

УДК 539.3

ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ, ВОЗБУЖДАЕМЫЕ ПОВЕРХНОСТНЫМИ ВИБРОИСТОЧНИКАМИ В ПОРИСТЫХ ВОДОНАСЫЩЕННЫХ СРЕДАХ¹

Фоменко С. И.²

WAVE FIELDS GENERATED IN POROUS WATER-SATURATED MEDIA BY SURFACE VIBRATION SOURCES

Fomenko S. I.

By the example of the problem for a layered half-space, the work analyses the effect of water-saturation of the medium on the wave fields generated by given loads. The Green's matrix is constructed, on the basis of which integral and asymptotic representations for body, surface and channel waves are derived. The plots of dispersion curves for channel waves, transient displacements, as well as the energy distribution among the waves of different types are presented illustrating how the water-saturation results in additional wave properties.

Введение

Характерной особенностью волновых процессов в пористых водонасыщенных средах является наличие трех типов объемных волн вместо двух классических P и S волн в упругой среде. Вывод волновых уравнений для таких сред предложен в работах Я. И. Френкеля и М. А. Био [1, 2]. За прошедшее время влияние пористости на распространение объемных волн в слоистых средах, в том числе и на законы отражения и преломления на границах слоев, изучено достаточно полно [3, 4]. Менее исследованными остаются вопросы влияния водонасыщенности на характеристики работы сейсмоисточников, в первую очередь, на отдаваемую в грунт энергию и на ее распределение между возбуждаемыми волнами различных типов.

Для решения таких задач естественным является использование интегрального подхода, когда волновые поля ищутся в виде интегралов от фундаментальных решений для рассматриваемых структур (через матрицы Грина), которые автоматически удовлетворяют граничным условиям и корректно описывают волны, уходящие на бесконечность [5, 6]. В представляемой работе разработанная ранее техника интегрального подхода обобщается на случай пористых водонасыщенных сред. Ключевым моментом является построение матрицы Грина, в то время как методы анализа волновых полей практически не меняются. В ближней зоне они определяются путем прямого численного интегрирования, в дальней зоне — с помощью асимптотик объемных и бегущих поверхностных и каналовых волн, введенных из полученных интегральных представлений.

1. Матрица Грина пористо-упругого полупространства

Для оценки влияния водонасыщенности грунта на возбуждение и распространение сейсмоакустических волн рассматриваются волновые поля в многослойном полупространстве с упругими и пористыми водонасыщенными слоями (рис. 1).

Движение частиц в упругих средах описывается уравнениями Ламе [7], а во флюидонасыщенных пористых средах уравнениями Био-Френкеля [1]

$$\nabla[(A + N) \operatorname{div} \mathbf{u}_s + Q \operatorname{div} \mathbf{u}_f] + N \Delta \mathbf{u}_s = \\ = \rho_{11} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_f}{\partial t^2} + b \left(\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} \right),$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (06-01-96607).

²Фоменко Сергей Иванович, аспирант кафедры численного анализа Кубанского государственного университета, младший научный сотрудник ИММИ КубГУ.

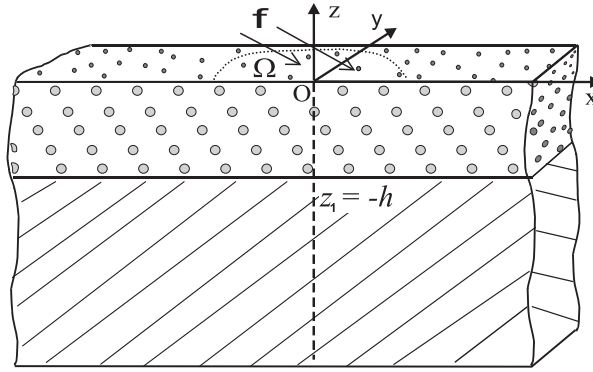


Рис. 1. Геометрия рассматриваемой задачи

$$\begin{aligned} \nabla[Q \operatorname{div} \mathbf{u}_s + R \operatorname{div} \mathbf{u}_f] = \\ = \rho_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_s}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_f}{\partial t^2} - b \left(\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{u}_f}{\partial t} \right). \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{u}_\nu$ — перемещения твердой и жидкой фазы ($\nu = s$ и f). При этом осредненные по объему смещения точек среды определяются соотношением

$$\mathbf{u} = (1 - \varepsilon) \mathbf{u}_s + \varepsilon \mathbf{u}_f,$$

где параметр ε носит название пористости и представляет собой отношение объема жидкой фазы к общему объему среды. Коэффициенты A , N и R — модули упругости пористого скелета и жидкой фазы соответственно; параметр Q можно понимать как коэффициент взаимного влияния фаз в процессе их расширения-сжатия; ρ_{11} , ρ_{22} — эффективные плотности фаз, а ρ_{12} — динамический коэффициент связи скелета и поровой жидкости, имеющий размерность плотности. Последние три величины связаны с плотностями фаз ρ_s и ρ_f , а также коэффициентом извилистости пористого скелета $\bar{\alpha}$ соотношениями [3]

$$\rho_{11} = \rho_s(1 - \varepsilon) + \varepsilon \rho_f(\bar{\alpha} - 1),$$

$$\rho_{22} = \varepsilon \rho_f \bar{\alpha}, \quad \rho_{12} = \varepsilon \rho_f(1 - \bar{\alpha}).$$

Параметр b — коэффициент диссипации, обусловленной вязкостью поровой жидкости.

На внутренних границах слоев выполняются условия непрерывности перемещений и напряжений; для пористой среды с закрытыми порами — непрерывность суммарных напряжений всех фаз и смещений частиц скелета, а также отсутствие относительного движения фаз на границе [8]. На бесконечности выполняются условия излучения, вытекающие из принципа предельного поглощения [5].

С помощью представления гармонического волнового поля $\mathbf{u}_\nu(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ каждой из фаз пористой среды в виде суперпозиции

$$\mathbf{u}_s = \operatorname{grad} \varphi_1 + m_2 \operatorname{grad} \varphi_2 + \operatorname{rot} \boldsymbol{\vartheta}_s,$$

$$\mathbf{u}_f = m_1 \operatorname{grad} \varphi_1 + \operatorname{grad} \varphi_2 + \operatorname{rot} \boldsymbol{\vartheta}_f,$$

уравнения Био-Френкеля разделяются на две независимые системы уравнений. Первая система относительно скалярных потенциалов φ_1 и φ_2 описывает продольные P_1 - и P_2 -волны, которым соответствуют волновые числа κ_1 и κ_2 (собственные числа матрицы системы) и собственные вектора $\mathbf{m}_1 = \{1, m_1\}$, $\mathbf{m}_2 = \{m_2, 1\}$. Вторая система волновых уравнений относительно векторного потенциала $\boldsymbol{\vartheta}_s = -1/\theta \boldsymbol{\vartheta}_f = \{v'_y, -v'_x, \psi\}$ описывает S -волны в среде, где ψ и v характеризует соответственно горизонтально (SH-) и вертикально поляризованные поперечные колебания (SV-волны) с волновым числом κ_3 . Формулы для введенных коэффициентов даны в работе [9] в силу их громоздкости в настоящей работе не приводятся.

Применяя к перемещениям и напряжениям преобразование Фурье $\mathcal{F}_{xy}$ по горизонтальным координатам x, y с параметрами α_1 и α_2 , действуем затем на полученные выражения оператором $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ i\alpha_1/\alpha^2 & i\alpha_2/\alpha^2 & 0 \\ i\alpha_2/\alpha^2 & -i\alpha_1/\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Например,

$$\mathbf{B}\mathbf{U}_s = \{\Phi'_s + \alpha^2 V, \Phi_s + V', \Psi\},$$

где $\mathbf{U}_s(\alpha_1, \alpha_2, z)$ — преобразование Фурье $\mathbf{u}_s$; $\Phi_s(\alpha_1, \alpha_2, z)$, $\Psi(\alpha_1, \alpha_2, z)$ и $V(\alpha_1, \alpha_2, z)$ являются соответственно преобразованиями

$\varphi_1 + m_2\varphi_2$, ψ и v ; $\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$, производная берется по переменной z . Тогда краевая задача расщепляется на две независимые относительно первых двух компонент векторов $\mathbf{BU}_s$, $\mathbf{BU}_f$ и третьей их компоненты Ψ (аналог плоской и антиплоской задачи).

Гармоническое волновое поле $\mathbf{u}_\nu(\mathbf{x}, \omega)e^{-i\omega t}$, возбуждаемое произвольной нагрузкой $\mathbf{f}(x, y, \omega)e^{-i\omega t}$, может быть представлено в виде свертки $\mathbf{u}_\nu = \mathbf{g}_\nu * \mathbf{f}$ матрицы Грина $\mathbf{g}_\nu(\mathbf{x})$ и нагрузки $\mathbf{f}$. Это представление позволяет выписать $\mathbf{u}_\nu$ в форме обратного преобразования Фурье от произведения Фурье-символов матрицы Грина $\mathbf{G}_\nu(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, z) = \mathcal{F}_{xy}[\mathbf{g}_\nu]$ и вектора нагрузки $\mathbf{F}(\alpha_1, \alpha_2) = \mathcal{F}_{xy}[\mathbf{f}]$, что в случае осевой симметрии ($\mathbf{f} = \mathbf{f}(r)$, $\mathbf{u}_\nu = \mathbf{u}_\nu(r, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$) сводится к однократному контурному интегралу Фурье-Бесселя [5, 6]

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\nu(r, z, \omega) &= \mathcal{F}_{xy}^{-1}[\mathbf{G}_\nu \mathbf{F}] = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{G}_\nu(i\frac{\partial}{\partial x}, i\frac{\partial}{\partial y}, \alpha, z) \mathbf{F}(\alpha) J_0(\alpha r) d\alpha. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Раскладывая символ нагрузки $\mathbf{F}$ по трем базисным векторам $\mathbf{F}^{(1)}$, $\mathbf{F}^{(2)}$ и $\mathbf{F}^{(3)}$, таким что $\mathbf{BF}^{(1)} = \{1, 0, 0\}$, $\mathbf{BF}^{(2)} = \{0, i, 0\}$ и $\mathbf{BF}^{(3)} = \{0, 0, i\}$, где $\mathbf{B}$ оператор, описываемый соотношением (1.1), имеем общий вид матрицы $\mathbf{G}_\nu$:

$$\mathbf{G}_\nu = \begin{pmatrix} G_\nu^{11} & G_\nu^{12} & -i\alpha_1 P_\nu \\ G_\nu^{21} & G_\nu^{22} & -i\alpha_2 P_\nu \\ \alpha_1 S_\nu/\alpha^2 & \alpha_2 S_\nu/\alpha^2 & W_\nu \end{pmatrix},$$

$$G_\nu^{11} = -i(\alpha_1^2 M_\nu + \alpha_2^2 H_\nu)/\alpha^2,$$

$$G_\nu^{22} = -i(\alpha_2^2 M_\nu + \alpha_1^2 H_\nu)/\alpha^2,$$

$$G_\nu^{12} = G_\nu^{21} = -i\alpha_1\alpha_2(M_\nu - H_\nu)/\alpha^2,$$

где

$$\mathbf{BU}_\nu^{(1)} = \{P_\nu(\alpha, z), W_\nu(\alpha, z), 0\},$$

$$\mathbf{BU}_\nu^{(2)} = \{M_\nu(\alpha, z), S_\nu(\alpha, z), 0\},$$

$$\mathbf{BU}_\nu^{(3)} = \{0, 0, H_\nu(\alpha, z)\}$$

— соответствующие решения для введенных базисных нагрузок. Более подробное описание алгоритма построения матриц $\mathbf{G}_\nu$ ($\nu = s, f$) дано в работе [9].

Представления (1.2) используются для анализа волновых полей в ближней зоне. С

увеличением расстояния от источника численное интегрирование становится все более затратным из-за усиления осцилляции подынтегральных функций, но при этом повышается точность асимптотических представлений. Как в [5, 6], для объемных волн асимптотика строится методом стационарной фазы, но определяется вкладом не двух, а трех стационарных точек, в то время как бегущие волны описываются вкладом вычетов в полюсах ζ_m подынтегральной функции в (1.2)

$$\mathbf{u}_\nu(r, z) \sim \sum_{m=1}^N \mathbf{a}_{\nu,m} H_0^{(1)}(\zeta_m r), \quad (1.3)$$

$$\mathbf{a}_{\nu,m}(z) = \frac{i}{2} \text{res } \mathbf{G}_\nu \mathbf{F}|_{\alpha=\zeta_m} \zeta_m, \quad r \rightarrow \infty.$$

Полюса ζ_m — волновые числа поверхностных и каналовых волн, распространяющихся с фазовыми скоростями ω/ζ_m .

Решение $\mathbf{u}_\nu(r, z, t)$ нестационарной задачи с поверхностным источником, задаваемым нагрузкой $\mathbf{f}(r, t) = \mathbf{f}(r)p(t)$, может быть получено на основе принципа суперпозиции [5]

$$\mathbf{u}_\nu(r, z, t) = \frac{1}{\pi} \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}_\nu(r, z, \omega) P(\omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

где $\mathbf{u}_\nu(r, z, \omega)$ — решение соответствующей гармонической задачи с нагрузкой $\mathbf{f}(r)$, а $P(\omega)$ — частотный спектр $p(t)$.

Средняя за период энергия гармонических колебаний, отдаваемая в среду источником, расположенным на поверхности в области Ω , определяется формулой, полученной с учетом граничных условий с последующим применением равенства Парсеваля

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\omega}{2} \text{Im} \iint_{\Omega} (\mathbf{u}_s, \mathbf{f}) dx dy = \\ &= -\frac{\omega}{4\pi} \text{Im} \int_{\Gamma} (\mathbf{U}_s(\alpha, 0), \mathbf{F}(\alpha^*)) \alpha d\alpha. \end{aligned}$$

Здесь $(\mathbf{u}_s, \mathbf{f})$ — скалярное произведение перемещений $\mathbf{u}_s$ и нагрузки $\mathbf{f}$.

2. Некоторые результаты численных экспериментов

Рассматривается пористый водонасыщенный слой толщины $h = 5$ м на упругом полупространстве. Свойства пористой среды задаются модулем всестороннего сжатия скелета с

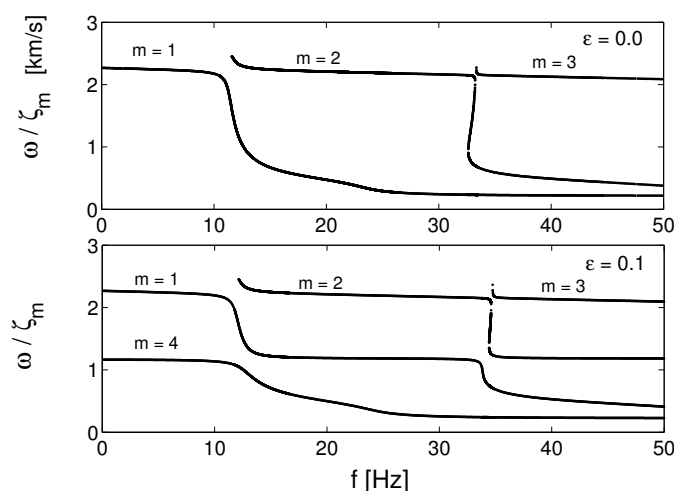


Рис. 2. Частотная зависимость фазовых скоростей для упругого $\varepsilon = 0$ и пористо-упругого $\varepsilon = 0,1$ двуслойного полупространства

пустыми порами K_s , истинным модулем сжимаемости твердой фазы K_r , сжимаемостью жидкости K_f , модулем сдвига μ , плотностью твердой и жидкой фаз ρ_s, ρ_f , коэффициентом извилистости пор $\bar{\alpha}$, а также пористостью ε [8]. При $\varepsilon = 0$ имеем обычную упругую среду и $K_r = K_s$.

В приведенных ниже примерах параметры нижнего полупространства: $K_r = 21,4$ ГПа, $\mu = 156$ ГПа ($1 \text{ ГПа} = 10^9 \text{ н/м}^2$), $\rho = 2600 \text{ кг/м}^3$. Для пористой среды выбиралась различная степень водонасыщенности: $\varepsilon = 0; 0,1$ с $K_s = 11; 8,75$ ГПа соответственно; остальные параметры: $K_r = 11$; $K_f = 3,3$; $\mu = 0,098$ (ГПа); $\rho_s = 1884$; $\rho_f = 1000 \text{ кг/м}^3$; $\bar{\alpha} = 1,66$; $b = 0$.

Дисперсионные кривые на рис. 2 иллюстрируют появление за счет водонасыщенности дополнительных бегущих волн. Их фазовые скорости близки к скорости P_2 -волн ($c_{P_2} \sim 1,2 \text{ км/с}$). Это видно на рис. 3, где приведены графики фазовых скоростей бегущих волн в зависимости от пористости в предположении линейной зависимости модуля сжимаемости K_r от ε .

Амплитуда дополнительных волн ($|a_{\nu,k}|$ в (1.3)) становится ощутимой уже при $\varepsilon = 0,1$, их вклад отчетливо виден на теоретической сейсмограмме, приведенной на рис. 4 для вертикальной компоненты средних по объему смещений поверхности $u_z = (1 - \varepsilon)u_{s,z} + \varepsilon u_{f,z}$ на расстоянии $r = 1 \text{ км}$ от источника. Вид исходного сосредоточенного импульса $\mathbf{f} = \{0, 0, p(t)\delta(x, y)\}$ приведен на рис. 4 внизу. Его частотный спектр $P(\omega)$ покрывает диапазон $0 < f < 10 \text{ Гц}$, в котором при $\varepsilon = 0$

возбуждается только одна волна со временем прихода $t_1 = 0,45 \text{ с}$, а при $\varepsilon = 0,1$ — дополнительная, более медленная, со временем прихода $t_4 = 0,85 \text{ с}$.

На рис. 5 сравниваются энергии упругих колебаний, возбуждаемых точечной ударной нагрузкой на поверхности грунта с разной степенью водонасыщенности. В то время как средняя за период энергия E источника отличается на порядок, энергия поверхностных волн в упругой среде в сравнении с пористой изменяется незначительно, при этом большая часть энергии приходится на объемные волны.

Заключение

На основе интегрального подхода построена численно-аналитическая модель волновых колебаний в пористо-упругих слоистых средах. Разработан программный комплекс, позволяющий исследовать волновую структуру, а также изучать распределение энергии источников между волнами различных типов в зависимости от свойств среды.

Автор благодарит проф. Глушкову Н. В. и проф. Глушкова Е. В. за постановку задачи и обсуждение результатов работы.

Литература

1. Френкель Я. И. К теории сейсмических сейсмoeлектрических явлений во влажной почве // Изв. АН СССР. Сер. геогр. и геофиз. 1944. Т. 8. С. 133–149.
2. Biot M. A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-

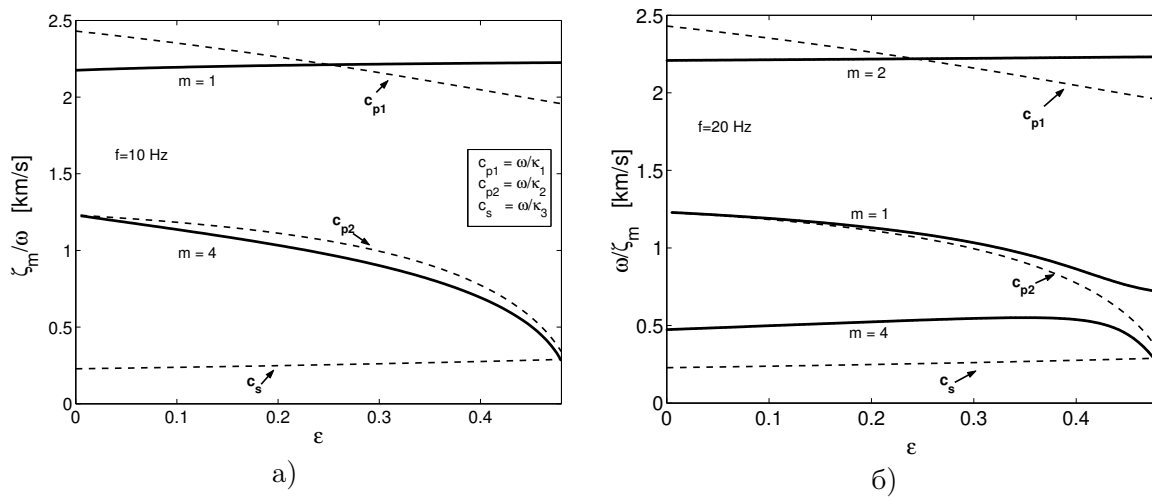
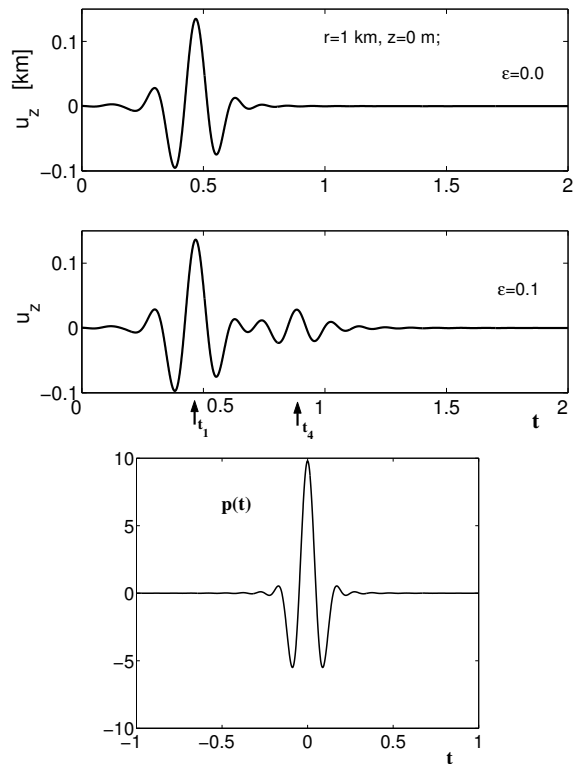


Рис. 3. Зависимость фазовых скоростей от пористости



$$p(t) = \mathcal{F}_t^{-1}[P(\omega)]$$

$$P(\omega) = \cos^2(\pi(f - f_c)/2\Delta f)$$

$$\omega = 2\pi f, f_c = 5 \text{ Гц}, \Delta f = 5 \text{ Гц}$$

Рис. 4. Влияние пористости на вид теоретической сейсмограммы

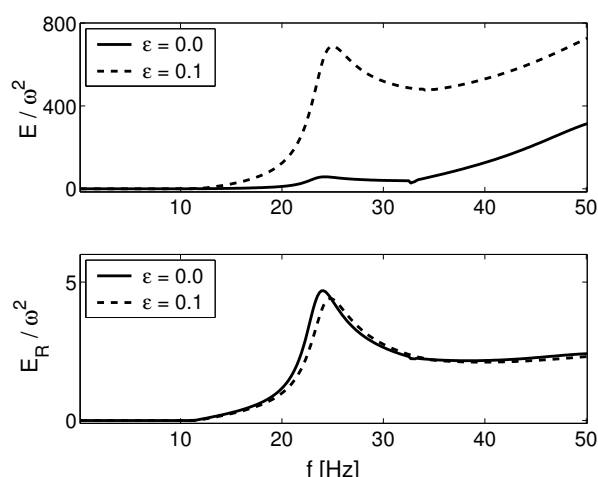


Рис. 5. Частотная зависимость энергии источника E и энергии рэлеевских волн E_R при различной пористости грунта

- frequency range. II. Higher-frequency range // J. Acoust. Soc. Am. 1956. Vol. 28. No. 2. P. 168–178.
3. Молотков Л. А. Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред. С.-Пб.: Наука, 2001. 248 с.
4. Городецкая Н. С. Отражение волн от свободной границы пористо-упругого насыщенного жидкостью полупространства // Акустичний вісник. 2002. Т. 5. № 4. С. 5–14.
5. Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 343 с.
6. Глушкова Н. В. Определение и учет сингулярных составляющих в задачах теории упругости: Дис. д-ра физ.-мат. наук: 01.02.04 / Ростовский госуниверситет. Ростов, 2000. 220 с.
7. Амензаде Ю. А. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1976. 272 с.
8. Сеймов В. М., Трофимчук А. Н., Савицкий О. А. Колебания и волны в слоистых средах. Киев: Наук. думка, 1990. 224 с.
9. Фоменко С. И., Глушков Е. В. Численно-аналитическое моделирование волновых полей в пористо-упругих слоистых средах / Кубанский гос. университет. Краснодар, 2006. 43 с. Деп. в ВИНТИ 10.01.2006, № 3-B2006.
10. Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Фоменко С. И. Волновые поля, возбуждаемые поверхностными и скважинными виброисточниками в водонасыщенных средах // Физическая акустика. Нелинейная акустика. Распространение и дифракция волн. Геологическая акустика: Сборн. трудов XVIII сессии РАО. Т.1. М.: ГЕОС, 2006. С. 247–251.