

УДК 539.3

## ВЛИЯНИЕ ФИЗИКО-МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ КОМПОНЕНТОВ И ПАРАМЕТРОВ СТРУКТУРЫ МАТРИЧНЫХ КОМПОЗИТОВ НА ЭНЕРГИЮ УПРУГОГО ПОЛЯ

*Сычев А. П.*<sup>1</sup>

EFFECT OF PHYSICAL-AND-MECHANICAL PROPERTIES OF COMPONENTS AND  
PARAMETERS OF MATRIX COMPOSITES STRUCTURE ON THE ELASTIC FIELD ENERGY

Sychev A. P.

The problem solved is aimed to identify local density of the elastic field energy in two-component non-textured composites. Relationships are obtained for relative strain energy. For the composites with isotropic components, model computations of relative bulk and shift components of strain energy in the matrix and inclusions from average distances between reinforcing elements are carried out.

Композиционные материалы — один из актуальных объектов исследований в современном машиностроении, триботехнике и материаловедении.

Данные материалы являются результатом объемного сочетания разнородных компонентов: пластичных (связующие, матрица) и обладает высокой прочностью и жесткостью (наполнитель, арматура). При этом композиции имеют свойства, не присущие отдельным составляющим.

Компоненты нетекстурированных композитов обычно состоят из материалов с четко выраженной границей, имеющих различные физико-механические характеристики. Широкое применение подобные композиты находят в узлах сопряжения и трения, где в качестве включений, используемых для модификации свойств матрицы, применяются порошкообразные наполнители (тальк, графит, полевой шпат и др.).

Исследования посвящены выводу соотношений для расчета плотности энергии деформации в двухкомпонентных нетекстурированных композитах, т. е. матричных композитах с включениями, форма которых близка, к сферической.

Среднее и локальные значения плотности энергии деформации является важнейшими характеристиками, определяющими локальное напряженно-деформированное состояние неоднородных материалов. Знание этих

характеристик может дать исключительно полезную информацию о поведении композитного материала в предельном состоянии (например, при разрушении). При этом основное влияние на их локальное напряженно-деформированное состояние оказывают упругие свойства компонентов, составляющих материал, и концентрация включений, тесно связанная со средним расстоянием между элементами неоднородности. Для анализа локального напряженно-деформированного состояния двухкомпонентных нетекстурированных композитов используется подход, основанный на теории случайных полей [1].

Пусть в рассматриваемом композите материалы матрицы и элементов неоднородности изотропны; положение включений в объеме матрицы является случайным, однако в целом материал статистически однороден. Статистическая однородность двухкомпонентного нетекстурированного композита приводит к наличию среднего расстояния между включениями, которое можно связать с их концентрацией. Рассмотрим в качестве элементарного объема куб, ребро которого равно  $l = 2(h + R)$ , с отдельным включением радиуса  $R$ , расположенным в его центре. Среднее расстояние между включениями можно найти, рассматривая два соседних элементарных объема (рис. 1). Тогда объем элементарной ячейки будет равен  $V = l^3 = 8(h + R)^3$ ,

<sup>1</sup>Сычев Александр Павлович, канд. физ.-мат. наук, зав. лабораторией транспорта, энергетики и новых композиционных материалов Южного научного центра РАН, доцент кафедры теоретической механики Ростовского государственного университета путей сообщения.

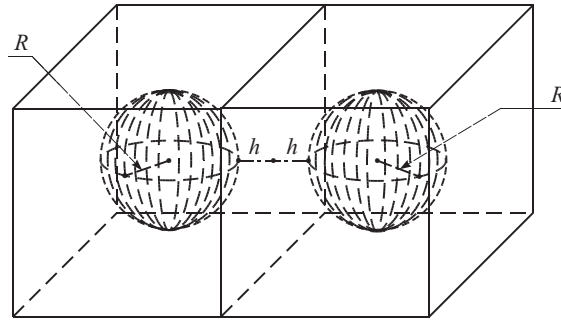


Рис. 1

а объем включения —  $V_B = \frac{4}{3}\pi R^3$ . Считая, что концентрация включений  $\nu_B = \frac{V_B}{V}$ , а концентрация матрицы  $\nu_M = 1 - \nu_B$ , получим  $\nu_B = \frac{\pi}{6} \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-3}$  (здесь и в дальнейшем нижний индекс «в» обозначает величины, относящиеся к включению, а «м» — к матрице). Отсюда параметр  $\frac{h}{R}$ , характеризующий микроструктуру композита, может быть выражен через концентрацию включений в виде

$$\frac{h}{R} = \sqrt[3]{\frac{\pi}{6\nu_B}} - 1. \quad (1)$$

Очевидно, максимально возможное значение концентрации включений достигается в случае, когда  $\frac{h}{R} = 0$ , что соответствует  $\nu_B = \frac{\pi}{6} \approx 0,52$ . Минимальное значение концентрации включений характеризует случай  $\frac{h}{R} \rightarrow \infty$ , откуда  $\nu_B \rightarrow 0$ . Данный диапазон концентрации включений соответствует границам применимости методов расчета свойств подобных композитов.

Для композиционных материалов тензоры напряжений  $\sigma$ , деформаций  $\varepsilon$ , модулей упругости  $c$  и податливости  $s$  могут быть представлены в виде суммы средних значений и флуктуаций (для удобства в дальнейшем индексы в записи компонент тензоров и элементов матриц будут опущены):

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{r}) &= \langle \sigma(\mathbf{r}) \rangle + \sigma'(\mathbf{r}), \\ \varepsilon(\mathbf{r}) &= \langle \varepsilon(\mathbf{r}) \rangle + \varepsilon'(\mathbf{r}), \\ \mathbf{c}(\mathbf{r}) &= \langle \mathbf{c}(\mathbf{r}) \rangle + \mathbf{c}'(\mathbf{r}), \\ \mathbf{s}(\mathbf{r}) &= \langle \mathbf{s}(\mathbf{r}) \rangle + \mathbf{s}'(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Здесь и далее по тексту  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор случайной точки среды, угловые скобки в этих выражениях обозначают усреднение по объему материала. При этом для матричного композита, содержащего изотропные включения и матрицу, операция усреднения сводится (для

некоторой случайной величины  $a(\mathbf{r})$ ) к суммированию

$$\langle a(\mathbf{r}) \rangle = \nu_B a_B + \nu_M a_M. \quad (2)$$

В рамках линейной теории флуктуации линейно зависят от средних значений

$$\begin{aligned} \sigma'(\mathbf{r}) &= \mathbf{P}(\mathbf{r}) \langle \sigma(\mathbf{r}) \rangle, \\ \varepsilon'(\mathbf{r}) &= \mathbf{Q}(\mathbf{r}) \langle \varepsilon(\mathbf{r}) \rangle. \end{aligned}$$

Тензоры  $\mathbf{P}(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$  являются в общем случае интегральными операторами, описывающими взаимодействие между включениями [1]. Тогда связь между локальными и средними напряжениями в материале может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{r}) &= (\mathbf{I} + \mathbf{P}(\mathbf{r})) \langle \sigma(\mathbf{r}) \rangle, \\ \varepsilon(\mathbf{r}) &= (\mathbf{I} + \mathbf{Q}(\mathbf{r})) \langle \varepsilon(\mathbf{r}) \rangle, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{I}$  — единичный тензор четвертого ранга. Следовательно, локальные напряжения и деформации можно охарактеризовать безразмерными операторами концентраций напряжений и деформаций (тензоры четвертого ранга), представляющими собой отношения локальных к средним значениям [2–5]

$$\mathbf{K}^\sigma(\mathbf{r}) = \mathbf{I} + \mathbf{P}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{K}^\varepsilon(\mathbf{r}) = \mathbf{I} + \mathbf{Q}(\mathbf{r}).$$

Удобство такого представления заключается в том, что при данных предположениях операторы концентраций напряжений и деформаций должны зависеть только от материальных параметров среды и микроструктуры материала, а не от прикладываемых нагрузок. В дальнейшем изложении будет использоваться только оператор концентраций напряжений

$$K_{ijkl}^\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \langle \sigma_{kl}(\mathbf{r}) \rangle^{-1}. \quad (3)$$

Соотношение для оператора  $K_{ijkl}^\sigma(\mathbf{r})$ , учитывая взаимодействие включений и матрицы, можно получить, решая систему стохастических дифференциальных уравнений второго порядка (уравнений равновесия)

$$L_{ij}(\mathbf{r}) u_j(\mathbf{r}) = -f_i(\mathbf{r}),$$

где  $L_{ij}(\mathbf{r}) = \nabla_k c_{ijkl}(\mathbf{r}) \nabla_l$  — дифференциальный оператор, а  $f_i(\mathbf{r})$  и  $u_j(\mathbf{r})$  — компоненты вектора объемных сил и вектора смещения. Используя метод функций Грина с помощью обобщенного сингулярного приближения теории случайных полей, получается выражение для оператора концентраций напряжений [2–5]:

$$\mathbf{K}^\sigma(\mathbf{r}) = c(\mathbf{r})(\mathbf{I} - gc''(\mathbf{r}))^{-1} \langle c(\mathbf{r})(\mathbf{I} - gc''(\mathbf{r}))^{-1} \rangle^{-1}. \quad (4)$$

где  $\mathbf{I}$  — единичный тензор четвертого ранга, двойным штрихом обозначена разность между величинами неоднородной среды и однородного тела сравнения, а тензор  $\mathbf{g}$  — интеграл от сингулярной составляющей второй производной тензора Грина уравнений равновесия. Тензор  $\mathbf{g}$  может быть вычислен в явной форме (по индексам, заключенным в круглые скобки, осуществляется операция симметризации) [1]

$$g_{ijkl} = a_{i(kl)(j)}, \quad a_{iklj} = -\frac{1}{4\pi} \int n_k n_j b_{il} d\Omega,$$

где  $b_{il}$  — элементы матрицы, обратной матрице  $\mathbf{T}$  с элементами  $t_{il} = c_{inlm}^c n_n n_m$  (верхним индексом «с» здесь и далее обозначены параметры тела сравнения), а  $n_1 = \sin \theta \cos \varphi$ ,  $n_2 = \sin \theta \sin \varphi$ ,  $n_3 = \cos \theta$  — компоненты вектора нормали к поверхности включения,  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$ .

Для нетекстурированных композитов с изотропными компонентами тензор модулей упругости компонент можно представить в виде [1, 4, 5]

$$c_{ijkl} = 3K(\mathbf{r})V_{ijkl} + 2\mu(\mathbf{r})D_{ijkl}. \quad (5)$$

Здесь  $K(\mathbf{r}) = K_M$ ,  $\mu(\mathbf{r}) = \mu_M$  при расчетах в матрице,  $K(\mathbf{r}) = K_B$ ,  $\mu(\mathbf{r}) = \mu_B$  — во включении;  $K$  и  $\mu$  — объемный и сдвиговый модули соответственно. Тензоры  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{D}$  представляют соответственно объемную и девиаторную составляющие разложения тензора  $\mathbf{I}$

$$V_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}/3, \quad D_{ijkl} = I_{ijkl} - V_{ijkl},$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. При этом

$$\begin{aligned} V_{ijkl} &= V_{ijmn}V_{mnkl}, \\ D_{ijkl} &= D_{ijmn}D_{mnkl}, \\ V_{ijmn}D_{mnkl} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Отметим, что для тензора четвертого ранга, представленного в виде  $\mathbf{a} = \beta\mathbf{V} + \gamma\mathbf{D}$ , где

$\beta \neq 0$ ,  $\gamma \neq 0$ , очевидно, выполняется равенство

$$\mathbf{a}^{-1} = \frac{1}{\beta}\mathbf{V} + \frac{1}{\gamma}\mathbf{D}. \quad (7)$$

Поэтому для компонент тензора податливости получим

$$\begin{aligned} s_{ijkl}(\mathbf{r}) &= c_{ijkl}^{-1}(\mathbf{r}) = \\ &= (3K(\mathbf{r})V + 2\mu(\mathbf{r})D)^{-1} = \\ &= \frac{1}{3K(\mathbf{r})}V + \frac{1}{2\mu(\mathbf{r})}D. \end{aligned} \quad (8)$$

Для изотропных компонентов композита и включений шаровой формы в соотношении (4)  $\mathbf{g}$  также будет изотропным тензором, поэтому его можно представить в виде объемной и девиаторной составляющих [1, 4, 5]:

$$g_{ijkl} = 3g_V V_{ijkl} + 2g_D D_{ijkl}, \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} g_V &= -\frac{1}{3(3K^c + 4\mu^c)}, \\ g_D &= -\frac{3K^c + 6\mu^c}{10\mu^c(3K^c + 4\mu^c)}; \end{aligned}$$

$K^c$  и  $\mu^c$  — соответственно объемные и сдвиговые модули однородного тела сравнения.

Оператор концентраций напряжений в (4) также будет изотропным тензором, поэтому

$$\mathbf{K}^\sigma(\mathbf{r}) = 3K_V^\sigma(\mathbf{r})V + 2K_D^\sigma(\mathbf{r})D. \quad (10)$$

При этом, учитывая (2), (5) – (9), для объемной и девиаторной компонент  $K^\sigma(\mathbf{r})$  справедливы следующие соотношения [4]:

$$\begin{aligned} K_V^\sigma(\mathbf{r}) &= \frac{1}{3} \frac{K(\mathbf{r})}{K_B \nu_B \alpha_B(\mathbf{r}) + K_M \nu_M \alpha_M(\mathbf{r})}, \\ K_D^\sigma(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \frac{\mu(\mathbf{r})}{\mu_B \nu_B \beta_B(\mathbf{r}) + \mu_M \nu_M \beta_M(\mathbf{r})}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha_B(\mathbf{r}) &= \frac{1 - 9g_V(K(\mathbf{r}) - K^c)}{1 - 9g_V(K_B - K^c)}, \\ \alpha_M(\mathbf{r}) &= \frac{1 - 9g_V(K(\mathbf{r}) - K^c)}{1 - 9g_V(K_M - K^c)}, \\ \beta_B(\mathbf{r}) &= \frac{1 - 4g_D(\mu(\mathbf{r}) - \mu^c)}{1 - 4g_D(\mu_B - \mu^c)}, \\ \beta_M(\mathbf{r}) &= \frac{1 - 4g_D(\mu(\mathbf{r}) - \mu^c)}{1 - 4g_D(\mu_M - \mu^c)}, \end{aligned}$$

где (как и выше)  $K_B$ ,  $K_M$ ,  $K^c$  и  $\mu_B$ ,  $\mu_M$ ,  $\mu^c$  — объемные и сдвиговые модули соответственно,  $K(\mathbf{r}) = K_M$ ,  $\mu(\mathbf{r}) = \mu_M$  при расчетах в матрице,  $K(\mathbf{r}) = K_B$ ,  $\mu(\mathbf{r}) = \mu_B$  — во включении.

Характеристики тела сравнения могут быть рассчитаны в различных приближениях. В настоящей работе при выборе параметров тела сравнения использовался метод самосогласования [1].

Рассмотрим теперь локальную энергию деформации (объемную плотность энергии деформации)

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) \sigma_{ij}(\mathbf{r}). \quad (11)$$

В выражении (11) произведение тензоров деформаций  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r})$  и напряжений  $\sigma_{ij}(\mathbf{r})$  следует понимать как свертку по соответствующим индексам. С учетом  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{r}) = s_{ijkl}(\mathbf{r}) \sigma_{kl}(\mathbf{r})$ , получим

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} s_{ijkl}(\mathbf{r}) \sigma_{kl}(\mathbf{r}) \sigma_{ij}(\mathbf{r}). \quad (12)$$

Воспользовавшись соотношением (3) для оператора концентраций напряжений, выражение (12) можно переписать следующим образом

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} s_{ijkl}(\mathbf{r}) K_{klmn}^{\sigma}(\mathbf{r}) K_{ijpq}^{\sigma}(\mathbf{r}) \times \langle \sigma_{mn}(\mathbf{r}) \rangle \langle \sigma_{pq}(\mathbf{r}) \rangle.$$

Учитывая (6), (8) и (10), получим соотношение для определения локальной плотности энергии упругого поля в нетекстурированных композитах

$$E(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \left( 3 \frac{(K_V^{\sigma}(\mathbf{r}))^2}{K(\mathbf{r})} V_{ijkl} + 2 \frac{(K_D^{\sigma}(\mathbf{r}))^2}{\mu(\mathbf{r})} D_{ijkl} \right) \times \langle \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \rangle \langle \sigma_{kl}(\mathbf{r}) \rangle. \quad (13)$$

Удобно определять энергетические характеристики относительно ее усредненного значения

$$\langle E(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} s_{ijkl}^* \langle \sigma_{kl}(\mathbf{r}) \rangle \langle \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \rangle, \quad (14)$$

Где «\*» здесь и далее обозначены эффективные упругие характеристики композитов. с учетом соотношения (7), получим

$$s^* = (c^*)^{-1} = (3K^*V + 2\mu^*D)^{-1} = \frac{1}{3K^*}V + \frac{1}{2\mu^*}D.$$

Для эффективных упругих модулей  $K^*$  и  $\mu^*$  выполняются следующие соотношения [1]:

$$\frac{1}{K^* + b_K^c} = \frac{\nu_B}{K_B + b_K^c} + \frac{\nu_M}{K_M + b_K^c},$$

$$\frac{1}{\mu^* + b_{\mu}^c} = \frac{\nu_B}{\mu_B + b_{\mu}^c} + \frac{\nu_M}{\mu_M + b_{\mu}^c},$$

где

$$b_K^c = \frac{4}{3} \mu^c, \quad b_{\mu}^c = \frac{\mu^c(9K^c + 8\mu^c)}{6(K^c + 2\mu^c)}.$$

Тогда среднюю энергию упругого поля нетекстурированных композитов в (14) можно представить в виде

$$\langle E(\mathbf{r}) \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3K^*} V_{ijkl} + \frac{1}{2\mu^*} D_{ijkl} \right) \times \langle \sigma_{ij}(\mathbf{r}) \rangle \langle \sigma_{kl}(\mathbf{r}) \rangle. \quad (15)$$

Рассматривая относительную плотность энергии деформации, из (7), (13) и (15) получим выражение

$$E(\mathbf{r}) \langle E(\mathbf{r}) \rangle^{-1} = \frac{9(K_V^{\sigma}(\mathbf{r}))^2 K^*}{K(\mathbf{r})} V + \frac{4(K_D^{\sigma}(\mathbf{r}))^2 \mu^*}{\mu(\mathbf{r})} D. \quad (16)$$

Обозначая в (16) через  $E_V$  относительную энергию объемного напряженно-деформированного состояния, а через  $E_D$  — относительную энергию чистого сдвига, получим следующие соотношения

$$E_V = \frac{9(K_V^{\sigma}(\mathbf{r}))^2 K^*}{K(\mathbf{r})},$$

$$E_D = \frac{4(K_D^{\sigma}(\mathbf{r}))^2 \mu^*}{\mu(\mathbf{r})}. \quad (17)$$

Очевидно, выражения (17) имеют по два значения — для матрицы и включения. С целью изучения зависимости относительных энергий  $E_V$  и  $E_D$  от параметра  $\frac{h}{R}$  (а значит, от концентрации включений (1)) и увеличения отношения упругих модулей включений и матрицы в работе были проведены расчеты для модельных композитов, состоящих из изотропных материалов, со значениями объемных и сдвиговых модулей упругости, приведенными в таблице.

Расчетные зависимости относительной энергии объемного напряженно-деформированного состояния и чистого сдвига во включении от параметра  $\frac{h}{R}$  для модельных композитов представлены на рис. 2. Аналогичные расчетные зависимости относительной энергии в матрице приведены на рис. 3.

## Объемные и сдвиговые модули упругости включений и матрицы, ГПа

Модельный композит	Включение		Матрица	
	$K_B$	$\mu_B$	$K_M$	$\mu_M$
1	50	20	5	2
2	75	30		
3	100	40		

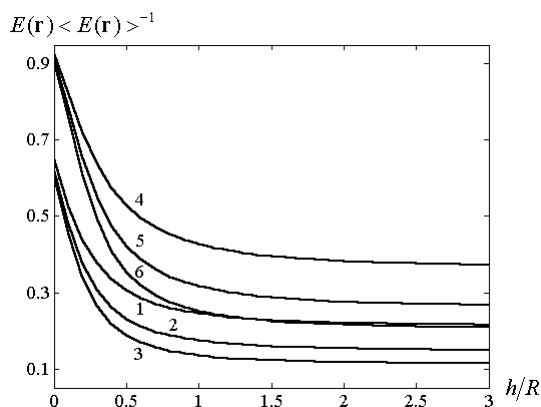


Рис. 2

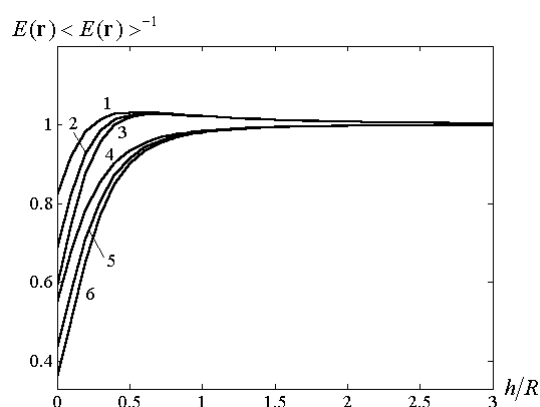


Рис. 3

Кривые 1, 2 и 3 на этих рисунках соответствуют расчетам  $E_V$  для композитов 1, 2 и 3, а кривые 4, 5 и 6 — расчетам  $E_D$  для композитов 1, 2 и 3 соответственно.

Таким образом, для композитов с включениями сферической формы, состоящих из изотропных материалов, зависимости объемной и сдвиговой относительной энергии деформации от параметра  $\frac{h}{R}$  имеют нелинейный характер. Причем при значениях параметра микроструктуры  $\frac{h}{R} \approx 0, 2 \div 1, 2$  эта нелинейность проявляется наиболее существенно. На средних расстояниях между включениями  $\frac{h}{R} > 3$  происходит стабилизация относительной энергии деформации. С увеличением отношения упругих модулей включений к модулям матрицы происходит уменьшение объемной и сдвиговой относительной энергии деформации с сохранением характера зависимости от параметра  $\frac{h}{R}$ . При этом для нетекстурированных композитов с мягкой матрицей и жесткими включениями значения объемной и сдвиговой относительной энергии в матрице стабилизируются около единицы, т.е. при уменьшении концентрации включений

упругие свойства материала будут в основном определяться соответствующими свойствами матрицы.

**Литература**

1. Шермергор Т. Д. Теория упругости микронеоднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
2. Шермергор Т. Д., Яковлев В. Б. Концентрация напряжений на поверхности полости в текстурированной геофизической среде // Известия РАН. Физика Земли. 1998. № 1. С. 81–89.
3. Колесников В. И., Бардушкин В. В., Сычев А. П., Яковлев В. Б. Влияние микроструктуры на локальные значения напряжений и деформаций в волокнистом композите // Вестник машиностроения. 2005. № 8. С. 35–38.
4. Бардушкин В. В., Яковлев В. Б. Характеристики локального напряженно-деформированного состояния в статистически однородных матричных композитах // Деформация и разрушение материалов. 2005. № 9. С. 38–42.
5. Колесников В. И., Бардушкин В. В., Сычев А. П., Яковлев В. Б. Напряженное состояние композитных материалов в условиях воздействия термодинамических факторов // Вестник Южного научного центра РАН. 2005. Т. 1. № 4. С. 9–13.