

МАТЕМАТИКА

УДК 519.6

ОДИН МЕТОД РЕШЕНИЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ¹Дроботенко М. И.², Дудник В. А.³

ONE METHOD FOR SOLVING A BIHARMONIC EQUATION

Drobotenko M. I., Dudnik V. A.

A new method is studied aimed to solve a biharmonic equation, which can be applied to complex domains. In this article we formulate an approximate solution, test it for convergence and give the results of solving model problems.

В работе [1] был предложен метод решения первой краевой задачи для бигармонического уравнения, обладающий рядом преимуществ. В частности, он применим для областей со сложной геометрией. В настоящей работе строится приближённое решение, исследуется его сходимость и приводятся результаты решения модельных задач.

1. Основные обозначения и определения

В работе используются следующие обозначения: $\mathbf{R}^n$, $n = 2, 3$ — евклидово пространство векторов $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x_n)$; $|\mathbf{x}|^2 = \sum_{i=1}^n (x^i)^2$; $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ — такая ограниченная область с кусочно-непрерывной границей S , что область $\Omega^+ = \mathbf{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ — односвязная; $X = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^\infty$, $\mathbf{x}_i \in \Omega^+$, $\mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j$ при $i \neq j$; $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$ при $n = 2$ и $\varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$ при $n = 3$; $L_2 = L_2(\Omega)$, $\|\cdot\|$ — норма в L_2 .

Будем говорить, что множество X удовлетворяет *условию единственности*, если из равенств $u(\mathbf{x}_i) = 0$, $i = \overline{1, \infty}$ следует $u(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in \Omega^+$ для любой гармонической в Ω^+ функции u .

2. Метод решения

Для функции $v \in W_2^2(\Omega)$ имеют место равенства [2]

$$c_n v(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \Delta v(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_S \left(v(\mathbf{y}) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial v}{\partial \nu}(\mathbf{y}) \right) d\Gamma$$

для $\mathbf{x} \in \Omega$ и

$$0 = \int_{\Omega} \Delta v(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_S \left(v(\mathbf{y}) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial v}{\partial \nu}(\mathbf{y}) \right) d\Gamma$$

для $\mathbf{x} \in \Omega^+$.

Пусть $u(\mathbf{x}) \in W_2^2(\Omega)$ — обобщённое решение 1-й краевой задачи для бигармонического уравнения

$$\begin{aligned} \Delta \Delta u &= 0, \text{ в } \Omega, \\ u &= f_1, \text{ на } S, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= f_2, \text{ на } S, \end{aligned} \quad (2.1)$$

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (06-01-96648).

²Дроботенко Михаил Иванович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры численного анализа Кубанского государственного университета.

³Дудник Владимир Александрович, аспирант кафедры численного анализа Кубанского государственного университета.

тогда

$$c_n u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \Delta u(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_S \left(f_1(\mathbf{y}) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f_2(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) d\Gamma \quad (2.2)$$

для $\mathbf{x} \in \Omega$ и

$$0 = \int_{\Omega} \Delta u(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_S \left(f_1(\mathbf{y}) \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - f_2(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right) d\Gamma \quad (2.3)$$

для $\mathbf{x} \in \Omega^+$.

Равенство (2.3) может быть представлено в следующем виде

$$\int_{\Omega} \sigma(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = V(\mathbf{x}), \quad (2.4)$$

$\mathbf{x} \in \Omega^+$.

Относительно $\sigma \in L_2$ равенство (2.4) представляет собой *обратную задачу объёмного потенциала*. Функция $\sigma = \Delta u$ является единственным решением этой задачи, удовлетворяющим дополнительному условию $\Delta \sigma = 0$ [3]. После решения задачи (2.4) решение $u(\mathbf{x})$ задачи (2.1) может быть найдено по формуле (2.2).

3. Сходимость приближённого решения

Задача (2.4) эквивалентна следующей задаче [3]:

$$\int_{\Omega} \sigma(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = V(\mathbf{x}_i), \quad i = \overline{1, \infty}, \quad (3.1)$$

где $\mathbf{x}_i \in X$, множество X удовлетворяет условию единственности.

Приближённым решением задачи (3.1) будем называть функцию σ_m^δ , удовлетворяющую условию

$$\int_{\Omega} \sigma_m^\delta(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = V_i^\delta, \quad i = \overline{1, m}, \quad (3.2)$$

где $\mathbf{x}_i \in X$,

$$\left| V_i^\delta - V(\mathbf{x}_i) \right| \leq \delta, \quad i = \overline{1, m}.$$

Здесь δ — погрешность вычисления поверхностных интегралов в (2.3).

Гармоническую функцию $\sigma_m^\delta(\mathbf{y})$ можно представить в виде

$$\sigma_m^\delta(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^m C_j^m \varphi_j(\mathbf{y}),$$

где $\varphi_j(\mathbf{y}) = \varphi(\mathbf{x}_j, \mathbf{y})$.

Таким образом, приходим к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^m C_j^m \int_{\Omega} \varphi_j(\mathbf{y}) \varphi(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = V(\mathbf{x}_i)$$

или

$$Ac = b. \quad (3.3)$$

Так как матрица A — матрица Грама системы $\{\varphi_i\}_{i=1}^m$, то (3.3) имеет единственное решение, поэтому задача (3.2) также имеет единственное решение, при этом выполняется неравенство [3]

$$\left\| \sigma - \sigma_m^\delta \right\| \leq c \delta \lambda_m + \varepsilon_m,$$

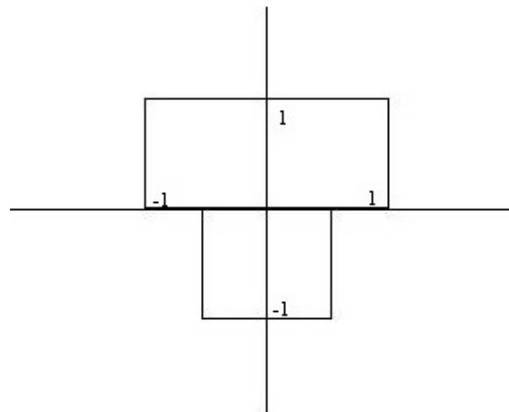
где λ_m зависит от выбора точек $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^m$, $\varepsilon_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$.

Вычисляя значение приближённого решения u_m^δ задачи (2.1) по формуле (2.2) с помощью найденного значения σ_m^δ , получим

$$\left| u(\mathbf{x}) - u_m^\delta(\mathbf{x}) \right| \leq c_1 (\delta \lambda_m + \varepsilon_m + \delta).$$

4. Решение модельных задач

Рассмотрим вначале пример решения обратной задачи объёмного потенциала (2.4). В качестве области Ω возьмём фигуру, представленную на рисунке.



Область Ω

По значениям плотности $\sigma(y)$ вычисляем значения потенциала $V(x)$. Рассмотрим $\sigma(\mathbf{y}) \equiv 1$, $\sigma(\mathbf{y}) = y_1^2 - y_2^2$. Соответствующие им потенциалы $V(x)$ вычисляются в точках $\mathbf{x}_j \in \Omega^+$.

Количество точек $\mathbf{x}_j \in \Omega^+$ для данной модельной задачи берётся равным 8, 32, 64, 128 и расставляются они двумя способами:

а) по контуру Γ_1 , параллельному границе $\partial\Omega$ и отдалённому от неё на расстояние $\rho = 0,25$;

б) по окружности Γ_2 : $y_1^2 + y_2^2 = 2,25$.

Погрешность приближённого решения оценивается величиной

$$\varepsilon_\sigma = \|\sigma(\mathbf{y}) - \sigma_m^\delta(\mathbf{y})\|_{L_2} = \left(\int_{\Omega} |\sigma(\mathbf{y}) - \sigma_m^\delta(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} \right)^{1/2}.$$

Результаты решения первой модельной задачи представлены в табл. 1.

Таблица 1

для $\mathbf{x}_j$, расставленных по Γ_1				
$\sigma(\mathbf{y}) \backslash m$	8	32	64	128
1	0,040	0,0002	$\sim 10^{-6}$	$\sim 10^{-8}$
$y_1^2 - y_2^2$	0,097	0,0005	$\sim 10^{-6}$	$\sim 10^{-9}$
для $\mathbf{x}_j$, расставленных по Γ_2				
1	0,020	0,0002	$\sim 10^{-6}$	$\sim 10^{-8}$
$y_1^2 - y_2^2$	0,051	0,0001	$\sim 10^{-6}$	$\sim 10^{-8}$

В качестве второй модельной задачи рассмотрим краевую задачу (2.1). Область Ω

представлена на рисунке. Выберем функции $f_1(\mathbf{y}) \equiv 1$, $f_2(\mathbf{y}) \equiv 0$. Количество точек $\mathbf{x}_j \in \Omega^+$ для данного примера берётся равным 8, 16, 32 и расставляются они по контуру Γ_1 , параллельному границе $\partial\Omega$ и отстоящему от неё на расстоянии $\rho = 0,25$. Погрешность приближённого решения оценивается величиной

$$\varepsilon_u = \max_{\Omega} (|u(\mathbf{x}) - u_m(\mathbf{x})|).$$

Результаты решения второй модельной задачи представлены в табл. 2.

Таблица 2

$u(\mathbf{x}) \backslash m$	8	16	32
1	$2 \cdot 10^{-7}$	$3 \cdot 10^{-8}$	$\sim 10^{-8}$

Все численные результаты были получены в среде языка программирования Visual Fortran 6.0. Для вычисления интегралов и решения СЛАУ с симметричной матрицей использовались методы встроенной математической библиотеки `imsl`.

Литература

1. *Лежнев В. Г.* Метод точечных потенциалов для бигармонического уравнения // Совр. проблемы механики сплошной среды: VI Междунар. конф. Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ, 2001. С. 97–100.
2. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. М.: Высшая школа, 1977. 432 с.
3. *Дроботенко М. И.* О восстановлении плотности объёмного потенциала // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2004. № 1. С. 5–9.