s)} = \sum\limits_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \overset{2m}{P}{}^{(s)}$, где $\left[\frac{s}{2}\right]$ обозначает целую часть соответствующей величины. Кроме того,

$$\overset{0}{p}{}^{\pm}_{3} = p^{\pm}_{3}, \quad \overset{s}{p}{}^{\pm}_{3} = 0 \text{ при } s \geqslant 1,$$

$$\overset{0}{m}{}^{\pm}_{1} = m^{\pm}_{1}, \quad \overset{s}{m}{}^{\pm}_{1} = 0 \text{ при } s \geqslant 1 (1 \to 2),$$

$$N^{(0)}_{31} = h\left(p^{+}_{1} - p^{-}_{1}\right), \quad N^{(1)}_{31} = 0 (1 \to 2),$$

$$L^{(0)}_{33} = h\left(m^{+}_{3} - m^{-}_{3}\right), L^{(1)}_{33} = 0, \quad \text{при } s \geqslant 2,$$

$$N^{(s)}_{31} = \frac{\partial M^{(s-2)}_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M^{(s-2)}_{21}}{\partial x_2} - \rho\frac{\partial^2 \beta^{(s-2)}_{1}}{\partial t^2} \ (1 \rightleftarrows 2),$$

$$L^{(s)}_{33} = \frac{\partial \Lambda^{(s-2)}_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Lambda^{(s-2)}_{23}}{\partial x_2} + M^{(s-2)}_{12} -$$
$$- M^{(s-2)}_{21} - J\frac{\partial^2 \Omega^{(s-2)}_{3}}{\partial t^2}.$$

Отметим, что величины $W^{(s)}(x_1, x_2)$, $O^{(s)}_1(x_1, x_2)$, $O^{(s)}_2(x_1, x_2)$ представляют собой асимптотические приближения соответственно для вертикального перемещения и поворотов вокруг осей x_1 и x_2 точек срединной плоскости пластины.

Величины $M^{(s)}_{ij}$, $K^{(s)}_{ij}$ $(i, j : 11, 22, 33, 12, 21)$; $\Lambda^{(s)}_{mn}$, ι_{mn} $(mn : 13, 31, 23, 32)$, $\beta^{(s)}_1$, $\beta^{(s)}_2$, $\Omega^{(s)}_3$ определяются после решения системы уравнений (2.1)–(2.3) по формулам типа физических соотношений:

$$\overset{2m+1}{M}{}^{(s)}_{11} = \frac{2h^{2m+3}E}{(2m+3)(1-\upsilon^2)} \times$$
$$\times \left(\overset{2m+1}{K}{}^{(s)}_{11} + \upsilon \overset{2m+1}{K}{}^{(s)}_{22}\right) +$$
$$+ \frac{\upsilon}{1-\upsilon} \overset{2m+1}{M}{}^{(s)}_{33} (1 \rightleftarrows 2),$$

$$\overset{2m+1}{M}{}^{(s)}_{12} = \frac{2h^{2m+3}}{2m+3}\left[(\mu+\alpha)\overset{2m+1}{K}{}^{(s)}_{12} + \right.$$
$$\left. + (\mu-\alpha)\overset{2m+1}{K}{}^{(s)}_{21}\right](1 \rightleftarrows 2),$$

$$\overset{2m+1}{\Lambda}{}^{(s)}_{13} = \frac{2h^{2m+3}4\gamma\varepsilon}{(2m+3)(\gamma+\varepsilon)}\overset{2m+1}{\iota}{}^{(s)}_{13} +$$
$$+ \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\overset{2m+1}{\Lambda}{}^{(s)}_{31} (1 \to 2)$$

и формулам типа геометрических соотношений

$$\overset{2m}{\Gamma}{}^{(s)}_{31} = (2m+1)\overset{2m+1}{\beta}{}^{(s)}_{1} - \overset{2m}{O}{}^{(s)}_{2},$$

$$\overset{2m}{\Gamma}{}^{(s)}_{32} = (2m+1)\overset{2m+1}{\beta}{}^{(s)}_{2} + \overset{2m}{O}{}^{(s)}_{1},$$

$$\overset{2m+1}{K}{}^{(s)}_{11} = \frac{\partial \overset{2m+1}{\beta}{}^{(s)}_{1}}{\partial x_1} (1 \to 2),$$

$$\overset{2m}{K}{}^{(s)}_{33} = 2m\overset{2m}{W}{}^{(s)}, \quad \overset{2m}{k}{}^{(s)}_{33} = (2m+1)\overset{2m+1}{\Omega}{}^{(s)}_{3},$$

$$\overset{2m+1}{K}{}^{(s)}_{12} = \frac{\partial \overset{2m+1}{\beta}{}^{(s)}_{2}}{\partial x_1} - \overset{2m+1}{\Omega}{}^{(s)}_{3},$$

$$\overset{2m+1}{K}{}^{(s)}_{21} = \frac{\partial \overset{2m+1}{\beta}{}^{(s)}_{1}}{\partial x_2} + \overset{2m+1}{\Omega}{}^{(s)}_{3},$$

$$\overset{2m+1}{\iota}{}^{(s)}_{13} = \frac{\partial \overset{2m+1}{\Omega}{}^{(s)}_{3}}{\partial x_1} (1 \to 2),$$

$$\overset{2m}{\iota}{}^{(s)}_{31} = 2m\overset{2m}{O}{}^{(s)}_{1} (1 \to 2),$$

где

$$\overset{2m+1}{\beta}{}^{(s)}_{1} = \frac{1}{2h^{2m+1}}\left[(\mu'+\alpha')\overset{2m}{N}{}^{(s)}_{31} + \right.$$
$$\left. + (\mu'-\alpha')\overset{2m}{N}{}^{(s)}_{13}\right] + \frac{1}{2m+1}\overset{2m}{O}{}^{(s)}_{2},$$

$$\overset{2m+1}{\beta}{}^{(s)}_{2} = \frac{1}{2h^{2m+1}}\left[(\mu'+\alpha')\overset{2m}{N}{}^{(s)}_{32} + \right.$$
$$\left. + (\mu'-\alpha')\overset{2m}{N}{}^{(s)}_{23}\right] - \frac{1}{2m+1}\overset{2m}{O}{}^{(s)}_{1},$$

$$\overset{2m+1}{\Omega}{}^{(s)}_{3} = \frac{1}{2h^{2m+1}}\left[(2\gamma'+\beta')\overset{2m}{L}{}^{(s)}_{33} + \right.$$
$$\left. + \beta'\left(\overset{2m}{L}{}^{(s)}_{11} + \overset{2m}{L}{}^{(s)}_{22}\right)\right].$$

Здесь следует учесть, что

$$M^{(0)}_{33} = \frac{h^2}{3}(p^+_3 + p^-_3), \quad M^{(1)}_{33} = 0,$$

$$M^{(s)}_{33} = \sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \overset{2m+1}{M}{}^{(s)}_{33},$$

$$\overset{2m+1}{M}{}^{(s)}_{33} = \frac{h^2}{2m+3}\left[\frac{2h^{2m+1}}{2m+1}\rho\frac{\partial^2 \overset{2m}{W}{}^{(s)}}{\partial t^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial \overset{2m}{N}{}^{(s)}_{13}}{\partial x_1} - \frac{\partial \overset{2m}{N}{}^{(s)}_{23}}{\partial x_2}\right],$$

$$\Lambda^{(0)}_{31} = \frac{h^2}{3}(m^+_1 + m^-_1), \quad \Lambda^{(1)}_{31} = 0,$$

$$\Lambda^{(s)}_{31} = \sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \overset{2m+1}{\Lambda}{}^{(s)}_{31},$$

$$\overset{2m+1}{\Lambda}{}^{(s)}_{31} = \frac{h^2}{2m+3}\left[\frac{2h^{2m+1}}{2m+1}J\frac{\partial^2 \overset{2m}{O}{}^{(s)}_{1}}{\partial t^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial \overset{2m}{L}{}^{(s)}_{11}}{\partial x_1} - \frac{\partial \overset{2m}{L}{}^{(s)}_{21}}{\partial x_2} - \overset{2m}{N}{}^{(s)}_{23} + \overset{2m}{N}{}^{(s)}_{32}\right],$$

$$\Lambda^{(0)}_{32} = \frac{h^2}{3}(m^+_2 + m^-_2), \quad \Lambda^{(1)}_{32} = 0,$$

$$\Lambda^{(s)}_{32} = \sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \overset{2m+1}{\Lambda}{}^{(s)}_{32},$$

$$\overset{2m+1}{\Lambda}{}^{(s)}_{32} = \frac{h^2}{2m+3}\left[\frac{2h^{2m+1}}{2m+1}J\frac{\partial^2 \overset{2m}{O}{}^{(s)}_{2}}{\partial t^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial \overset{2m}{L}{}^{(s)}_{12}}{\partial x_1} - \frac{\partial \overset{2m}{L}{}^{(s)}_{22}}{\partial x_2} - \overset{2m}{N}{}^{(s)}_{31} + \overset{2m}{N}{}^{(s)}_{13}\right].$$

Компоненты вектора перемещения и вектора независимого поворота определяются формулами

$$u_1 = \sum_{s=0}^{S}\sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} x_3^{2m+1}\overset{2m+1}{\beta}{}^{(s)}_{1} \quad (1 \to 2),$$

$$u_3 = \sum_{s=0}^{S}\sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} x_3^{2m}\overset{2m}{W}{}^{(s)},$$

$$\omega_1 = \sum_{s=0}^{S}\sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} x_3^{2m}\overset{2m}{O}{}^{(s)}_{1} \quad (1 \to 2),$$

$$\omega_3 = \sum_{s=0}^{S}\sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} x_3^{2m+1}\overset{2m+1}{\Omega}{}^{(s)}_{3},$$

а компоненты силового и моментного тензоров напряжений, компоненты несимметричного тензора деформаций и тензора изгиба-кручения — выражениями

$$\sigma_{ij} = \sum_{s=0}^{S}\sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \frac{2m+3}{2h^{2m+3}} x_3^{2m+1}\overset{2m+1}{M}{}^{(s)}_{ij},$$

$$\mu_{ij} = \sum_{s=0}^{S}\sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \frac{2m+1}{2h^{2m+1}} x_3^{2m}\overset{2m}{L}{}^{(s)}_{ij},$$

$$\gamma_{ij} = \sum_{s=0}^{S}\sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} x_3^{2m+1}\overset{2m+1}{K}{}^{(s)}_{ij},$$

$$\chi_{ij} = \sum_{s=0}^{S}\sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} x_3^{2m}\overset{2m}{k}{}^{(s)}_{ij}$$
$$(ij : 11, 22, 33, 12, 21).$$

В приведенных далее формулах круговая перестановка индексов $(1 \rightleftarrows 3, 1 \to 2, 2 \rightleftarrows 3)$.

$$\sigma_{13} = \sum_{s=0}^{S}\sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \frac{2m+1}{2h^{2m+1}} x_3^{2m}\overset{2m}{N}{}^{(s)}_{13},$$

$$\mu_{13} = \sum_{s=0}^{S}\sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \frac{2m+3}{2h^{2m+3}} x_3^{2m+1}\overset{2m+1}{\Lambda}{}^{(s)}_{13},$$

$$\gamma_{13} = \sum_{s=0}^{S}\sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} x_3^{2m}\overset{2m}{\Gamma}{}^{(s)}_{13},$$

$$\chi_{13} = \sum_{s=0}^{S} \sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} x_3^{2m+1} \overset{2m+1}{\iota}{}^{(s)}_{13}.$$

Для задачи обобщенного плоского напряженного состояния пластины по НТУ рассмотрим следующие осредненные по толщине пластины силовые и моментные характеристики [12] — усилия $T_{ii}(i = 1, 2, 3)$, $S_{12}(1 \rightleftarrows 2)$, моменты L_{i3}, $M_{i3}(i \rightleftarrows 3)$, $(i = 1, 2)$, гипермоменты $\Lambda_{mn}(mn : 11, 22, 33, 12, 21)$:

$$T_{ii} = \int_{-h}^{h} \sigma_{ii} dx_3, \quad S_{12} = \int_{-h}^{h} \sigma_{12} dx_3,$$

$$L_{i3} = \int_{-h}^{h} \mu_{i3} dx_3,$$

$$M_{i3} = \int_{-h}^{h} \sigma_{i3} x_3 dx_3, \Lambda_{mn} = \int_{-h}^{h} \mu_{mn} x_3 dx_3.$$

Для расчета НДС$_{\text{вн}}$ по НТУ данной задачи имеем:
уравнения движения

$$\frac{\partial T_{11}^{(s)}}{\partial x_1} + \frac{\partial S_{21}^{(s)}}{\partial x_2} = \rho \frac{\partial^2 V_1^{(s)}}{\partial t^2} - \left(\overset{s+}{p}_1 + \overset{s-}{p}_1 \right),$$

$$\frac{\partial S_{12}^{(s)}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}^{(s)}}{\partial x_2} = \rho \frac{\partial^2 V_2^{(s)}}{\partial t^2} - \left(\overset{s+}{p}_2 + \overset{s-}{p}_2 \right), \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial L_{13}^{(s)}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{23}^{(s)}}{\partial x_2} + \left(S_{12}^{(s)} - S_{21}^{(s)} \right) = \\ = J \frac{\partial^2 O_3^{(s)}}{\partial t^2} - \left(\overset{s+}{m}_3 + \overset{s-}{m}_3 \right);$$

соотношения упругости

$$\overset{2m}{T}{}^{(s)}_{11} = \frac{2h^{2m+1}}{2m+1} \frac{E}{1-\upsilon^2} \left[\overset{2m}{\Gamma}{}^{(s)}_{11} + \upsilon \overset{2m}{\Gamma}{}^{(s)}_{22} \right] + \\ + \frac{\upsilon}{1-\upsilon} \overset{2m}{T}{}^{(s-2)}_{33} (1 \rightleftarrows 2),$$

$$\overset{2m}{S}{}^{(s)}_{12} = \frac{2h^{2m+1}}{2m+1} \left[(\mu + \alpha) \overset{2m}{\Gamma}{}^{(s)}_{12} + \\ + (\mu - \alpha) \overset{2m}{\Gamma}{}^{(s)}_{21} \right] (1 \rightleftarrows 2), \quad (2.5)$$

$$\overset{2m}{L}{}^{(s)}_{13} = \frac{2h^{2m+1}}{2m+1} \left[(\gamma + \varepsilon) \overset{2m}{k}{}^{(s)}_{13} + \\ + (\gamma - \varepsilon) \overset{2m}{k}{}^{(s)}_{31} \right] (1 \to 2, 3 \rightleftarrows 1, 1 \to 2);$$

геометрические соотношения

$$\begin{aligned} \overset{2m}{\Gamma}{}^{(s)}_{11} &= \frac{\partial \overset{2m}{V}{}^{(s)}_{1}}{\partial x_1} (1 \to 2), \\ \overset{2m}{\Gamma}{}^{(s)}_{12} &= \frac{\partial \overset{2m}{V}{}^{(s)}_{2}}{\partial x_1} - \overset{2m}{O}{}^{(s)}_{3}, \\ \overset{2m}{\Gamma}{}^{(s)}_{21} &= \frac{\partial \overset{2m}{V}{}^{(s)}_{1}}{\partial x_2} + \overset{2m}{O}{}^{(s)}_{3}, \\ \overset{2m}{k}{}^{(s)}_{13} &= \frac{\partial \overset{2m}{O}{}^{(s)}_{3}}{\partial x_1} (1 \rightleftarrows 2), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$\overset{2m}{V}{}^{(s)}_{1} = \frac{2m+1}{4m \cdot h^{2m+1}} \left[(\mu' + \alpha') \overset{2m-1}{M}{}^{(s-2)}_{31} + \\ + (\mu' - \alpha') \overset{2m-1}{M}{}^{(s-2)}_{13} \right] + \frac{1}{2m} \overset{2m-1}{\Omega}{}^{(s-2)}_{2},$$

$$\overset{2m}{V}{}^{(s)}_{2} = \frac{2m+1}{4m \cdot h^{2m+1}} \left[(\mu' + \alpha') \overset{2m-1}{M}{}^{(s-2)}_{32} + \\ + (\mu' - \alpha') \overset{2m-1}{M}{}^{(s-2)}_{23} \right] - \frac{1}{2m} \overset{2m-1}{\Omega}{}^{(s-2)}_{1},$$

$$\overset{2m}{O}{}^{(s)}_{3} = \frac{2m+1}{4m \cdot h^{2m+1}} \left[(2\gamma' + \beta') \overset{2m-1}{\Lambda}{}^{(s-2)}_{33} + \\ + \beta' \left(\overset{2m-1}{\Lambda}{}^{(s-2)}_{11} + \overset{2m-1}{\Lambda}{}^{(s-2)}_{22} \right) \right],$$

$$m = 1, 2, \ldots, \left[\frac{s}{2} \right], \quad s \geqslant 2.$$

Здесь необходимо учесть, что $\overset{0}{p}{}^{\pm}_1 = p_1^{\pm}$, $\overset{s}{p}{}^{\pm}_1 = 0$ при $s \geqslant 1$, $(1 \to 2)$,

$$\overset{0}{m}{}^{\pm}_3 = m_3^{\pm}, \quad \overset{s}{m}{}^{\pm}_3 = 0 \text{ при } s \geqslant 1,$$

$$L_{31}^{(0)} = h(m_1^+ - m_1^-), \quad L_{31}^{(1)} = 0,$$

$$L_{32}^{(0)} = h(m_2^+ - m_2^-), \quad L_{32}^{(1)} = 0 \text{ при } s \geqslant 2,$$

$$L_{31}^{(s)} = \frac{\partial \Lambda_{11}^{(s-2)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Lambda_{21}^{(s-2)}}{\partial x_2} + M_{23}^{(s-2)} - \\ - M_{32}^{(s-2)} - J\frac{\partial^2 \Omega_1^{(s-2)}}{\partial t^2},$$

$$L_{32}^{(s)} = \frac{\partial \Lambda_{12}^{(s-2)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Lambda_{22}^{(s-2)}}{\partial x_2} + M_{31}^{(s-2)} - \\ - M_{13}^{(s-2)} - J\frac{\partial^2 \Omega_2^{(s-2)}}{\partial t^2}.$$

Отметим, что $V_1^{(s)}(x_1, x_2)$, $V_2^{(s)}(x_1, x_2)$, $O_3^{(s)}(x_1, x_2)$ представляют собой асимптотические приближения для тангенциальных перемещений и независимого поворота вокруг оси x_3 точек срединной плоскости пластины.

После решения системы (2.4)–(2.6) величины $M_{ij}^{(s)}$, $K_{ij}^{(s)}$ $(ij = 13, 31, 23, 32)$; $T_{33}^{(s)}$; $\Lambda_{mn}^{(s)}$, ι_{mn} $(mn = 11, 22, 33, 12, 21)$; $\beta_3^{(s)}$, $\Omega_1^{(s)}$, $\Omega_2^{(s)}$, находят по формулам типа физических соотношений

$$\overset{2m+1}{M}{}_{13}^{(s)} = \frac{2h^{2m+3}}{2m+3}\frac{4\mu\alpha}{\mu+\alpha}\overset{2m+1}{K}{}_{13}^{(s)} + \\ + \frac{\mu-\alpha}{\mu+\alpha}\overset{2m+1}{M}{}_{31}^{(s)}(1 \to 2),$$

$$\overset{2m+1}{\Lambda}{}_{12}^{(s)} = \frac{2h^{2m+3}}{2m+3}\Big[(\gamma+\varepsilon)\overset{2m+1}{\iota}{}_{12}^{(s)} + \\ + (\gamma-\varepsilon)\overset{2m+1}{\iota}{}_{21}^{(s)}\Big](1 \rightleftarrows 2),$$

$$\overset{2m+1}{\Lambda}{}_{11}^{(s)} = \frac{2h^{2m+3}}{2m+3}\frac{2\gamma}{\beta+2\gamma} \\ \left[2(\beta+\gamma)\overset{2m+1}{\iota}{}_{11}^{(s)} + \beta\overset{2m+1}{\iota}{}_{22}^{(s)}\right] + \\ + \frac{\beta}{\beta+2\gamma}\overset{2m+1}{\Lambda}{}_{33}^{(s)}(1 \rightleftarrows 2),$$

учитывая при этом

$$M_{31}^{(0)} = \frac{h^2}{3}(p_1^+ + p_1^-), \quad M_{31}^{(1)} = 0,$$

$$M_{31}^{(s)} = \sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \overset{2m+1}{M}{}_{31}^{(s)},$$

$$\overset{2m+1}{M}{}_{31}^{(s)} = \frac{2h^{2m+3}}{(2m+3)(2m+1)}\rho\frac{\partial^2 \overset{2m}{V}{}_1^{(s)}}{\partial t^2} - \\ - \frac{h^2}{2m+3}\left[\frac{\partial \overset{2m}{T}{}_{11}^{(s)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \overset{2m}{S}{}_{21}^{(s)}}{\partial x_2}\right](1 \overset{\leftarrow}{\rightarrow} 2),$$

$$\Lambda_{33}^{(0)} = \frac{h^2}{3}\left(m_3^+ + m_3^-\right), \Lambda_{33}^{(1)} = 0,$$

$$\Lambda_{33}^{(s)} = \sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \overset{2m+1}{\Lambda}{}_{33}^{(s)},$$

$$\overset{2m+1}{\Lambda}{}_{33}^{(s)} = \frac{2h^{2m+3}}{(2m+3)(2m+1)}J\frac{\partial^2 \overset{2m}{O}{}_3^{(s)}}{\partial t^2} - \\ - \frac{h^2}{2m+3}\left[\frac{\partial \overset{2m}{L}{}_{13}^{(s)}}{\partial x_1} + \frac{\partial \overset{2m}{L}{}_{23}^{(s)}}{\partial x_2} + \left(\overset{2m}{S}{}_{12}^{(s)} - \overset{2m}{S}{}_{21}^{(s)}\right)\right],$$

$$T_{33}^{(s)} = \frac{\partial M_{13}^{(s)}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{23}^{(s)}}{\partial x_2} - \rho\frac{\partial^2 \beta_3^{(s)}}{\partial t^2} + h\left(\overset{s+}{p}_3^{(s)} - \overset{s-}{p}_3^{(s)}\right),$$

и формулам типа геометрических соотношений

$$\overset{2m}{\Gamma}{}_{33}^{(s)} = (2m+1)\overset{2m+1}{\beta}{}_3^{(s)},$$

$$\overset{2m+1}{K}{}_{13}^{(s)} = \frac{\partial \overset{2m+1}{\beta}{}_3^{(s)}}{\partial x_1} + \overset{2m+1}{\Omega}{}_2^{(s)},$$

$$\overset{2m+1}{K}{}_{23}^{(s)} = \frac{\partial \overset{2m+1}{\beta}{}_3^{(s)}}{\partial x_2} - \overset{2m+1}{\Omega}{}_1^{(s)},$$

$$\overset{2m}{K}{}_{31}^{(s)} = 2m\overset{2m}{V}{}_1^{(s)}(1 \to 2),$$

$$\overset{2m}{k}{}_{31}^{(s)} = (2m+1)\overset{2m+1}{\Omega}{}_1^{(s)}(1 \to 2),$$

$$\overset{2m+1}{\iota}{}_{11}^{(s)} = \frac{\partial \overset{2m+1}{\Omega}{}_1^{(s)}}{\partial x_1}(1 \to 2),$$

$$\overset{2m+1}{\iota}{}_{12}^{(s)} = \frac{\partial \overset{2m+1}{\Omega}{}_2^{(s)}}{\partial x_1}(1 \rightleftarrows 2),$$

$$\overset{2m}{\iota}{}_{33}^{(s)} = 2m\overset{2m}{O}{}_3^{(s)},$$

$$\overset{2m}{E}{}_{31}^{(s)} = -\overset{2m+1}{\Omega}{}_2^{(s)}, \quad \overset{2m}{E}{}_{32}^{(s)} = \overset{2m+1}{\Omega}{}_1^{(s)},$$

где

$$\overset{2m+1}{\beta}{}_3^{(s)} = \frac{1}{2h^{2m+1}}\left[(2\mu'+\lambda')\overset{2m}{T}{}_{33}^{(s-2)} + \right.$$
$$\left. + \lambda'\left(\overset{2m}{T}{}_{11}^{(s)} + \overset{2m}{T}{}_{22}^{(s)}\right)\right],$$

$$\overset{2m+1}{\Omega}{}_1^{(s)} = \frac{1}{2h^{2m+1}}\left[(\gamma'+\varepsilon')\overset{2m}{L}{}_{31}^{(s)} + \right.$$
$$\left. + (\gamma'-\varepsilon')\overset{2m}{L}{}_{13}^{(s)}\right],$$

$$\overset{2m+1}{\Omega}{}_2^{(s)} = \frac{1}{2h^{2m+1}}\left[(\gamma'+\varepsilon')\overset{2m}{L}{}_{32}^{(s)} + \right.$$
$$\left. + (\gamma'-\varepsilon')\overset{2m}{L}{}_{23}^{(s)}\right].$$

Компоненты вектора перемещения и вектора независимого поворота определяются формулами

$$u_1 = \sum_{s=0}^{S}\sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} x_3^{2m}\overset{2m}{V}{}_1^{(s)} \quad (1\to 2),$$

$$u_3 = \sum_{s=0}^{S}\sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} x_3^{2m+1}\overset{2m+1}{\beta}{}_3^{(s)},$$

$$\omega_1 = \sum_{s=0}^{S}\sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} x_3^{2m+1}\overset{2m+1}{\Omega}{}_1^{(s)} \quad (1\to 2),$$

$$\omega_3 = \sum_{s=0}^{S}\sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} x_3^{2m}\overset{2m}{O}{}_3^{(s)},$$

а компоненты силового и моментного тензоров напряжений, компоненты несимметричного тензора деформаций и тензора изгиба-кручения выражениями

$$\sigma_{13} = \sum_{s=0}^{S}\sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \frac{2m+3}{2h^{2m+3}} x_3^{2m+1}\overset{2m+1}{M}{}_{13}^{(s)},$$

$$\mu_{13} = \sum_{s=0}^{S}\sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \frac{2m+1}{2h^{2m+1}} x_3^{2m}\overset{2m}{L}{}_{13}^{(s)},$$

$$\chi_{13} = \sum_{s=0}^{S}\sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} x_3^{2m}\overset{2m}{k}{}_{13}^{(s)}$$
$$(1 \rightleftarrows 3, 1\to 2, 2\rightleftarrows 3);$$

$$\sigma_{11} = \sum_{s=0}^{S}\sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \frac{2m+1}{2h^{2m+1}} x_3^{2m}\overset{2m}{T}{}_{11}^{(s)},$$

$$\gamma_{13} = \sum_{s=0}^{S}\sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} x_3^{2m+1}\overset{2m+1}{K}{}_{13}^{(s)},$$

$$\gamma_{31} = \sum_{s=0}^{S}\sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \left[x_3^{2m+1}\overset{2m+1}{E}{}_{31}^{(s)} + x_3^{2m-1}\overset{2m}{K}{}_{31}^{(s)}\right]$$
$$(1\to 2);$$

$$\sigma_{12} = \sum_{s=0}^{S}\sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \frac{2m+1}{2h^{2m+1}} x_3^{2m}\overset{2m}{S}{}_{12}^{(s)} (1\rightleftarrows 2),$$

$$\sigma_{33} = \sum_{s=0}^{S}\sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}+1\right]} \frac{2m+1}{2h^{2m+1}} x_3^{2m}\overset{2m}{T}{}_{33}^{(s)},$$

$$\mu_{ij} = \sum_{s=0}^{S}\sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} \frac{2m+3}{2h^{2m+3}} x_3^{2m+1}\overset{2m+1}{\Lambda}{}_{ij}^{(s)},$$

$$\gamma_{ij} = \sum_{s=0}^{S}\sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} x_3^{2m}\overset{2m}{\Gamma}{}_{ij}^{(s)},$$

$$\chi_{ij} = \sum_{s=0}^{S}\sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{2}\right]} x_3^{2m+1}\overset{2m+1}{\iota}{}_{ij}^{(s)}$$
$$(ij: 11, 22, 33, 12, 21).$$

3. Квазистатический погранслой по НТУ и сращивание асимптотических разложений

Вблизи боковой поверхности пластины возникает напряженное состояние погранслоя по НТУ, которое в квазистатическом приближении резко затухает при удалении от нее в глубь тела трехмерной пластины. Введение этого напряженного состояния по НТУ дает возможность удовлетворить граничным условиям на боковой поверхности и определить напряженное состояние вблизи края.

Введем триортогональную криволинейную систему координат $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$ так, чтобы боковая цилиндрическая поверхность пластины совмещалась с координатной поверхностью $\alpha_1 = \alpha_{10}$.

Погранслой около края $\alpha_1 = \alpha_{10}$ имеет большую изменяемость в направлении α_1 и α_3, а в направлении α_2 и во времени имеет ту же изменяемость, что и внутреннее напряженное состояние.

В уравнениях (1.1)–(1.3), записанных в координатах α_i, сделаем замены

$$\begin{gathered}\alpha_1 - \alpha_{10} = h\xi_1, \quad \alpha_2 = a\eta, \\ \alpha_3 = h\zeta, \quad t = t_0\tau\end{gathered} \tag{3.1}$$

и перейдем к безразмерным перемещениям и силовым, моментным напряжениям, которые в дальнейшем обозначаются черточками. Кроме того, коэффициенты Ляме и геодезические кривизны координатных линий α_1 и α_2 криволинейной системы координат представим в виде ряда Тейлора вблизи значения $\alpha_1 = \alpha_{10}$.

Решение преобразованных уравнений (1.1)–(1.3) ищем в виде

$$R = \sum_{s=0}^{S} \delta^{\chi_R + s} \cdot R^{(s)}, \tag{3.2}$$

где R — любое из безразмерных силовых и моментных напряжений, перемещений и независимых поворотов. Так как силовые и моментные неоднородные условия (1.4), заданные на лицевых плоскостях пластины $\zeta = \pm 1$, были удовлетворены решением внутренней задачи, то решение (3.2) должно удовлетворять на плоскостях $\zeta = \pm 1$ однородным граничным условиям

$$\begin{gathered}\bar{\sigma}_{31} = \bar{\sigma}_{32} = \bar{\sigma}_{33} = 0, \\ \bar{\mu}_{31} = \bar{\mu}_{32} = \bar{\mu}_{33} = 0 \text{ при } \zeta = \pm 1.\end{gathered}$$

После подстановки (3.2) в преобразованную с помощью (3.1) систему (1.1)–(1.3) и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра δ в правых и левых частях получим систему рекуррентных уравнений относительно $R^{(s)}$.

Представив

$$\bar{\sigma}_{ij} = \delta^{\chi} \sum_{s=0}^{S} \delta^s \sigma_{ij}^{(s)}, \quad \bar{\mu}_{ij} = \delta^{\chi} \sum_{s=0}^{S} \delta^s \mu_{ij}^{(s)},$$

$$\bar{u}_i = \delta^{\chi+1} \sum_{s=0}^{S} \delta^s v_i^{(s)}, \quad \omega_i = \delta^{\chi+1} \sum_{s=0}^{S} \delta^s \omega_i^{(s)},$$

где целое число χ характеризует интенсивность погранслоя, запишем эту систему уравнений для асимптотических приближений s в следующем виде:

а)

$$\frac{\partial \sigma_{11}^{(s)}}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{31}^{(s)}}{\partial \zeta} = R_1^{(s-1)},$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}^{(s)}}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{33}^{(s)}}{\partial \zeta} = R_2^{(s-1)},$$

$$\frac{\partial v_1^{(s)}}{\partial t} = \left(2\mu' + \lambda'\right) \sigma_{11}^{(s)} + \lambda' \left(\sigma_{22}^{(s)} + \sigma_{33}^{(s)}\right) + R_3^{(s-1)},$$

$$\begin{aligned} 0 = \left(2\mu' + \lambda'\right) \sigma_{22}^{(s)} + \\ + \lambda' \left(\sigma_{11}^{(s)} + \sigma_{33}^{(s)}\right) + R_4^{(s-1)}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial v_3^{(s)}}{\partial \zeta} = \left(2\mu' + \lambda'\right) \sigma_{33}^{(s)} + \lambda' \left(\sigma_{11}^{(s)} + \sigma_{22}^{(s)}\right),$$

$$\frac{\partial v_3^{(s)}}{\partial t} = \left(\mu' + \alpha'\right) \sigma_{13}^{(s)} + \left(\mu' - \alpha'\right) \sigma_{31}^{(s)} + R_5^{(s-1)},$$

$$\frac{\partial v_1^{(s)}}{\partial \zeta} = \left(\mu' + \alpha'\right) \sigma_{31}^{(s)} + \left(\mu' - \alpha'\right) \sigma_{13}^{(s)} + R_6^{(s-1)};$$

б)

$$\frac{\partial \mu_{12}^{(s)}}{\partial t} + \frac{\partial \mu_{32}^{(s)}}{\partial \zeta} = R_7^{(s-1)},$$

$$\frac{\partial \omega_2^{(s)}}{\partial t} = \left(\gamma' + \varepsilon'\right) \mu_{12}^{(s)} + \left(\gamma' - \varepsilon'\right) \mu_{21}^{(s)} + R_8^{(s-1)},$$

$$0 = \left(\gamma' + \varepsilon'\right) \mu_{21}^{(s)} + \left(\gamma' - \varepsilon'\right) \mu_{12}^{(s)} + R_9^{(s-1)}, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial \omega_2^{(s)}}{\partial \zeta} = \left(\gamma' + \varepsilon'\right) \mu_{32}^{(s)} + \left(\gamma' - \varepsilon'\right) \mu_{23}^{(s)},$$

$$0 = \left(\gamma' + \varepsilon'\right) \mu_{23}^{(s)} + \left(\gamma' - \varepsilon'\right) \mu_{32}^{(s)} + R_{10}^{(s-1)};$$

в)

$$\frac{\partial \sigma_{12}^{(s)}}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{32}^{(s)}}{\partial \zeta} = \tilde{R}_1^{(s-1)},$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}_2^{(s)}}{\partial t} = \left(\mu' + \alpha'\right) \sigma_{12}^{(s)} + \left(\mu' - \alpha'\right) \sigma_{21}^{(s)} + \tilde{R}_2^{(s-1)},$$

$$0 = \left(\mu' + \alpha'\right) \sigma_{21}^{(s)} + \\ + \left(\mu' - \alpha'\right) \sigma_{12}^{(s)} + \tilde{R}_3^{(s-1)}, \quad (3.5)$$

$$0 = \left(\mu' + \alpha'\right) \sigma_{23}^{(s)} + \left(\mu' - \alpha'\right) \sigma_{32}^{(s)} + \tilde{R}_4^{(s-1)},$$

$$\frac{\partial v_2^{(s)}}{\partial \zeta} = \left(\mu' + \alpha'\right) \sigma_{32}^{(s)} + \left(\mu' - \alpha'\right) \sigma_{23}^{(s)} + \tilde{R}_5^{(s-1)};$$

г)

$$\frac{\partial \mu_{11}^{(s)}}{\partial t} + \frac{\partial \mu_{31}^{(s)}}{\partial \zeta} = \tilde{R}_6^{(s-1)},$$

$$\frac{\partial \mu_{13}^{(s)}}{\partial t} + \frac{\partial \mu_{33}^{(s)}}{\partial \zeta} = \tilde{R}_7^{(s-1)},$$

$$\frac{\partial \omega_1^{(s)}}{\partial t} = \left(2\gamma' + \beta'\right) \mu_{11}^{(s)} + \\ + \beta' \left(\mu_{22}^{(s)} + \mu_{33}^{(s)}\right) + \tilde{R}_8^{(s-1)},$$

$$0 = \left(2\gamma' + \beta'\right) \mu_{22}^{(s)} + \\ + \beta' \left(\mu_{11}^{(s)} + \mu_{33}^{(s)}\right) + \tilde{R}_9^{(s-1)}, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \omega_3^{(s)}}{\partial \zeta} = \left(2\gamma' + \beta'\right) \mu_{33}^{(s)} + \beta' \left(\mu_{11}^{(s)} + \mu_{22}^{(s)}\right),$$

$$\frac{\partial \omega_3^{(s)}}{\partial t} = \left(\gamma' + \varepsilon'\right) \mu_{13}^{(s)} + \left(\gamma' - \varepsilon'\right) \mu_{31}^{(s)} + \tilde{R}_{10}^{(s-1)},$$

$$\frac{\partial \omega_1^{(s)}}{\partial \zeta} = \left(\gamma' + \varepsilon'\right) \mu_{31}^{(s)} + \left(\gamma' - \varepsilon'\right) \mu_{13}^{(s)}.$$

При $s = 0$ уравнения систем (3.3)–(3.6) однородны, независимы и совпадают с соответствующими системами уравнений погранслоя статической задачи НТУ для пластины [15].

Таким образом, определение квазистатического погранслоя в динамической задаче НТУ, как и в статике [15], распадается на решение задач силового (плоского и антиплоского) и моментного (плоского и антиплоского) случаев для полуполосы. В работе [15] построены и подробно изучены силовые и моментные плоские и антиплоские погранслои статической задачи НТУ для тонких пластин. Для каждого из указанных погранслоев при любом s построено решение в виде функционального ряда.

Следовательно, проблему раздельного построения дифференциальных уравнений внутренней задачи и квазистатических погранслоев в динамической теории пластин по НТУ можно считать решенной и на основе структурной формулы (1.6) общее решение поставленной краевой задачи НТУ (1.1)–(1.5) представить в виде

$$J = \delta^{-q+s} \overset{\text{вн}(s)}{Q} + \delta^{\chi+s} \overset{a\,(s)}{R} + \delta^{\mu+s} \overset{p\,(s)}{R}, \quad (3.7)$$

где целые числа χ и μ характеризуют интенсивности соответственно для антиплоского и плоского погранслоев (по повторяющемуся индексу s следует подразумевать суммирование от 0 до s). Величины χ и μ подбираются с учетом удовлетворения граничным условиям НТУ (1.5).

Перейдем теперь к проблеме разделения трехмерных граничных условий НТУ на $\sum$ и выясним, какие граничные условия надо приписывать к внутренним, а какие к погранслойным дифференциальным уравнениям НТУ на каждом уровне асимптотического приближения.

Чтобы осуществить задачу сращивания решения внутренней задачи с решениями всех четырех типов квазистатических погранслоев, необходимо конкретизировать заданные на $\sum$ граничные условия НТУ. Для этого рассмотрим случай, когда на всей боковой поверхности пластины ($\alpha_1 = \alpha_{10}$) заданы пространственные граничные условия первого рода ($\sum_1 \equiv \sum, \sum_2 \equiv 0$).

Чтобы удовлетворить граничным условиям, подставим (3.7) в (1.5) и приравняем к нулю коэффициенты при соответствующих степенях δ.

Граничные условия в итерациях имеют такой же вид, как и в статике [15] и $\chi = \mu = -1$ для задачи изгиба, $\chi = \mu = -2$ для задачи плоского напряженного состояния. Отсюда следует, что двумерным динамическим уравнениям внутренней задачи по НТУ (при $s = 0$, $s = 1$, $s = 2$) соответствуют те же граничные условия, что и в статике [15].

Теперь для каждого асимптотического приближения приведем уравнения и граничные условия для НДС$_{\text{вн}}$ пластины.

Для задачи изгиба пластины по НТУ при $s = 0$ имеем:

уравнения движения

$$\frac{\partial N_{13}^{(0)}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{23}^{(0)}}{\partial x_2}=\rho\frac{\partial^2 W^{(0)}}{\partial t^2}-\left(p_3^+ + p_3^-\right),$$

$$\frac{\partial L_{11}^{(0)}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{21}^{(0)}}{\partial x_2}+N_{23}^{(0)}-N_{32}^{(0)}= J\frac{\partial^2 O_1^{(0)}}{\partial t^2}-\left(m_1^+ + m_1^-\right), \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial L_{12}^{(0)}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{22}^{(0)}}{\partial x_2}+N_{31}^{(0)}-N_{13}^{(0)}= = J\frac{\partial^2 O_2^{(0)}}{\partial t^2}-\left(m_2^+ + m_2^-\right);$$

соотношения упругости

$$\overset{0}{N}{}_{13}^{(0)}=2h\left[(\mu+\alpha)\overset{0}{\Gamma}{}_{13}^{(0)}+(\mu-\alpha)\overset{0}{\Gamma}{}_{31}^{(0)}\right](1\leftrightarrows 3),$$

$$\overset{0}{N}{}_{23}^{(0)}=2h\left[(\mu+\alpha)\overset{0}{\Gamma}{}_{23}^{(0)}+(\mu-\alpha)\overset{0}{\Gamma}{}_{32}^{(0)}\right](2\leftrightarrows 3),$$

$$\overset{0}{L}{}_{11}^{(0)}=2h\left[(2\gamma+\beta)\overset{0}{k}{}_{11}^{(0)}+ + \beta\left(\overset{0}{k}{}_{22}^{(0)}+\overset{0}{k}{}_{33}^{(0)}\right)\right] \quad (3.9)$$

$$\left(\begin{array}{c}11\to 22\to 33\\ \textit{круг. перест. индексов}\end{array}\right),$$

$$\overset{0}{L}{}_{12}^{(0)}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)\overset{0}{k}{}_{12}^{(0)}+(\gamma-\varepsilon)\overset{0}{k}{}_{21}^{(0)}\right](1\leftrightarrows 2);$$

геометрические соотношения

$$\begin{aligned}\overset{0}{\Gamma}{}_{13}^{(0)}&=\frac{\partial \overset{0}{W}{}^{(0)}}{\partial x_1}+\overset{0}{O}{}_2^{(0)},\\ \overset{0}{\Gamma}{}_{23}^{(0)}&=\frac{\partial \overset{0}{W}{}^{(0)}}{\partial x_2}-\overset{0}{O}{}_1^{(0)},\\ \overset{0}{k}{}_{11}^{(0)}&=\frac{\partial \overset{0}{O}{}_1^{(0)}}{\partial x_1}(1\rightleftarrows 2),\\ \overset{0}{k}{}_{12}^{(0)}&=\frac{\partial \overset{0}{O}{}_2^{(0)}}{\partial x_1}(1\rightleftarrows 2),\end{aligned} \quad (3.10)$$

граничные условия при $\alpha_1=\alpha_{10}$

$$N_{13}^{(0)}=\int\limits_{-h}^{h}p_3^*\,d\alpha_3,\quad L_{11}^{(0)}=\int\limits_{-h}^{h}m_1^*\,d\alpha_3, \quad (3.11)$$

$$L_{12}^{(0)}=\int\limits_{-h}^{h}m_2^* d\alpha_3.$$

Начальные условия задаются для перемещений, линейных скоростей, независимых поворотов и угловых скоростей точек срединной плоскости пластины.

Отметим, что дифференциальный оператор системы уравнений (3.8)–(3.10) является гиперболическим.

Для задачи обобщенного плоского напряженного состояния пластинки по НТУ при $s=0$ имеем:

уравнения движения

$$\frac{\partial T_{11}^{(0)}}{\partial x_1}+\frac{\partial S_{21}^{(0)}}{\partial x_2}=\rho\frac{\partial^2 V_1^{(0)}}{\partial t^2}-\left(p_1^+ + p_1^-\right),$$

$$\frac{\partial S_{12}^{(0)}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{22}^{(0)}}{\partial x_2}=\rho\frac{\partial^2 V_2^{(0)}}{\partial t^2}-\left(p_2^+ + p_2^-\right), \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial L_{13}^{(0)}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{23}^{(0)}}{\partial x_2}+\left(S_{12}^{(0)}-S_{21}^{(0)}\right)= J\frac{\partial^2 O_3^{(0)}}{\partial t^2}-\left(m_3^+ + m_3^-\right);$$

соотношения упругости

$$\overset{0}{T}{}_{11}^{(0)}=2h\frac{E}{1-\upsilon^2}\left[\overset{0}{\Gamma}{}_{11}^{(0)}+\upsilon\overset{0}{\Gamma}{}_{22}^{(0)}\right](1\rightleftarrows 2),$$

$$\overset{0}{S}{}_{12}^{(0)}=2h\left[(\mu+\alpha)\overset{0}{\Gamma}{}_{12}^{(0)}+(\mu-\alpha)\overset{0}{\Gamma}{}_{21}^{(0)}\right](1\rightleftarrows 2),$$

$$\overset{0}{L}{}_{13}^{(0)}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)\overset{0}{k}{}_{13}^{(0)}+(\gamma-\varepsilon)\overset{0}{k}{}_{31}^{(0)}\right](1\to 2), \quad (3.13)$$

$$\overset{0}{L}{}_{31}^{(0)}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)\overset{0}{k}{}_{31}^{(0)}+(\gamma-\varepsilon)\overset{0}{k}{}_{13}^{(0)}\right](1\to 2);$$

геометрические соотношения

$$\overset{0}{\Gamma}{}_{11}^{(0)}=\frac{\partial \overset{0}{V}{}_1^{(0)}}{\partial x_1}(1\to 2),\quad \overset{0}{\Gamma}{}_{12}^{(0)}=\frac{\partial \overset{0}{V}{}_2^{(0)}}{\partial x_1}-\overset{0}{O}{}_3^{(0)},$$

$$\overset{0}{\Gamma}{}_{21}^{(0)}=\frac{\partial \overset{0}{V}{}_1^{(0)}}{\partial x_2}+\overset{0}{O}{}_3^{(0)},\quad \overset{0}{k}{}_{13}^{(0)}=\frac{\partial \overset{0}{O}{}_3^{(0)}}{\partial x_1}(1\to 2), \quad (3.14)$$

граничные условия при $\alpha_1 = \alpha_{10}$

$$T_{11}^{(0)} = \int\limits_{-h}^{h} p_1^* d\alpha_3, \quad S_{12}^{(0)} = \int\limits_{-h}^{h} p_2^* d\alpha_3, \qquad (3.15)$$
$$L_{13}^{(0)} = \int\limits_{-h}^{h} m_3^* d\alpha_3.$$

Начальные условия задаются аналогично задаче изгиба по НТУ.

Отметим, что система уравнений обобщенного плоского напряженного состояния пластины по НТУ совпадает с системой уравнений плоской задачи НТУ, полученной в работах [2, 4, 13, 14].

Системы уравнений прикладной теории динамического изгиба и динамического обобщенного плоского напряженного состояния микрополярной упругой тонкой пластины позволяют изучать различные задачи и выявлять тонкие динамические эффекты.

Литература

1. *Амбарцумян С. А.* Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд-во НАН Армении, 1999. 214 с.
2. *Nowacki W.* Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford; N.Y.; Toronto; Sydney; P.; Frankfurt: Pergamon Press, 1986. 384 p.
3. *Ильюшин А. А., Ломакин В. А.* Моментные теории в механике твердых деформируемых тел // Прочность и пластичность. М.: Наука, 1971. С. 54–59.
4. *Морозов Н. Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.
5. *Eringen A. C.* Microcontinuum Field Theories 1999 Springer-Verlag New York, Inc. I: Foundations and Solids. 325 p. II: Fluent Media. 342 p.
6. *Ворович И. И.* Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек // Тр. II Всесоюз. съезда по теорет. и приклад. механике. М.: Наука, 1966. Вып. 3. С. 116–136.
7. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
8. *Агаловян Л. А.* Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 415 с.
9. *Саркисян С. О.* Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: Изд-во АН Армении, 1992. 260 с.
10. *Kaplunov J. D., Kossovich L. Yu., Nolde E. V.* Dynamics of Thin Walled Elastic Bodies. San Diego; L.; Boston; N.Y.; Sydney; Tokyo; Toronto: Academic Press, 1998. 226 p.
11. *Саркисян С. О.* Асимптотическая теория и вариационное уравнение задачи изгиба упругой тонкой пластинки по моментной теории упругости // Докл. НАН Армении. 1999. Т. 99. № 3. С. 216–225.
12. *Саркисян С. О.* Асимптотическая теория и вариационное уравнение плоской задачи упругой тонкой пластинки по моментной теории упругости // Докл. НАН Армении. 1999. Т. 99. № 2. С. 138–147.
13. *Пальмов В. А.* Плоская задача теории несимметричной упругости // ПММ. 1964. Т. 28. № 6. С. 1117–1120.
14. *Булыгин А. Н., Кувшинский Е. В.* Плоская деформация в асимптотической теории упругости // ПММ. 1967. Т. 31. № 3. С. 543–547.
15. *Саркисян С. О.* О некоторых результатах внутреннего и краевого расчетов тонких пластин по несимметричной теории упругости // Проблемы механики тонких деформируемых тел (к 80-летию академика НАН Армении С. А. Амбарцумяна). Ереван: Изд-во НАН Армении, 2002. С. 285–296.

Статья поступила 20 октября 2003 г.
Гюмрийский государственный педагогический институт, Армения
© Атоян А. А., Саркисян С. О., 2004