УДК 539.3

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ В НЕОДНОРОДНЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧАХ[1]

Евдокимова О. В.[2]

DIFFERENTIAL FACTORIZATION METHOD IN INHOMOGENEOUS AND NONSTATIONARY PROBLEMS

Evdokimova O. V.

The work resulted in the development of formulas, which make it possible to study inhomogeneous and nonstationary boundary-value problems using the differential factorization method without preliminary change of the boundary conditions form.

В работах [1, 2] разработана серия подходов исследования краевых задач для систем однородных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами в отдельной области, опирающихся на топологические методы и факторизацию матриц-функций. Предложены варианты факторизации мероморфных матриц-функций.

В то же время не был решен круг вопросов, которые позволили бы перенести методы факторизации на краевые задачи для линейных и нелинейных систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Например, предлагалось неоднородные краевые задачи сводить к однородным краевым задачам путем редукции граничных условий, что делало метод громоздким и малоэффективным.

В настоящей работе построены формулы, позволяющие исследовать неоднородные и нестационарные краевые задачи без необходимости предварительного изменения формы граничных условий.

1. Сформулируем краевую задачу для блочной структуры в предположении, что системы дифференциальных уравнений являются неоднородными. Будем считать, что область Ω блочной структуры состоит из областей Ω_b, $b = 1, 2, \ldots, B$ с границами $\partial\Omega_b$. Часть границы блока может быть общей с границей другого блока, такую часть границы будем называть контактирующей. Неконтактирующая часть может быть свободной или подчиненной внешним воздействиям. Предполагается, что в каждой области Ω_b ставится краевая задача для систем дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными, своими в каждой области, коэффициентами.

Краевую задачу для системы P дифференциальных уравнений в частных производных в блочной трехмерной области Ω можно записать для каждого блока в виде

$$\mathbf{K}_b(\partial x_1, \partial x_2, \partial x_3)\boldsymbol{\varphi}_b = \\ = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{K}\sum_{p=1}^{P} A^b_{spmnk}\varphi^{(m)(n)(k)}_{bp,x_1x_2x_3} = \mathbf{g}_b(\mathbf{x}), \tag{1}$$

$$A^b_{sqmnk} = \text{const}, \quad \mathbf{g}_b = \{g_{bs}\},$$

$$s = 1, 2, \ldots, P_b,$$

$$\boldsymbol{\varphi}_b = \{\varphi_{b1}, \varphi_{b2}, \ldots, \varphi_{bP}\}, \quad b = 1, 2, \ldots, B.$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_s\}, \quad \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varphi}(x_1, x_2, x_3),$$

$$\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_b.$$

На общей, контактирующей, границе $\partial\Omega_b \cap \partial\Omega_d$ задаются следующие граничные условия со-

[1]Отдельные фрагменты работы выполнены при поддержке РФФИ (06-01-00295, 06-01-08017, 06-08-00671), РФФИ_р_юг (06-01-96802, 06-01-96805, 06-05-96806, 06-01-96634, 06-01-96638), проекта НШ-4839.2006.1, программ отделения ЭММПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН.

[2]Евдокимова Ольга Владимировна, канд. физ.-мат. наук, заведующая кафедрой художественного проектирования костюма Кубанского государственного университета.

пряжения

$$\mathbf{R}_b(\partial x_1,\partial x_2,\partial x_3)\boldsymbol{\varphi}_b+\mathbf{R}_d(\partial x_1,\partial x_2,\partial x_3)\boldsymbol{\varphi}_d=$$
$$=\sum_{m=1}^{M_1}\sum_{n=1}^{N_1}\sum_{k=1}^{K_1}\sum_{p=1}^{P}\Big[B^b_{spmnk}\varphi^{(m)(n)(k)}_{bp,x_1x_2x_3}+$$
$$+B^d_{spmnk}\varphi^{(m)(n)(k)}_{dp,x_1x_2x_3}\Big]=f_{bds},\quad (2)$$

$$s=1,2,\ldots,s_{b0}<P,\quad \mathbf{x}\in\partial\Omega_b\cap\partial\Omega_d,$$
$$M_1<M,\quad N_1<N,\quad K_1<K,$$
$$b,d=1,2,\ldots,B.$$

Краевая задача исследуется в пространствах медленно растущих обобщенных функций $\mathbf{H_s}(\Omega)$, описанных в [1, 2].

Заметим, что неоднородный член в правой части системы (1), как правило, свидетельствует о внешних воздействиях на изучаемый объект.

Если краевая задача для систем дифференциальных уравнений в частных производных содержит также производные по времени, а именно, члены $\partial^r\varphi_{bp}/\partial t^r$, то после применения преобразования Лапласа по параметру t с параметром p при ненулевых начальных условиях также будет получаться неоднородная система уравнений (1), в которой правый член несет информацию о начальных условиях в области. Учитывая это обстоятельство, не будем выделять отдельно случай нестационарной задачи, помня, что краевая задача содержит параметр преобразования Лапласа p, по которому в конце построения решения необходимо сделать обращение интегрального преобразования. Следуя [1, 2], изложим схему применения дифференциального метода факторизации к таким краевым задачам.

Сведем краевую задачу к системе функциональных уравнений, рассматривая каждую область Ω_b в отдельности. В результате приходим к системе функциональных уравнений вида

$$\mathbf{K}_b(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\Phi}_b=\iint\limits_{\partial\Omega_b}\boldsymbol{\omega}_b-\mathbf{G}_b(\boldsymbol{\alpha}),\qquad (3)$$

$$\mathbf{G}_b(\boldsymbol{\alpha})=\iiint\limits_{\Omega_b}\mathbf{g}_b(\mathbf{x})\exp\left(i\langle\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle\right)dx_1x_2x_3,$$

$$\mathbf{K}_b(\alpha)\equiv-\mathbf{K}_b(-i\alpha_1,-i\alpha_2,-i\alpha_3)=\|k_{bnm}(\boldsymbol{\alpha})\|,$$
$$\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3,$$
$$b=1,2,\ldots,B.$$

Вид и описание всех участвующих в этой системе обозначений заимствованы из [1]. В частности, $\boldsymbol{\omega}_b$ — вектор внешних форм краевой задачи в области Ω_b.

2. В соответствии с правилами дифференциального метода факторизации дальнейшее исследование задачи предполагает факторизацию матрицы-функции $\mathbf{K}_b(\alpha_3^\nu)$, даваемой формулой (3). Для этого выберем матрицу-функцию $\mathbf{K}_b^*(\alpha_3^\nu,m)$ порядка P_b-1, получающуюся вычеркиванием строки и столбца под номером m у сопряженной матрицы-функции $\mathbf{K}_b^*(\alpha_3^\nu)$, такую, что нули ξ_n^ν ее определителя $Q_b(\alpha_3^\nu)=\det\mathbf{K}_b(\alpha_3^\nu,m)$ не совпадают с нулями z_{s+}^ν, z_{s-}^ν определителя $K_b(\alpha_3^\nu)=\det{}^\nu\mathbf{K}_b(\alpha_3^\nu)$ [1].

Обозначим элементы обратной матрицы-функции в виде

$$[\,\mathbf{K}_b^*(\alpha_3^\nu,m)\,]^{-1}=\left\|Q_b^{-1}Q_{psb}\right\|.$$

Тогда элементы матрицы-функции $\mathbf{K}^{-1}(\alpha_3^\nu,-)$, имеющей вид

$$\mathbf{K}_b^{-1}\left(\alpha_{3,}^\nu-\right)=$$
$$=\begin{pmatrix}1 & & & & & 0\\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ S_{m1} & S_{m2} & \ldots & S_{mm} & \ldots & S_{mN}\\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1\end{pmatrix},\quad (4)$$

допускают интегральное представление в форме

$$S_{mp}(\alpha_3^\nu)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\mp}\sum_{s=1}^{N}{}'\frac{Q_{psb}(u_3)K_{ms}(u_3)du_3}{Q_b(u_3)K_b(u_3)(u_3-\alpha_3^\nu)}-$$
$$-\left(\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}\right)\frac{R^0_{mp}(\alpha_3^\nu)}{K_b(\alpha_3^\nu)},\quad (5)$$
$$m\neq p,$$

$$\frac{R^0_{mp}(\alpha_3^\nu)}{K_b(\alpha_3^\nu)}=\frac{Z_{mp}(\alpha_3^\nu)}{Q_b(\alpha_3^\nu)K_b(\alpha_3^\nu)}+$$
$$+\sum_n\frac{Z_{mp}(\xi_n^\nu)}{Q_b'(\xi_n^\nu)K_b(\xi_n^\nu)(\xi_n^\nu-\alpha_3^\nu)},$$

$$S_{mm}(\alpha_3^\nu)=K_b^{-1}(\alpha_3^\nu),\quad \alpha_3^\nu\in\lambda_\mp,$$

$$Z_{mp}(\alpha_3^\nu)=\sum_{s=1}^{N}{}'Q_{psb}(\alpha_3^\nu)K_{ms}(\alpha_3^\nu).$$

Здесь замкнутый контур Γ_+ занимает положение, при котором область λ_+ содержит только нули z^ν_{s+}, z^ν_{s-}, а область λ_- — только нули ξ^ν_n. Замкнутый контур Γ_- охватывает область, содержащую все нули z^ν_{s+}, z^ν_{s-}, ξ^ν_n.

Из этого представления следует, что элементы матрицы-функции $\mathbf{K}_b^{-1}\left(\alpha^\nu_3, -\right)$ являются рациональными функциями, единственными особенностями которых являются нули z^ν_{s+}, z^ν_{s-}, причем член, содержащий их, выделен явно.

Граничные условия в соответствии с алгоритмом применения дифференциального метода факторизации в случаях неконтактирующих границ применяются в соответствии с правилами, оговоренными в [1–3].

Удовлетворение граничных условий осуществляется по следующей схеме. Вначале граничные условия на неконтактирующей границе для каждого отдельного блока вносятся в соответствующие векторы внешних форм функциональных уравнений (3). При контакте блоков на общих границах соседних блоков выполняются условия сопряжения (2), которые могут, в зависимости от свойств описываемых полей, включать некоторые соотношения для решений и их производных. В простейшем случае это равенство решений и их производных на общей границе при переходе из одного блока в соседний. Эти соотношения должны быть внесены в соответствующие векторы внешних форм функциональных уравнений (3), предварительно разрешенных относительно неизвестных на границе производных по нормали. В результате получаются псевдодифференциальные уравнения вида

$$\sum_{p=1}^{N} C^{\nu-}_{bpmn}\left[\iint\limits_{\partial\Omega} \omega_{bp}(\alpha^\nu_1, \alpha^\nu_2, z^\nu_{n-}) - \right.$$
$$\left. - \mathbf{G}_b(\alpha^\nu_1, \alpha^\nu_2, z^\nu_{n-})\right] = 0, \quad (6)$$

$$C^{\nu\pm}_{bpmn} = -\sum_{s=1}^{N}{}' \frac{G_{bps}(z^\nu_{n\pm})K_{bms}(z^\nu_{n\pm})}{G_b(z^\nu_{n\pm})K'_b(z^\nu_{n\pm})},$$
$$m \neq s, \quad m \neq p,$$
$$C^{\nu\pm}_{bmmn} = \frac{1}{K'_b(z^\nu_{n\pm})},$$
$$n\pm \equiv n_b\pm = 1, 2, \ldots, S^\nu_b(\pm).$$

Решение уравнений обеспечит выполнение контактных граничных условий (2) при решении псевдодифференциальных уравнений, что доказывается по схеме, изложенной в [4].

Опуская дальнейшие преобразования, изложенные в [1, 2], получаем в случае блоков, занимающих выпуклые области, представление решения в каждом блоке в виде

$$\boldsymbol{\varphi}_b(\mathbf{x}^\nu) = \frac{1}{8\pi^3}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_b^{-1}(\alpha^\nu_3, +)\mathbf{K}^{-1}_{blm}(\alpha^\nu_3, -)\times$$
$$\times\left[\iint\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{\omega}_b - \mathbf{G}_b(\boldsymbol{\alpha}^\nu)\right] e^{-i\langle\alpha^\nu_3 x^\nu_3\rangle} d\alpha^\nu_1 d\alpha^\nu_2 d\alpha^\nu_3,$$
$$\mathbf{x}^\nu \in \Omega_b.$$

Решение можно сделать более наглядным, вычислив интеграл по параметру α^ν_3 по теории форм-вычетов Лере. В результате имеем

$$\boldsymbol{\varphi}_b(\mathbf{x}^\nu) = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_s e^{-i(\alpha^\nu_1 x^v_1 + \alpha^\nu_2 x^\nu_2)}\times$$
$$\times\left[\mathbf{K}_b^{-1}\left(i\frac{\partial}{\partial x^\nu_3}\right)\boldsymbol{\Phi}_{+b}(\alpha^\nu_1, \alpha^\nu_2, z^v_{s+})e^{-iz^\nu_{s+}x^\nu_3} - \right.$$
$$\left. -\mathbf{K}_b^{-1}\left(i\frac{\partial}{\partial x^\nu_3}\right)\boldsymbol{\Phi}_{-b}(\alpha^\nu_1, \alpha^\nu_2, z^\nu_{s-})e^{-iz^\nu_{s-}x^\nu_3}\right] d\alpha^\nu_1 d\alpha^\nu_2,$$

$$t_{m\pm b}\left(\alpha^\nu_1, \alpha^\nu_2, z^\nu_{s\pm}\right) = -\sum_{p=1}^{P}\iint\limits_{\partial\Omega_{\pm b}} \frac{\omega_{pb}Z_{mp}(z^\nu_{s\pm})}{Q_b(z^\nu_{s\pm})K'_b(z^\nu_{s\pm})} +$$
$$+\sum_{p=1}^{P}\frac{G^\pm_{pb}Z_{mp}(z^\nu_{s\pm})}{Q_b(z^\nu_{s\pm})K'_b(z^\nu_{s\pm})},$$

$$b = 1, 2, \ldots, B, \quad \boldsymbol{\Phi}_{\pm b} = \{0, 0, \ldots, 0, t_{m\pm b}, 0, \ldots, 0\}.$$

В этой формуле граница $\partial\Omega_b$ и функции $\mathbf{G}_b$ для выбранного $x^\nu_3 < 0$, $\mathbf{x}^\nu \in \Omega$ разбиты по следующему правилу:

$$\iint\limits_{\partial\Omega_b} \boldsymbol{\omega}_b = \iint\limits_{\partial\Omega_{+b}} \boldsymbol{\omega}_b + \iint\limits_{\partial\Omega_{-b}} \boldsymbol{\omega}_b,$$

$$\iint\limits_{\partial\Omega_{+b}} \boldsymbol{\omega}_b \exp(-i\alpha^\nu_3 x^\nu_3) \to 0, \quad \operatorname{Im}\alpha^\nu_3 \to \infty,$$

$$\iint\limits_{\partial\Omega_{-b}} \boldsymbol{\omega}_b \exp(-i\alpha^\nu_3 x^\nu_3) \to 0, \quad \operatorname{Im}\alpha^\nu_3 \to -\infty,$$

$$\mathbf{G}_b = \mathbf{G}^+_b + \mathbf{G}^-_b, \quad \mathbf{G}^+_b \exp(-i\alpha^\nu_3 x^\nu_3) \to 0,$$
$$\operatorname{Im}\alpha^\nu_3 \to \infty,$$

$$\mathbf{G}_b^- \exp(-i\alpha_3^\nu x_3^\nu) \to 0, \quad \operatorname{Im}\alpha_3^\nu \to -\infty.$$

Построенные решения были проверены на примерах краевых задач для слоистой среды, решаемых точно, результаты совпали.

Благодаря доказанной в работе возможности решения дифференциальным методом факторизации краевых задач для неоднородных дифференциальных уравнений в блочных структурах открывается возможность применения этого метода для исследования и решения кревых задач как для систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, так и для нелинейных случаев, используя известные приемы покрытия областей задания краевых задач сетками [5].

Автор благодарит члена-корреспондента РАН Д. А. Индейцева за ценные советы и обсуждение работы.

Литература

1. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.* К теории блочных и наноструктур. Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2007. № 4. С. 42–48.
2. *Евдокимова О. В.* Дифференциальный метод факторизации в механике разрушения, материаловедении и сейсмологии // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. № 4. С. 32–42.
3. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* Об интегральном и дифференциальном методах факторизации // ДАН. 2006. Т. 410. № 2. С. 168-172.
4. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* Выполнение граничных условий в дифференциальном методе факторизации. ДАН. 2007.
5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 742 с.

Статья поступила 24 июня 2007 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар
© Евдокимова О. В., 2007