М е х а н и к а

УДК 539.3

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ТРЕХ ПОДХОДОВ К РАСПРОСТРАНЕНИЮ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОДНОМЕРНЫХ УПРУГИХ ВОЛН[1]

Беляев А. К.[2], Беляев Н. А.[3]

COMPARATIVE ANALYSIS OF THREE APPROACHES TO PROPAGATION OF STOCHASTIC ONE-DIMENSIONAL ELASTIC WAVES

Belyaev A. K., Belyaev N. A.

Three approaches to the problem of 1-D wave propagation in media with random elastic and mass properties are studied, i. e. the method of integral spectral decomposition, the Fokker–Planck–Kolmogorov equation and the Dyson integral equation. Advantages and disadvantages of each approach are discussed. The approaches are shown to cover actually all possible problems of the harmonic wave propagation in heterogeneous or stochastic media. Hence, one can choose an appropriate strategy for solving a particular problem by means of a preliminary analysis of the problem and advantages of each approach.

Введение

Распространение сейсмических волн на большие расстояния вдоль земной поверхности, равно как и сквозь толщу земной коры, характеризуется тем, что волна распространяется в среде с неоднородными геофизическими параметрами. Анализ осложняется тем, что механические свойства среды, определяющие соотношения и граничные условия известны лишь с некоторой степенью достоверности. Несмотря на принципиально различную природу этих эффектов можно предложить теоретическое описание, учитывающее неоднородность среды и недостаточность статистической информации о параметрах среды в рамках одного и того же подхода. Этот единый подход использует идею распространения стохастических волн в средах со случайными упругими и массовыми характеристиками. Каждая случайная характеристика моделируется с помощью среднего значения, радиуса и интенсивности корреляций (т. е. два-три параметра), тогда задача распространения стохастических волн содержит минимальное количество параметров и тем не менее оказывается приспособленной для описания широкого класса волновых процессов. Важная для практики обратная задача идентификации механических характеристик также представляется разрешимой ввиду ограниченного числа параметров, подлежащих определению при условии, что известно волновое поле.

Актуальная проблема адекватного описания процесса распространения сейсмических волн находится в центре внимания уже многие десятилетия. Тем не менее, математические модели, используемые для ее решения, являются, как правило, сильно упрощенными и не всегда отражают суть сложных волновых процессов. В обширной литературе по данной тематике в основном рассматриваются различные типы волн в однородных средах. Неоднородные среды также являются объектом исследований, однако анализируются среды с некоторыми частными видами неоднородности плотности среды или упругих модулей. Решение общей и реалистической задачи распространения волн в сплошной среде с меняющимися массовыми и упругими характеристиками получено только для весьма частных случаев или с помощью асимптотических методов для слабонеоднородных сред.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ_р_юг (06-01-96641).

[2]Беляев Александр Константинович, д-р физ.-мат. наук, заместитель директора Института проблем машиноведения РАН.

[3]Беляев Никита Александрович, аспирант Института проблем машиноведения РАН.

Волны в случайных средах давно являются объектом внимания исследователей в различных областях естествознания, например, волны в неоднородной или турбулентной атмосфере представляют интерес для астрономии и радиофизики. Характерным для этих исследований является то, что вводится только одна случайная функция и рассматриваются слабонеоднородные среды, например в [1].

Настоящая статья предполагает аккумулирование имеющихся достижений и подходов с целью обобщения результатов на более сложные задачи. Такова задача о распространении волн в средах, где и плотность и упругие модули являются независимыми случайными функциями достаточно общего вида. Более того, такая постановка позволит одновременно учесть априрорную неопределенность физических параметров среды.

Предлагается три подхода к задаче о распространении стохастических сейсмических волн, моделируемых волнами в средах со случайными упругими и массовыми свойствами. Первый подход опирается на идею спектрального разложения по волновым числам. Второй — оперирует с аппаратом марковских цепей, известным также под именем уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова. Наконец, третий подход использует интегральное уравнение Дайсона, заимствованное из статистической физики. Обсуждены достоинства и недостатки каждого подхода. Показано, что эти подходы фактически покрывают все возможные задачи распространения гармонических волн в неоднородных или стохастических средах. Следовательно, посредством предварительного анализа рассматриваемой задачи, имея в виду сильные и слабые стороны каждого подхода, можно выбрать соответствующую стратегию решения. Следует добавить, что сравнительный анализ трех подходов при решении поставленной задачи позволяет провести определенную апробацию как каждого подхода, так и предлагаемой постановки задачи, увеличивая тем самым степень доверия к полученным результатам.

Рассматривается распространение одномерной гармонической волны частоты ω в полубесконечной области $x \geqslant 0$.

Волновое уравнение имеет вид

$$\left(Eu'\right)' + \rho\omega^2 u = 0,$$

где u — амплитуда перемещения, штрих означает дифференцирование по координате x. Модуль Юнга E и плотность ρ предполагаются случайными функциями

$$E\left(x\right) = \left\langle E\right\rangle \left[1 + \varepsilon\left(x\right)\right],$$
$$\rho\left(x\right) = \left\langle \rho\right\rangle \left[1 + r\left(x\right)\right],$$

где $\langle\rangle$ означает математическое ожидание случайной функции, а безразмерные случайные центрированные функции ε и r описывают соответственно случайную составляющую в модуле Юнга и плотности. Так как среда предполагается статистически однородной, то $\langle\rho\rangle$ и $\langle E\rangle$ не зависят от координаты x. В п. 1 и 2 обсуждается граничное условие Дирихле, которое предполагает задание перемещения H при $x = 0$, т. е. $u\left(0\right) = H$, где H — детерминировано.

1. Метод интегральных спектральных представлений

Параметры среды представляются в форме интеграла Фурье–Стильтьеса

$$\begin{aligned} E\left(x\right) &= \left\langle E\right\rangle \left[1 + \int \Xi\left(k\right)\exp\left(ikx\right)dk\right], \\ \rho\left(x\right) &= \left\langle \rho\right\rangle \left[1 + \int R\left(k\right)\exp\left(ikx\right)dk\right], \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $\Xi\left(k\right)$ и $R\left(k\right)$ — случайные Фурье-спектры, причем $\left\langle R\left(k\right)\right\rangle = \left\langle \Xi\left(k\right)\right\rangle = 0$. В свою очередь u допускает аналогичное спектральное представление

$$u\left(x\right) = \left\langle u\left(x\right)\right\rangle + \int U\left(k\right)\mu\left(k,x\right)\exp\left(ikx\right)dk, \tag{1.2}$$

где детерминированная функция $\mu\left(k,x\right)$ осуществляет амплитудно-частотную модуляцию однородного стохастического процесса $U\left(k\right)$, причем $\left\langle U\left(k\right)\right\rangle = 0$. Подставив (1.1) и (1.2) в волновое уравнение и взяв математическое ожидание, получаем

$$\frac{d^2\left\langle u\right\rangle}{dx^2} + \lambda_0^2\omega^2\left\langle u\right\rangle + \int\limits_{-\infty}^{\infty} S_{Eu}\left(k\right)\left[\frac{d^2\mu}{dx^2} + ik\frac{d\mu}{dx}\right]dk + \lambda_0^2\int\limits_{-\infty}^{\infty} S_{\rho u}\left(k\right)\mu dk = 0, \tag{1.3}$$

где через $\lambda_0 = \omega/\sqrt{\left\langle E\right\rangle/\left\langle \rho\right\rangle}$ обозначено «усредненное» волновое число. При выводе последнего уравнения использовано стандартное свойство ортогональности случайных спектров $\langle \Xi(k) U^*(k_1) \rangle = S_{Eu}(k)\,\delta(k-k_1)$; $\langle R(k) U^*(k_1) \rangle = S_{\rho u}(k)\,\delta(k-k_1)$, где S_{Eu} и $S_{\rho u}$ — спектральные плотности случайных процессов. Подставляя теперь (1.1) и (1.2) в волновое уравнение, умножая результат соответственно на $R^*(k')$ и $\Xi^*(k')$ и беря математическое ожидание, приходим к двум уравнениям

$$\left[\frac{d^2\mu}{dx^2} + 2ik\frac{d\mu}{dx} + \mu\left(\lambda_0^2 - k^2\right)\right] S_{Eu}(k) + \\ + \left[\frac{d^2\langle u\rangle}{dx^2} + ik\frac{d\langle u\rangle}{dx}\right] S_E(k) + \\ + \lambda_0^2 \langle u\rangle S_{Eu}(k) = 0, \quad (1.4)$$

$$\left[\frac{d^2\mu}{dx^2} + 2ik\frac{d\mu}{dx} + \mu\left(\lambda_0^2 - k^2\right)\right] S_{\rho u}(k) + \\ + \left[\frac{d^2\langle u\rangle}{dx^2} + ik\frac{d\langle u\rangle}{dx}\right] S_{E\rho}(k) + \\ + \lambda_0^2 \langle u\rangle S_{\rho}(k) = 0, \quad (1.5)$$

при выводе которых использовались условия статистической ортогональности Винера–Хинчина. При выводе этих уравнений были опущены третьи моменты, таким образом произведено замыкание системы, в противном случае приходим к бесконечной иерархической системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Другими словами, настоящий анализ сводится к среднему полю и матрице спектральных плотностей, что типично для корреляционной теории [2].

Так как (1.3)–(1.5) линейны по $\langle u\rangle$ и μ, то решение разыскивается в форме

$$\langle u\rangle = B\exp(\lambda x), \quad \mu = M\exp(\lambda x),$$

где λ — собственное значение. Уравнения (1.4) и (1.5) дают выражения для S_{Eu} и $S_{\rho u}$, а подстановка их в (1.3) приводит к характеристическому уравнению для λ

$$\lambda^2 + \lambda_0^2 - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\lambda+ik)^2 + \lambda_0^2} \times \\ \times \Big[\lambda^2(\lambda+ik)^2 S_E + 2\lambda_0^2\lambda(\lambda+ik)S_{E\rho} + \\ + \lambda_0^4 S_\rho\Big]\,dk = 0. \quad (1.6)$$

Рассмотрим частные случаи. Пусть модуль Юнга и массовая плотность являются статистически независимыми случайными функциями диффузионного типа со спектральными плотностями

$$S_E(k) = \frac{\sigma_E^2}{\pi}\frac{\alpha_E}{k^2+\alpha_E^2}, \quad S_\rho(k) = \frac{\sigma_\rho^2}{\pi}\frac{\alpha_\rho}{k^2+\alpha_\rho^2},$$

$$S_{E\rho}(k) = 0,$$

где σ_ε и σ_r — стандартные отклонения, тогда как α_ε^{-1} и α_r^{-1} — радиусы корреляции. Характеристическое уравнение (1.6) принимает вид

$$\lambda^2 + \lambda_0^2 - \frac{b_E^2\lambda^2(\lambda+\alpha_E)^2}{(\lambda+\alpha_E)^2+\lambda_0^2} - \frac{b_\rho^2\lambda_0^4}{(\lambda+\alpha_\rho)^2+\lambda_0^2} = 0.$$

Анализ этого уравнения, левая часть которого представляет собой полином шестого порядка, довольно трудоемкий и может быть произведен асимптотически только для слабо неоднородных сред ($b_E \ll 1$, $b_\rho \ll 1$).

Полный анализ проведен для случая, когда случайность в модуле Юнга E и массовой плотности ρ является полностью коррелированной, т. е.

$$\begin{aligned} E(x) &= \langle E\rangle\left[1 + b_E q(x)\right], \\ \rho(x) &= \langle \rho\rangle\left[1 + b_\rho q(x)\right], \\ S_q(k) &= \frac{\sigma^2}{\pi}\frac{\alpha}{k^2+\alpha^2}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где $q(x)$ — центральная экспоненциально-коррелированная случайная функция. Представление (1.7) моделирует среды с неидеальностями и является довольно гибким. Выбирая коэффициенты b_E и b_ρ надлежащим способом, можно изучить широкий класс проблем, например, $b_\rho = 0$ описывает среду со случайными упругими свойствами и детерминированной плотностью. Представление (1.7) позволяет увидеть ограничения, недостатки и достоинства данного подхода. Соответствующее характеристическое уравнение

$$P(\lambda) = \left[\lambda^2 + \lambda_0^2\right]\left[(\lambda+\alpha)^2 + \lambda_0^2\right] - \\ - \sigma^2\left[b_E\lambda(\lambda+\alpha) + b_\rho\lambda_0^2\right]^2 = 0 \quad (1.8)$$

является полиномом четвертого порядка и сводится к квадратному уравнению для $\lambda(\lambda+\alpha)$, имеющему 4 корня

$$\lambda_{1,2,3,4} = -\frac{\alpha}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \lambda_0^2\frac{1-\sigma^2 b_E b_\rho \pm\sqrt{\Delta}}{1-\sigma^2 b_E^2}},$$

с дискриминантом

$$\Delta = \sigma^2(b_E - b_\rho)^2 + \alpha^2\lambda_0^{-2}\left(\sigma^2 b_E^2 - 1\right).$$

Мнимая часть λ гарантирует волновой характер распространяющегося возмущения, т.е. волновое движение невозможно, если характеристическое уравнение (1.8) имеет только вещественные собственные значения. Анализ показал, что волновое решение отсутствует, если выполнено хотя бы одно из условий

$$\sigma b_E > 1; \quad \lambda_0^2 < \frac{\alpha^2}{4}\frac{\sigma b_E - 1}{\sigma b_\rho + 1}, \tag{1.9}$$

$$\sigma b_E < 1; \quad \sigma\left(b_E + b_\rho\right) > 2; \tag{1.10}$$

$$4\lambda_0^2\frac{1-\sigma^2 b_E b_\rho}{1-\sigma^2 b_E^2} < \alpha^2 < \lambda_0^2\frac{\sigma^2\left(b_E+b_\rho\right)^2}{1-\sigma^2 b_E^2}.$$

Неравенства (1.9) и (1.10) могут грубо трактоваться следующим образом: если стандартное отклонение в модуле Юнга превышает его среднее значение, ($\sigma b_E > 1$) или стандартное отклонение в массовой плотности больше, чем ее среднее значение ($\sigma b_\rho > 1$), то волновое движение невозможно. Это означает, что существенно неоднородные среды не могут быть проанализированы с помощью этого подхода. Условия (1.9) и (1.10) сводятся к известным условиям для среды с единственным случайным полем (случайная массовая плотность или случайный модуль Юнга), полученным в [3].

Пусть λ_1 и λ_2 описывают волны в положительном направлении x. Удовлетворяя условию излучения Зоммерфельда, получаем

$$\langle u\rangle = \sum_{n=1}^{2} B_n \exp\left(\lambda_n x\right),$$

$$\mu\left(k,x\right) = -\frac{S_q}{S_{uq}}\sum_{n=1}^{2} B_n \times \\ \times \frac{b_E\lambda_n\left(\lambda_n+ik\right)+b_\rho\lambda_0^2}{\left(\lambda_n+ik\right)^2+\lambda_0^2}\exp\left(\lambda_n x\right).$$

Рассмотрим в качестве примера граничное условие Дирихле. Как следует из (1.2), граничное условие (1.4) выполнено и вторые моменты обращаются в ноль при $x = 0$, если $\langle u(0)\rangle = H$, $\mu(k,0) = 0$, что приводит к следующим уравнениям для B_1 и B_2

$$B_1 + B_2 = H,$$

$$B_1\frac{b_E\lambda_1\left(\lambda_1+ik\right)+b_\rho\lambda_0^2}{\left(\lambda_1+ik\right)^2+\lambda_0^2} + \\ + B_2\frac{b_E\lambda_2\left(\lambda_2+ik\right)+b_\rho\lambda_0^2}{\left(\lambda_2+ik\right)^2+\lambda_0^2} = 0,$$

что и завершает решение.

Проведенный анализ позволяет указать достоинства подхода. Этот подход применим для произвольной спектральной плотности и может быть легко обобщен на двумерные и трехмерные задачи. Недостатки метода: а) удается получить только среднее и вторые моменты; б) подход трудно обобщить на нелинейные задачи; в) подход справедлив только для слабонеоднородных сред.

2. Уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова

Второй подход к распространению гармонической волны в одномерной среде со случайными параметрами базируется на теории непрерывных марковских процессов. Функция вероятности перехода состояния системы для таких процессов управляется линейным дифференциальным уравнением в частных производных, известным как уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова (FPK) [4, 5].

Для начала рассмотрим случай распространения волны в среде с детерминированным модулем Юнга ($\varepsilon = 0$) и случайной массовой плотностью. Предположим, что случайная функция $r = \xi(x)$ — пространственный белый шум интенсивности s. Чтобы применить FPK-уравнение, введем новые переменные $v_1 = u$, $v_2 = u'$ и представим волновое уравнение в виде двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$v_1' = v_2, \quad v_2' = -\lambda_0^2 v_1 - \lambda_0^2\xi v_1.$$

При условии, что ξ — гауссова случайная функция, функция вероятности перехода p описывается FPK-уравнением

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\sum_{n=1}^{N}\frac{\partial}{\partial v_n}\left[\chi_n p\right] + \\ + \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial v_n \partial v_m}\left[\gamma_{nm} p\right]. \tag{2.1}$$

В этом случае $N = 2$, дрейф χ_n и коэффициенты диффузии γ_{nm} равны [4]

$$\begin{gathered} \chi_1 = v_2, \quad \chi_2 = -\lambda_0^2 v_1, \\ \gamma_{11} = \gamma_{12} = \gamma_{21} = 0, \quad \gamma_{22} = \frac{s}{2}\lambda_0^4 v_1^2. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Подставляя (2.2) в FPK уравнение, умножая результат последовательно на v_1 и v_2 и интегрируя по пространству v_1 и v_2, приходим к следующим уравнениям для средних значений переменных:

$$\langle v_1\rangle' - \langle v_2\rangle = 0, \quad \langle v_2\rangle' + \lambda_0^2 \langle v_1\rangle = 0.$$

Система уравнений решается посредством замены $\langle v_k\rangle = V_k e^{\lambda x}$, $k = 1, 2$, которая приводит к характеристическому уравнению $\lambda^2 + \lambda_0^2 = 0$ с корнями $\lambda_{1,2} = \pm i\lambda_0$. Собственное значение $\lambda_2 = -i\lambda_0$ удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда, так как оно описывает гармонические волны, распространяющиеся в положительном направлении x. Граничное условие Дирихле дает $\langle v_1(x)\rangle = H\exp(-i\lambda_0 x)$, то есть среднее поле в среде с плотностью, имеющей стохастическую компоненту в виде пространственного белого шума, совпадает с детерминированным полем в однородной среде.

Далее умножим FPK-уравнение последовательно на v_1^2, $v_1 v_2$ и v_2^2 и проинтегрируем результат по пространству v_1 и v_2 с тем, чтобы получить уравнения для вторых моментов

$$\left\langle v_1^2\right\rangle' - 2\langle v_1 v_2\rangle = 0, \quad \langle v_1 v_2\rangle' + \lambda_0^2\left\langle v_1^2\right\rangle - \left\langle v_2^2\right\rangle = 0,$$

$$\left\langle v_2^2\right\rangle' - s\lambda_0^4\left\langle v_1^2\right\rangle + 2\lambda_0^2\langle v_1 v_2\rangle = 0.$$

Чтобы решить эти уравнения, подставим $\langle v_k v_n\rangle = W_{kn} e^{\Lambda x}$, $k, n = 1, 2$, и придем к характеристическому уравнению

$$\Lambda^3 + 4\lambda_0^2\Lambda - 2s\lambda_0^4 = 0,$$

которое имеет один вещественный положительный корень и два комплексно-сопряженных корня. Только один корень этого уравнения удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда

$$\Lambda = \lambda_0\left[-h + \frac{1}{3}h^{-1} - i\sqrt{3}\left(h + \frac{1}{3}h^{-1}\right)\right],$$

$$h = \frac{1}{2}\sqrt[3]{s\lambda_0 + \sqrt{s^2\lambda_0^2 + 2}}.$$

Граничное условие Дирихле $\left\langle v_1^2(0)\right\rangle = H^2$ приводит к следующим результатам:

$$\left\langle v_1^2\right\rangle = H^2\exp(\Lambda x),$$

$$\langle v_1 v_2\rangle = -H^2\frac{\Lambda}{2}\exp(\Lambda x),$$

$$\left\langle v_2^2\right\rangle = H^2\left(\lambda_0^2 - \frac{1}{2}\Lambda^2\right)\exp(\Lambda x).$$

Последнее уравнение указывает на экспоненциальное снижение вторых моментов стохастической волны, что противоречит здравому смыслу с учетом неизменного среднего значения стохастических волн.

Для реалистического моделирования упругих и массовых параметров среды необходимо произвести предварительную фильтрацию пространственного белого шума. Дальнейший анализ ограничен полностью коррелированной стохастичностью в модуле Юнга и массовой плотности (1.7). Это позволяет сравнить результаты первого и второго подхода. Представление переменных в виде $v_1 = u$, $v_2 = u'$, $v_3 = q$ приводит к трем уравнениям первого порядка

$$v_1' = v_2,$$

$$v_2' = \frac{\alpha b_E v_2 v_3 - \lambda_0^2(1 + b_\rho v_3)v_1}{1 + b_E v_3} - \frac{b_E v_2}{1 + b_E v_3}\xi,$$

$$v_3' = -\alpha v_3 + \xi,$$

где последнее уравнение — уравнение фильтра, ξ — пространственный белый шум интенсивности $s = 2\alpha\sigma^2$. FPK-уравнение (2.1) имеет теперь более высокий порядок($N = 3$) и принимает вид

$$\begin{aligned}\frac{\partial p}{\partial x} = &-\frac{\partial}{\partial v_1}[v_2 p] + \\ &+ \lambda_0^2\frac{\partial}{\partial v_2}\left[\frac{\alpha b_E v_2 v_3 - \lambda_0^2(1 + b_\rho v_3)v_1}{1 + b_E v_3}p\right] + \\ &+ \alpha_\rho\frac{\partial}{\partial v_n}[v_3 p] + \frac{\alpha\sigma^2 b_E^2}{(1 + b_E v_3)^2}\frac{\partial^2}{\partial v_2^2}\left[p v_2^2\right] - \\ &- 2\alpha\sigma^2 b_E\frac{\partial^2 p}{\partial v_2\partial v_3}\left[\frac{v_2 p}{1 + b_E v_3}\right] + \alpha\sigma^2\frac{\partial^2 p}{\partial v_3^2}. \quad (2.3)\end{aligned}$$

Полученное уравнение намного сложнее предыдущего (2.1), (2.2), так как его коэффициенты — рациональные функции, а не полиномы. Умножая (2.3) последовательно на v_1, $v_1 v_3$, $v_2(1 + b_E v_3)^2$ и $v_2 v_3(1 + b_E v_3)^2$ и интегрируя по пространству переменных, получаем уравнения для $\langle v_1\rangle$, $\langle v_2\rangle$, $\langle v_1 v_3\rangle$ и $\langle v_2 v_3\rangle$

$$\langle v_1\rangle' - \langle v_2\rangle = 0, \langle v_1 v_3\rangle' - \langle v_2 v_3\rangle + \alpha\langle v_1 v_3\rangle = 0,$$

$$\begin{aligned}&\lambda_0^2\left(1 + b_E b_\rho\sigma^2\right)\langle v_1\rangle + \lambda_0^2(b_E + b_\rho)\langle v_1 v_3\rangle + \\ &+ \left(1 + b_E^2\sigma^2\right)\langle v_2\rangle' + 3\alpha b_E\sigma^2\langle v_2\rangle + 2b_E\langle v_2 v_3\rangle' + \\ &+ \alpha\langle v_2 v_3\rangle = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\lambda_0^2\sigma^2(b_E + b_\rho)\langle v_1\rangle + \lambda_0^2\left(1 + 3b_E b_\rho\sigma^2\right)\langle v_1 v_3\rangle + \\ &+ 2b_E^2\sigma^2\langle v_2\rangle' + \alpha b_E\langle v_2\rangle + \left(1 + 3b_E^2\sigma^2\right)\langle v_2 v_3\rangle' + \\ &+ \alpha\left(1 + 6b_E^2\sigma^2\right)\langle v_2 v_3\rangle = 0. \quad (2.4)\end{aligned}$$

Последние уравнения получены посредством гауссова замыкания. Известно, что FPK-уравнение дает бесконечную иерархию связанных дифференциальных уравнений [4, 5], т. е. требуется замыкание. Самое простое замыкание — гауссово, т. е. предполагается, что v_1 и v_2 являются квазигауссовыми. Так как ξ и v_3 являются гауссовыми, то могут быть использованы свойства гауссова распределения, что позволяет выразить неизвестный момент высшего порядка в терминах моментов более низких порядков, например, в терминах моментов до второго порядка посредством выражений $\langle v_1 v_3^2 \rangle = \sigma^2 \langle v_1 \rangle$ и т. д. Нетрудно убедиться, что нулевой детерминант системы с замыканием на втором порядке дает уравнение, не совпадающее с характеристическим уравнением интегрального спектрального разложения (1.8). Это объясняется тем, что FPK-уравнение было умножено на полиномы третьего и более высокого порядков, а именно, $v_2 (1 + b_E v_3)^2$ и $v_2 v_3 (1 + b_E v_3)^2$. Моменты третьего и более высокого порядков всегда появляются в этой процедуре. Они были выражены через моменты до второго порядка, что автоматически привело к снижению точности подхода.

Можно получить характеристическое уравнение, совпадающее с уравнением интегрального спектрального разложения (1.8), если ввести другие переменные $v_1 = u$, $v_2 = u' (1 + b_E q)$, $v_3 = q$, которые приводят к трем стохастическим дифференциальным уравнениям первого порядка

$$\begin{gathered} v_1' (1 + b_E v_3) - v_2 = 0, \\ v_2' + \lambda_0^2 (1 + b_\rho v_3) v_1 = 0, \\ v_3' + \alpha v_3 = \xi. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Стохастическое усреднение первого и второго уравнения дает

$$\begin{gathered} \langle v_1 \rangle' + b_E (\lambda + \alpha) \langle v_1 v_3 \rangle - \langle v_2 \rangle = 0, \\ \langle v_2 \rangle' + \lambda_0^2 [\langle v_1 \rangle + b_\rho \langle v_1 v_3 \rangle] = 0. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Другие два уравнения получаются путем умножения двух первых (2.5) на v_3 и вычисления математического ожидания

$$\langle v_1 v_3 \rangle' + b_E \sigma^2 \langle v_1 \rangle' + \alpha \langle v_1 v_3 \rangle - \langle v_2 v_3 \rangle = 0,$$

$$\langle v_2 v_3 \rangle' + \lambda_0^2 \left[\langle v_1 v_3 \rangle + b_\rho \sigma^2 \langle v_1 \rangle \right] + \\ + \alpha \langle v_2 v_3 \rangle = 0. \tag{2.7}$$

При получении уравнений (2.6) и (2.7) были сделаны два предположения: а) $\langle \xi v_1 \rangle = \langle \xi v_2 \rangle = 0$, что является стандартным предположением FPK-уравнения; б) ξ и v_3 является гауссовыми, а v_1 и v_2 квазигауссовыми, что разрешает гауссово замыкание $\langle v_1 v_3^2 \rangle = \sigma^2 \langle v_1 \rangle$.

Так как (2.6) и (2.7) линейны по моментам, подстановка $\langle v_k v_n \rangle = W_{kn} e^{\lambda x}$, $k, n = 1, 2$ приводит к характеристическому уравнению (1.8). Это означает, что новые переменные подходят лучше, чем предыдущие, вследствие того, что вновь введенная переменная $v_2 = u' E / \langle E \rangle$ является безразмерным осевым напряжением и имеет ясный физический смысл.

Пусть λ_1, и λ_2 — собственные значения, удовлетворяющие условию излучения Зоммерфельда, тогда общее решение имеет вид $\langle v_1 \rangle = A_1 \exp(\lambda_1 x) + A_2 \exp(\lambda_2 x)$.

Граничное условие Дирихле сводится к следующим уравнениям

$$x = 0, \quad \langle v_1 \rangle = H, \quad \langle v_1 v_3 \rangle = 0,$$

позволяющим определить константы интегрирования

$$A_1 = H \left[1 - \frac{\lambda_0^2 + \lambda_1^2}{\lambda_0^2 + \lambda_2^2} \frac{b_\rho \lambda_0^2 + b_E \lambda_1 (\lambda_1 + \alpha)}{b_\rho \lambda_0^2 + b_E \lambda_2 (\lambda_2 + \alpha)} \right]^{-1}, \tag{2.8}$$
$$A_2 = H - A_1.$$

Моменты $\langle v_2 \rangle$, $\langle v_1 v_3 \rangle$ и $\langle v_2 v_3 \rangle$ получаются из (2.4) после подстановки (2.8).

Уравнения для остальных вторых моментов, а именно $\langle v_1^2 \rangle$, $\langle v_1 v_2 \rangle$ и $\langle v_2^2 \rangle$, получаются умножением (2.5) на v_1, v_2 и осреднением. Результат — три неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнения первого порядка

$$\langle v_1^2 \rangle' - 2 \langle v_1 v_2 \rangle = \alpha \langle v_1 \rangle \langle v_1 v_3 \rangle - \\ - \langle v_1 \rangle' \langle v_1 v_3 \rangle - \langle v_1 \rangle \langle v_1 v_3 \rangle',$$

$$(v_1 v_2)' + \lambda_0^2 \langle v_1^2 \rangle - \langle v_2^2 \rangle = -2 b_\rho \lambda_0^2 (v_1) (v_1 v_3) - \\ - b_E \left[\langle v_1 \rangle' \langle v_2 v_3 \rangle - \langle v_2 \rangle \langle v_1 v_3 \rangle' - \alpha \langle v_2 \rangle \langle v_1 v_3 \rangle \right],$$

$$\langle v_2^2 \rangle' + \lambda_0^2 \langle v_1 v_2 \rangle = \\ = -2 b_\rho \lambda_0^2 \left[\langle v_1 \rangle \langle v_2 v_3 \rangle + \langle v_2 \rangle \langle v_1 v_3 \rangle \right],$$

которые могут быть легко решены.

Главное преимущество использования FPK-уравнения состоит в том, что могут быть получены статистические моменты любого порядка. Существует даже некоторый класс задач, допускающих точное решение для функции вероятности перехода [6]. Недостатки подхода таковы: а) подход применим только для случайных процессов с рациональной спектральной плотностью, которая получается путем фильтрации белого шума; б) каждый фильтр увеличивает порядок системы уравнения; в) трудности быстро увеличиваются с ростом порядка системы; г) подход применим только для одномерных волн; д) подход дает точные решения только для систем с полиномиальными коэффициентами; е) подход чувствителен к выбору переменных. Поскольку этот подход дает характеристическое уравнение интегрального спектрального представления, то только слабо неоднородные случайные среды могут быть проанализированы посредством FPK уравнения.

3. Интегральное уравнение Дайсона

В отличие от предыдущих подходов, которые имеют дело со случайной массовой плотностью и случайным модулем Юнга, вводятся новые переменные: независимая y и зависимая U

$$y = \langle a \rangle \int\limits_0^x \frac{d\xi}{a(\xi)}; \quad U(y) = \sqrt{z} u(x,\omega), \tag{3.1}$$

где $a = \sqrt{E/\rho}$ — скорость звука и $z = \sqrt{E\rho}$ — акустический импеданс. Исходная задача сведена к распространению волны в упругой среде в терминах импеданса и скорости звука, имеющим динамическую природу. Предполагается, что случайная упругая среда имеет статистически независимые и статистически однородные случайные параметры: скорость звука a и импеданс z. Подстановка (3.1) в волновое уравнение дает

$$\begin{gathered} \frac{d^2U}{dy^2} + \left[\frac{\omega^2}{\langle a \rangle^2} + e(y)\right] U = 0, \\ e(y) = -\frac{1}{\sqrt{z}} \frac{d^2\sqrt{z}}{dy^2}. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Введем новую центральную случайную функцию $\varepsilon(y) = e(y) - \langle e \rangle$, трактуемую как неоднородность, и запишем (3.2) в виде

$$\frac{d^2U}{dy^2} + \left[\kappa^2 + \varepsilon(y)\right] U = 0; \quad \kappa^2 = \frac{\omega^2}{\langle a \rangle^2} + \langle e \rangle.$$

При условии, что среда подчиняется граничному условию Неймана $y = y_0$; $\frac{dU}{dy} = 1$, можно переписать граничную задачу в виде единственного эквивалентного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2U}{dy^2} + \left[\lambda^2 + \varepsilon(y)\right] U = \delta(y - y_0) \tag{3.3}$$

при условии, что его решение удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда.

Если $U(y)$ является решением уравнения (3.3) с дельта-функцией в правой части, то $U(y) = G(y, y_0)$, где $G(y, y_0)$ — функция Грина для уравнения (3.3) и, следовательно, среднее поле $\langle U(y) \rangle = \langle G(y, y_0) \rangle$, где $\langle G(y, y_0) \rangle$ — усредненная функция Грина. Последняя является решением интегрального уравнения Дайсона [1, 7]

$$\begin{aligned} &\langle G(y, y_0) \rangle = G_0(y, y_0) + \\ &+ \iint G_0(y - r_1) M(r_1, r_2) \langle G(r_2, y_0) \rangle \, dr_1 dr_2. \end{aligned}$$

Здесь функция Грина для виртуального однородного эффективного материала такова

$$\begin{aligned} G_0(y - y_0) = -\frac{e^{-i\kappa|y-y_0|}}{2\kappa i} &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik(y-y_0)}}{\kappa^2 - k^2} dk, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где $\kappa > 0$ и M обозначает ядро интегрального оператора, который в квантовой теории поля называется массовым оператором. Это ядро содержит бесконечное число слагаемых и дается формулой

$$\begin{aligned} M = \langle \varepsilon K_0 \varepsilon \rangle - \langle \varepsilon K_0 \varepsilon K_0 \varepsilon \rangle + \langle \varepsilon K_0 \varepsilon K_0 \varepsilon K_0 \varepsilon \rangle - \\ - \langle \varepsilon K_0 \varepsilon \rangle K_0 \langle \varepsilon K_0 \varepsilon \rangle. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Здесь K_0 — интегральный оператор с ядром G_0 [1, 7]. Даже единственное слагаемое в разложении (3.5) соответствует суммированию бесконечной подпоследовательности ряда в теории возмущений. В дальнейшем ограничимся первым слагаемым (так называемым приближением Бурэ, также известным под названием сглаживающей аппроксимации первого порядка)

$$\begin{aligned} M(r_1, r_2) = \langle \varepsilon K_0 \varepsilon \rangle &= \\ &= B_\varepsilon(r_1, r_2) G_0(r_1 - r_2), \end{aligned} \tag{3.6}$$

где $B_\varepsilon(r_1, r_2)$ — корреляционная функция случайного поля ε.

Так как ε — статистически однородная функция, то ее корреляционная функция зависит только от разности аргументов $B_\varepsilon(y_1, y_2) = B_\varepsilon(y_1 - y_2)$ и уравнение Дайсона принимает форму интегрального уравнения с разностным ядром, решение которого с помощью пространственного преобразования Фурье имеет вид

$$\left\langle \hat{G}(k) \right\rangle = \left[\hat{G}_0^{-1}(k) - 4\pi^2 \hat{G}_0(k)\, \hat{B}_\varepsilon(k) \right]^{-1}.$$

Обращение Фурье-трансформанты доставляет усредненную функцию Грина

$$\langle G(r) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{\Delta} dk, \tag{3.7}$$

где $r = y - y_0$,

$$\Delta = \kappa^2 - \int_{-\infty}^{\infty} B_\varepsilon(\rho)\, G_0(\rho)\, e^{-ik\rho} d\rho - k^2.$$

Как и прежде, анализируем экспоненциальную корреляционную функцию неоднородности $B_\varepsilon(r) = \sigma^2 \exp(-\alpha |r|)$. Подставляя эту функцию в (3.7) и вычисляя интеграл в знаменателе Δ, имеем

$$\langle G(r) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr} dk}{\kappa^2 + \frac{\sigma^2}{i\kappa} \frac{i\kappa + \alpha}{(i\kappa + \alpha)^2 + k^2} - k^2}. \tag{3.8}$$

Полюса k_1 и k_2 подынтегрального выражения, удовлетворяющие условию излучения Зоммерфельда, лежат в верхней полуплоскости $(\operatorname{Im} k_{1,2} > 0)$

$$\begin{gathered} k_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\kappa^2 - (\alpha + i\kappa)^2 \pm Z}, \\ Z = \sqrt{\left(\kappa^2 + (\alpha + i\kappa)^2\right)^2 + 4 \frac{\alpha + i\kappa}{i\kappa} \sigma^2}. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Особый интерес в сейсмике представляет проблема распространения длинных волн в среде с мелкомасштабной неоднородностью ($\alpha \gg \kappa$). В предположении $\alpha\sqrt{\kappa\alpha} \gg \sigma$ и $\alpha \gg \kappa$ выражения (3.9) для полюсов k_1 и k_2 приводятся к виду

$$k_1 = -\kappa \sqrt{1 - i \frac{\sigma^2}{\kappa^3 \alpha}}, \quad k_2 = -\kappa + i\alpha.$$

Вклад полюса k_2 становится незначительным даже в пределах радиуса корреляции $R = \alpha^{-1}$, т. е. k_2 моделирует ближнее поле, которым можно пренебречь в случае больших дистанций, пробегаемых волной. Следовательно, влияние неоднородности учитывается полюсом k_1, который может быть преобразован к виду

$$k_1 = -\kappa \sqrt{1 - i \frac{\sigma^2}{\alpha^3 \kappa} \frac{\alpha^2}{\kappa^2}}.$$

Видно, что мнимая часть k_1 может быть значительной даже для волн в слабонеоднородных средах ($\sigma \ll \alpha\sqrt{\kappa\alpha}$) с короткомасштабными возмущениями ($\alpha \gg \kappa$). Значительное затухание объясняется накоплением дисперсионных эффектов. Контурное интегрирование в (3.4) дает усредненную функцию Грина

$$\begin{gathered} \langle G(r) \rangle = \frac{e^{ik_1 |r|}}{2ik_1}, \\ k_1 = -\kappa \sqrt{1 - i \frac{\sigma^2 R}{\kappa^3}}, \quad \operatorname{Im} k_1 > 0. \end{gathered} \tag{3.10}$$

Уравнение (3.6) для среднего поля может быть получено более простым способом, если положить $k = 0$ в интеграле по ρ в знаменателе в (3.7). Это объясняется тем, что радиус корреляции R среды с мелкомасштабной неоднородностью мал ($\alpha \gg \kappa$), что позволяет принимать во внимание только главный член в разложении $e^{-ik\rho}$ по $k\rho$, то есть принять $e^{-ik\rho} = 1$.

Другие корреляционные функции

$$B_\varepsilon(r) = \sigma^2 \exp(-\alpha |r|) \cos \eta r,$$

$$B_\varepsilon(r) = \sigma^2 \exp(-\alpha |r|) \left(\cos \eta r + \frac{\alpha}{\eta} \sin \eta |r| \right)$$

моделируют распространение волны в случайных средах со скрытой периодичностью. Первая функция описывает стохастический процесс, недифференцируемый в среднеквадратическом, тогда как вторая моделирует дифференцируемый в среднеквадратическом стохастический процесс. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что только один полюс в подынтегральном выражении дает вклад в спектральное пространственное разложение дальнего среднего поля, в то время как другие полюса описывают некоторые ближние поля, исчезающие в пределах радиуса корреляции.

Таким образом, несмотря на широкое разнообразие свойств корреляционных функций, уравнение для среднего поля в случайных средах принимает вид (3.6) для любой из упомянутых корреляционных функций. Это позволяет изучать общий случай случайной среды с произвольной мелкомасштабной неоднородностью. С этой целью моделируем корреляционную функцию среды следующим образом:

$$B_\varepsilon(r) = \sigma^2 \frac{\delta_R(r)}{\delta_R(0)}, \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta_R(r)\, dr = 1,$$
$$R = \frac{1}{2B_\varepsilon(0)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} B_\varepsilon(r)\, dr = \frac{1}{2\delta_R(0)}, \tag{3.11}$$

где $\delta_R(r)$ — финитная функция, отличная от нуля только для малого r ($|r| < R$). Подставляя корреляционную функцию (3.11) в (3.7) и, как указано выше, принимая $e^{-ik\rho} = 1$, получаем

$$\langle G(r) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikr}}{\kappa^2 - i\sigma^2 R \kappa^{-1} - k^2} dk.$$

Контурное интегрирование приводит к (3.6) для произвольной неоднородной упругой среды с мелкомасштабной неоднородностью. Так как скорость звука a случайна, то $\langle G(r) \rangle$ — случайное поле, которое должно быть усреднено по a. Для любой заданной функции плотности вероятности для скорости звука среднее поле может быть вычислено. Усредненное затухание в статистически однородной среде $\langle d \rangle$ имеет следующее аналитическое выражение

$$\langle d \rangle = -\frac{\langle a \rangle}{x - x_0} \int\limits_{x_0}^{x} \left\langle \frac{1}{a(\xi)} \right\rangle d\xi \times$$
$$\times \operatorname{Im} \kappa \sqrt{1 - i\frac{\sigma^2 R}{\kappa^3}} =$$
$$= -\langle a \rangle \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle \operatorname{Im} \kappa \sqrt{1 - i\frac{\sigma^2 R}{\kappa^3}} > 0.$$

Предполагая малое затухание, приходим к простому выражению для усредненного затухания

$$\langle d \rangle = \langle a \rangle \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle \frac{\sigma^2 R}{2\kappa^2} =$$
$$= \frac{1}{4} \omega^{-2} \langle a \rangle^3 \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle \int\limits_{-\infty}^{\infty} B_\varepsilon(r)\, dr.$$

Одно из главных достоинств уравнения Дайсона — отсутствие требования гауссовости случайных полей. Это позволяет преодолевать известный недостаток нормального распределения, который допускает отрицательные значения импеданса и скорости звука. Любая функция распределения вероятности, которая удовлетворяет этим физическим ограничениям с вероятностью единица, может быть взята в рамках существующего подхода. Другие достоинства: а) подход применим к существенно-неоднородным средам; б) аналитическое выражение для среднего затухания может быть получено. Недостатки подхода таковы: а) трудно удовлетворить граничным условиям; б) для того чтобы найти стандартное отклонение случайных полей, нужно применить уравнение Бете-Солпитера [1, 7], однако его решение чрезвычайно трудоемко.

Выводы

Проведен сравнительный анализ одномерного распространения стохастических упругих волн. Три подхода, а именно, метод интегрального спектрального разложения, уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова и интегральное уравнение Дайсона, были применены для решения некоторых граничных задач. Достоинства и недостатки каждого подхода указаны в соответствующей части. Основываясь на вышеупомянутых заключениях о сильных и слабых сторонах каждого подхода, можно выбрать подходящий метод для решения той или иной конкретной проблемы. Например, показано, что слабо неоднородные упругие среды могут быть проанализированы в рамках метода интегрального спектрального разложения и FPK уравнения. Имея дело с существенно-неоднородными средами, рекомендуется применять интегральное уравнение Дайсона. Предложенные подходы охватывают все проблемы распространения гармонических волн в неоднородных или стохастических средах. Таким образом, путем предварительного анализа проблемы можно подобрать наиболее удобный и эффективный подход для решения поставленной задачи.

Литература

1. *Sobczyk K.* Stochastic wave propagation. Amsterdam: Elsevier, 1984. 248 p.
2. *Яглом А. М.* Корреляционная теория стационарных случайных функций. М: Физматгиз, 1981. 280 с.
3. *Náprstek J.* Propagation of longitudinal stochastic waves in bars with random parameters // Structural Dynamics / Eds. Augusti G., Borri C.,

Spinelli P. Rotterdam: A.A. Balkema 1996. P. 51–60.
4. *Болотин В. В.* Случайные колебания упругих систем. М: Наука, 1979. 336 с.
5. *Roberts J. B., Spanos P. D.* Random vibration and statistical linearization. Chichester: Wiley and Sons, 1990. 407 p.
6. *Диментберг М. Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. М: Наука, 1980. 368 с.
7. *Татарский В. И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере. М: Наука, 1969. 548 с.

Статья поступила 23 марта 2007 г.
Институт проблем машиноведения РАН, г. Санкт-Петербург
© Беляев А. К., Беляев Н. А., 2007