УДК 532.59, 534.1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ СТРАТИФИКАЦИИ ОКЕАНА ПО ЧАСТОТАМ ВНУТРЕННИХ ВОЛН

***Волкова Е. А.*[1], *Потетюнко Э. Н.*[2]**

DEFINITION OF PARAMETERS OF THE OCEAN STRATIFICATION ACCORDING TO THE FREQUENCIES OF INTERNAL WAVES

Volkova E. A., Potetyunko E. N.

This study presents numerical and asymptotic algorithms for deriving wave characteristics of free oscillations of vertically non-homogenous fluid. The bathymetric density distribution is reconstructed on the basis of dispersion curves of free oscillations in the non-homogenous fluid. Requirements for the accuracy of measuring input data are studied in order to obtain a sufficiently accurate bathymetric density of the non-homogenous fluid.

Введение

Исследования в области внутренних гравитационных волн в океане являются одной из важнейших задач океанологии. Существенным толчком к изучению внутренних волн послужило интенсивное развитие методов дистанционного зондирования океана, на свободной поверхности которого внутренние волны проявляются в виде световых бликов. По движению бликов удается определять фазовую скорость перемещения внутренних волн и их длину, а по ним — и распределение поля плотности по глубине, находя тем самым местоположение аномальных плотностей (каких-либо объектов в толще океана). Такими объектами могут быть косяки рыб, подлодки, батискафы, аквалангисты, затонувшие суда и так далее.

Такого же рода задачи возникают при неразрушающем контроле строительных конструкций и сооружений, когда по резонансным частотам колебаний отдельных элементов необходимо сделать заключение о плотности и структуре материала во всей конструкции. В геофизике такие проблемы возникают при поиске природных залежей полезных ископаемых. В этом случае приводят в колебательное движение почву, горные породы, водные массы и по измеренным вибрациям на поверхности расшифровывают природу неоднородности в толще пород или под дном водоемов.

Весь круг этих задач относится к обратным задачам механики сплошной среды. В данной работе изучаются обратные спектральные задачи Штурма–Лиувилля, а именно, задачи определения переменного коэффициента дифференциального оператора Штурма–Лиувилля по его собственным числам. Обзор работ по обратным задачам Штурма–Лиувилля приведен в [1].

Первые работы по изучению толщи океана из космоса проводились в Морском гидрофизическом институте АН Украины под руководством академика Нелепо Б. А. В монографии [2] обобщены итоги важнейших исследований в этом направлении.

В [3] предложено несколько методов решения обратных задач восстановления частоты плавучести Вяйсяля–Брента. В работе [4] на основе статистической обработки результатов натурных измерений температуры и солености для конкретного района Мирового океана была определена погрешность частоты плавучести, которая участвует в задаче Штурма–Лиувилля в качестве переменного коэффициента дифференциального оператора. С учетом этой погрешности определены доверительные интервалы для собственных частот свободных колебаний вертикально стратифицированного океана. Восстановление параметров стра-

[1]Волкова Екатерина Александровна, ассистент кафедры информационных систем в строительстве Института промышленного и гражданского строительства Ростовского государственного строительного университета.

[2]Потетюнко Эдуард Николаевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры теории упругости факультета математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета.

тификации проведено с учетом погрешности измеряемых частот.

В работе [5] для восстановления частоты плавучести решение записано через функцию Грина, задача сведена к решению нелинейного интегрального уравнения. Указаны классы параметризации, в которых это решение обладает единственностью и приведены варианты неединственного решения задачи.

В работе [6] решена обратная спектральная задача об определении изменения плотности жидкости, вызванном техногенными загрязнениями.

Большое внимание решению обратных задач типа Штурма–Лиувилля уделено в работах, представленных в журнале «Обратные задачи» [7–12].

1. Океанологическая постановка задачи об определении закона стратификации океана

Для исследования задачи о распространении внутренних гравитационных волн в океане воспользуемся моделью идеальной неоднородной несжимаемой нетеплопроводной жидкости. Такой подход объясняется тем, что во многих случаях при изучении гидродинамических процессов в океане диссипативными явлениями (вязкостью, трением, теплопроводностью и диффузией) можно пренебречь. Такое бездиссипативное приближение будет справедливым для движений достаточно большого масштаба на ограниченном интервале изменения времени. Рассмотрим теорию внутренних волн в адиабатическом приближении, пренебрегая процессами обмена массой и энергией в океане за время генерации и распространения волн.

Уравнения движения вертикально стратифицированного океана во вращающейся системе координат, связанной с поверхностью Земли имеют вид [13]

$$\rho\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}+f\mathbf{z}^0\times\mathbf{V}\right)=-\nabla P-\rho g\mathbf{z}^0,\qquad \operatorname{div}\mathbf{V}=0,\qquad \frac{d\rho}{dt}+\operatorname{div}(\rho\mathbf{V})=0. \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{V}(V_x,V_y,V_z)$ — вектор скорости в декартовой системе координат, P — отклонение гидродинамического давления от равновесного, $f=2\Omega\sin\varphi$ — параметр Кориолиса (Ω — угловая скорость вращения Земли, φ — широта), ρ — отклонение плотности жидкости от равновесной плотности жидкости ρ_0, g — ускорение свободного падения, $\mathbf{z}^0=(0,0,z^0)$ — орт, направленный по оси z (против силы тяжести вертикально вверх).

На дне ($z=-H=\text{const}$) выполняется условие непротекания, на свободной поверхности океана выполняются кинематическое и динамическое граничные условия

$$V_z|_{z=-H}=0,\quad V_z|_{z=\zeta}=\frac{d\xi}{dt},\qquad P(x,y,z,t)|_{z=\xi}=0. \tag{1.2}$$

Далее система (1.1) и граничные условия (1.2) линеаризируются вблизи положения равновесия и решение ищется в виде бегущих волн

$$\{V_x,V_y,V_z,P,\rho,\xi\}=\{U(z),V(z),W(z),P(z),R(z),Z\}E,\qquad E=e^{i(k_1x+k_2y-\omega t)}.$$

Здесь k_1, k_2 — волновые числа, ω — частота колебаний, t — время.

После преобразований рассматриваемая задача сводится в приближении «твердой крышки» к спектральной задаче относительно амплитудной функции вертикальной компоненты скорости частиц жидкости

$$W''(z)-\frac{\mu(z)}{g}W'(z)+MW(z)=0,\qquad M=\frac{\mu(z)-\omega^2}{\omega^2-f^2}k^2,\qquad W(0)=0,\quad W(-H)=0. \tag{1.3}$$

Здесь $\mu(z)=-g\rho_0'/\rho_0$ — квадрат частоты плавучести (частоты Вяйсяля–Брента), $k^2=k_1^2+k_2^2$, $W(z)$ — амплитудная функция вертикальной компоненты скорости частиц жидкости. Граничные условия соответствуют приближению «твердой крышки» и осуществляют фильтрацию внутренних волн от поверхностных.

2. Вывод частотных уравнений методом степенных рядов

Рассмотрим задачу (1.3) в приближении Буссинеска. Суть этого приближения заключается в том, что слагаемое $W'(z)\,\mu(z)/g$ в уравнении опускается, и задача (1.3) принимает вид

$$W''(z)+\frac{\mu(z)-\omega^2}{\omega^2-f^2}k^2W(z)=0,$$

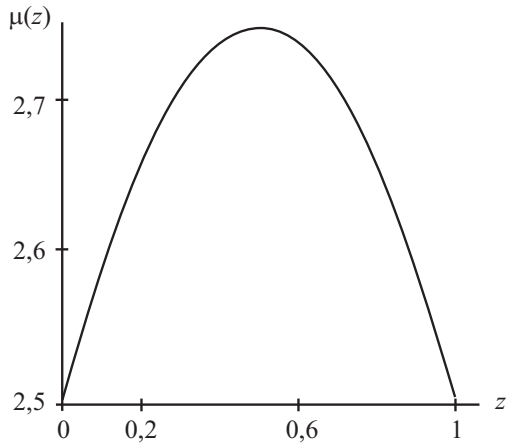

Рис. 1. График квадрата частоты Вяйсяля-Брента

$$W(0) = 0, \quad W(-H) = 0.$$

Введем безразмерную переменную $z = -H\zeta$ и обозначим $\mu(z) = \tilde{\mu}(\zeta)$, $W(z) = \tilde{W}(\zeta)$, $kH = \tilde{k}$. Опуская обозначение «$\sim$» и меняя ζ на z, получим следующую постановку задачи

$$\begin{gathered} W''(z) + \frac{\mu(z) - \omega^2}{\omega^2 - f^2} k^2 W(z) = 0, \\ W(0) = 0, \quad W(1) = 0. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Решение задачи (2.1) ищем с помощью разложения в степенные ряды [6] искомой функции $W(z) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} W_i z^i$, при этом ограничимся слагаемыми, содержащими z в шестой степени. Функцию $\mu(z)$ аппроксимируем многочленом второй степени $\mu(z) = \mu_0 + \mu_1 z + \mu_2 z^2$, кроме того, будем считать, что функция $\mu(z)$ симметрична относительно середины рассматриваемого отрезка, причем коэффициент $\mu_2 < 0$ (рис. 1).

Подставляя предполагаемую форму решения в уравнение задачи (2.1), получим рекуррентную систему линейных уравнений относительно W_i. Из краевого условия на поверхности определяем, что $W_0 = 0$ и все остальные коэффициенты будут выражены через W_1 следующим образом:

$$W_2 = 0, \quad W_3 = -\frac{\tilde{\mu}_0 \lambda}{6} W_1,$$

$$W_4 = -\frac{\mu_1 \lambda}{12} W_1,$$

$$W_5 = \left(\frac{\tilde{\mu}_0^2 \lambda^2}{120} - \frac{\mu_2 \lambda}{20} \right) W_1,$$

$$W_6 = \frac{\tilde{\mu}_0 \mu_1 \lambda^2}{120} W_1,$$

где $\lambda = \frac{k^2}{\omega^2 - f^2}$, $\tilde{\mu}_0 = \mu_0 - \omega^2$.

Используя условия на дне, получаем дисперсионное уравнение, связывающее частоту колебаний ω и волновое число k с коэффициентами μ_i

$$\begin{gathered} L + N = 0, \quad L = 1 - \frac{\tilde{\mu}_0 \lambda}{6} - \frac{\mu_1 \lambda}{12} - \frac{\mu_2 \lambda}{20}, \\ N = \frac{\tilde{\mu}_0^2 \lambda^2}{120} + \frac{\tilde{\mu}_0 \mu_1 \lambda^2}{120}, \quad \tilde{\mu}_0 = \mu_0 - \omega^2. \end{gathered} \tag{2.2}$$

В уравнении (2.2) оставим только линейные слагаемые относительно μ_1, μ_2

$$1 - \frac{\tilde{\mu}_0 \lambda}{6} - \frac{\mu_1 \lambda}{12} + \frac{\tilde{\mu}_0^2 \lambda^2}{120} - \frac{\mu_2 \lambda}{20} = 0. \tag{2.3}$$

Решая уравнение (2.3) относительно λ, получим в явном виде зависимость между частотами колебаний и волновыми числами

$$\begin{gathered} k_{1,2} = \sqrt{\left(\frac{\omega^2 - f^2}{2\tilde{\mu}_0^2} \right)} \times \\ \times \sqrt{\left(20\tilde{\mu}_0 + 10\mu_1 + 6\mu_2 \pm \sqrt{D} \right)}, \\ D = (20\tilde{\mu}_0 + 10\mu_1 + 6\mu_2)^2 - 480\tilde{\mu}_0^2. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Для построения дисперсионных кривых необходимо наложить условия

$$\tilde{\mu}_0 > 0, \quad D > 0.$$

Численные расчеты для построения дисперсионных кривых проводились при следующих значениях параметров: $\mu_0 = 2{,}5$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = -1$ (табл. 1).

Таблица 1. Значения пар чисел (ω_i, k_i)

ω	$k_1(\omega)$	$k_2(\omega)$
0,742	1,88	1,65
0,752	1,91	1,68
0,762	1,94	1,70
0,772	2,00	1,72
0,782	2,03	1,74
0,792	2,07	1,77
0,802	2,08	1,82
0,812	2,12	1,85

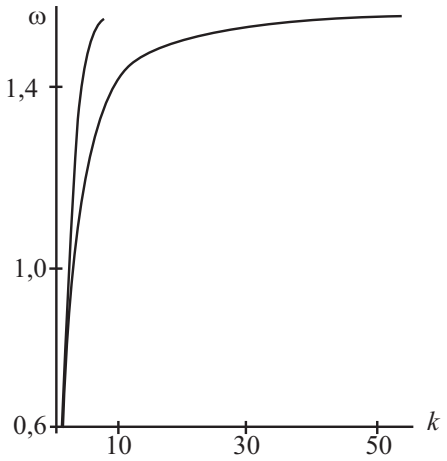

Рис. 2. Графики дисперсионных кривых

Таблица 2. Восстановленное значение параметра μ_2 и погрешность восстановления

Количество значащих цифр в (ω_1, k_1)	Значения $(\omega_1; k_1)$	Восстановленное значение μ_2 (погрешность восстановления)
8	$(0,75604630\ ;\ 1,9158901)$	$-0,99999988\ \left(0,12\cdot 10^{-4}\,\%\right)$
5	$(0,75608\ ;\ 1,9162)$	$-0,99972\ \left(0,28\cdot 10^{-1}\,\%\right)$
3	$(0,752\ ;\ 1,91)$	$-1,04\ (4\,\%)$
2	$(0,75\ ;\ 2)$	$-1,4\ (40\,\%)$

3. Решение обратной задачи для частотного уравнения, построенного методом степенных рядов

Рассмотрим случай, когда функция $\mu(z)$ представлена квадратичной параболой $\mu(z) = \mu_2 z^2 + \mu_1 z + \mu_0$. Будем считать, что частоты колебаний внутренних волн известны, необходимо найти параметры неоднородности жидкости, т.е. определить коэффициенты μ_0, μ_1, μ_2 в полиномиальном разложении функции $\mu(z)$.

Так как уравнение (2.3) содержит параметр μ_0 во второй степени, то решая это уравнение относительно неизвестных параметров при заданных частотах, получим неединственное решение исходной задачи. Для обеспечения единственности решения будем считать, что параметр μ_0 известен. Кроме того, наложим условие $\mu_1 = -\mu_2$. Тогда, выписывая уравнение (2.3) при заданной паре чисел (ω_1, k_1), получим уравнение для определения параметра μ_2

$$\mu_2 = \frac{1}{4\lambda}\left(20\tilde{\mu}_0\lambda - \tilde{\mu}_0^2\lambda^2 - 120\right). \qquad (3.1)$$

Теперь считаем (ω_1, k_1) найденными из экспериментальных измерений с определенной погрешностью измерительных приборов. Тогда и μ_2 по формуле (3.1) будет определяться с некоторой погрешностью. Для заданных (ω_1, k_1) с машинной точностью, рассчитанных по формуле (2.4), и величина μ_2 должна определяться с машинной точностью по сравнению с заданной. Ниже приведена таблица точности ε определения величины μ_2 в зависимости от точности задания измеряемых величин (ω_1, k_1), $\varepsilon = (\mu_2 - \mu_{2\text{зад}})/\mu_{2\text{зад}} \cdot 100\ \%$.

Аналогичная таблица имеет место и для других пар (ω_1, k_1), взятых как с одной, так и с разных дисперсионных кривых. При этом максимальная относительная погрешность определения μ_2 достигает следующих значений: при восьми значащих цифрах погрешность равна $0{,}4\cdot 10^{-4}$ % для $\omega = 0{,}79604630$, $k = 2{,}0746314$; при пяти значащих цифрах погрешность равна 0,05 % для $\omega = 0{,}74608$, $k = 1{,}8774$; при трех значащих цифрах — 5 % для $\omega = 0{,}822$, $k = 2{,}20$; при двух значащих цифрах — 55 % для $\omega = 0{,}8$, $k = 1{,}9$.

На рис. 3 сплошная линия соответствует исходной функции $\mu(z)$, штрихпунктирная линия — функции $\mu(z)$, восстановленной при 3-х значащих цифрах в значениях (ω, k), пунктирная линия — функции $\mu(z)$, восстановленной при 2-х значащих цифрах в значениях (ω, k).

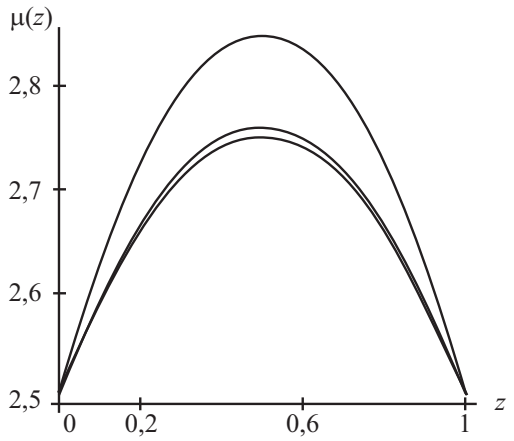

Рис. 3. Графики восстановленных функций и заданной функции $\mu(z)$

Отметим, что графики заданной функции $\mu(z)$ и восстановленных функций $\mu(z)$ при восьми и пяти значащих цифрах сливаются.

Литература

1. *Левитан Б. М.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1967. 240 с.
2. *Нелепо Б. А., Коротаев Г. К., Суетин В. С., Терехин Ю. В.* Исследование океана из космоса. Киев.: Наукова думка, 1985. 168 с.
3. *Потетюнко Э. Н., Черкесов Л. В., Шубин Д. С., Щербак Е. Н.* Свободные колебания и обратные спектральные задачи. М.: Вузовская книга, 2001. 288 с.
4. *Щербак Е. Н.* Доверительный интервал спектра собственных частот стратифицированной жидкости // Современные проблемы механики сплошной среды, Ростов н/Д.: Изд-во СКНЦ ВШ, 1998. С. 218–221.
5. *Рындина В. В.* Собственные частоты внутренних волн в жидкости и частота Брента–Вяйсяля. Ростов н/Д.: Изд-во ЦВВР, 2007. 128 с.
6. *Аносова Е. А., Трепачев В. В.* Оценка изменения плотности воды, вызванного техногенными загрязнениями // Безопасность жизнедеятельности. Охрана труда и окружающей среды. РГАСХМ, Ростов н/Дону. 2003. Вып. 7 (международный). С. 82–84.
7. *Brown B. M., Samko V. S., Knowles I. W., Marletta M.* Inverse spectral problem for the Sturm–Liouville equation // Inverse Problems. 2003. Vol. 19. No. 1 (February). P. 235–252.
8. *Chao-Liang Shen.* Some inverse spectral problems for vectorial Sturm-Liouville equations // Inverse Problems. 2001. Vol. 17. No. 5 (October). P. 1253–1294.
9. *Cherkesov L. V., Potetunko E. N., Shubin D. S.* Reconstruction of Ocean Density Distribution from its Wave Spectrum // International Journal of Fluid Mechanics Research. 2003. Vol. 30. No. 1. P. 11–23.
10. *Hryniv R. O., Mykytyuk Ya. V.* Inverse spectral problems for Sturm–Liouville operators with singular potentials // Inverse Problems. 2003. Vol. 19. No. 3 (June). P. 665–684.
11. *Daskalov V. B.* On the inverse problem for the regular Sturm–Liouville operator // Inverse Problems. 1996. Vol. 12. No. 3 (June). P. 207–217.
12. *Pivovarchik V., Cornelis van der Mee.* The inverse generalized Regge problem // Inverse Problems. 2001. Vol. 17. No. 6 (December). P. 1831–1845.
13. *Миропольский Ю. З.* Динамика внутренних гравитационных волн в океане. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 302 с.

Статья поступила 23 марта 2007 г.
Ростовский государственный строительный университет, г. Ростов-на-Дону
Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону
© Волкова Е. А., Потетюнко Э. Н., 2007