УДК 539.375

# О ВЛИЯНИИ ФОРМЫ ИЗОЛИРОВАННОГО ДЕФЕКТА НА МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ

***Дунаев В. И.***[1]***, Тугуз Т. К.***[2]

ABOUT THE IMPACT OF THE FORM OF AN ISOLATED DEFECT ON MACROSCOPIC CRITERIA OF BRITTLE FRACTURE

Dunaev V. I., Tuguz T. K.

It has been shown in the paper that the orientation of a crack during its formation may depend on the initial form of a previously formed defect. For the model of an astroid-form defect (e.g. pores in polycrystallin ceramics), it has been found out that under uniaxial compression of a plate the crack is oriented at an angle of 45 degrees to the line of the force action. Thus, the limiting curve of fracture has an ellipse form in the space of main stresses and represents the special case of a limiting curve obtained during formation of an ellipse-form defect.

## Введение

В работах [1–3] рассмотрена задача о разрушении пластины при однократном статическом нагружении под действием главных напряжений $P_1$, $P_2$ при образовании дефекта в виде эллипса с полуосями $a$, $b(a)$, $a > b$. При этом для идеально хрупких материалов получен макроскопический критерий хрупкого разрушения в виде кривой эллиптической формы в пространстве главных напряжений $P_1$, $P_2$ в зависимости от физико-механических параметров материала, температуры и полудлины трещины $a$ при $b^2/a^2 \ll l$. Установлено, что независимо от комбинаций критических напряжений $P_1$ и $P_2$, соответствующих точкам, лежащим на кривой разрушения, трещина будет ориентирована либо перпендикулярно растягивающему напряжению, либо вдоль сжимающего напряжения, что хорошо согласуется с экспериментальными данными для многих идеально хрупких материалов (некоторые естественные камни, органические и неорганические стёкла). Однако существуют материалы (некоторые горные породы, керамики), которые при растяжении и сдвиге разрушаются от максимальных нормальных напряжений (трещина располагается перпендикулярно к растягивающему напряжению), а при сжатии — от касательных напряжений (трещина располагается под углом от 0° до 45° к направлению действия сжимающего напряжения). Можно предположить, что количественные соотношения между параметрами, определяющими макроскопический критерий хрупкого разрушения, и ориентация трещины при её образовании зависят от начальной формы дефекта.

## 1. Энергетические условия хрупкого разрушения

В работах [1–3] предложено энергетическое условие хрупкого разрушения при однократном статическом нагружении

$$\frac{dW}{da} = 0. \tag{1.1}$$

В этом условии интеграл полной энергии $W = U - \gamma\Sigma$ в случае плоского напряжённо-деформированного состояния имеет вид

$$W = U - \gamma\Sigma = \frac{1}{2}\oint\limits_{\Sigma} \sigma_{ij}^{(0)} u_i^{(1)} n_j ds + \\ + \alpha_0 T_0 k_1 \oint\limits_{\Sigma} u_i^{(1)} \delta_{ij} n_j ds - \gamma\Sigma, \quad (1.2)$$
$$i, j = 1, 2.$$

[1] Дунаев Владислав Игоревич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры численного анализа Кубанского государственного университета.

[2] Тугуз Тимур Казбекович, студент факультета прикладной математики Кубанского государственного университета.

Здесь введены обозначения: $U$ – интеграл внутренней энергии, $\gamma$ — внутренняя энергия, необходимая для образования единицы новой поверхности $\Sigma$, $\sigma_{ij}^{(0)}$ — компоненты тензора напряжения в пластине без дефекта, $u_i^{(1)}$ — компоненты вектора перемещения в пластине с дефектом, $n_i$ — компоненты вектора внешней нормали к области, ограниченной контуром $\Sigma$, $\alpha_0$ — линейный коэффициент теплового расширения, $T_0$ — абсолютная температура, $k_1 = E/(1-\nu)$ — для плоского напряжённого состояния, $k_1 = E/(1-2\nu)$ — для плоской деформации, $E$ — модуль упругости, $\nu$ — коэффициент Пуассона.

В плоских задачах теории упругости компоненты напряжений и перемещений определяются двумя комплексными функциями $\phi(z)$ и $\psi(z)$, комплексной переменной $z = x_1 + ix_2$ и их производными [4]

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} = 2\left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\right],$$

$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2i\sigma_{12} = 2\left[\bar{z}\varphi''(z) + \varphi'(z)\right], \quad (1.3)$$

$$2\mu\left(u_1 + iu_2\right) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)},$$

где $\kappa = 3 - 4\nu$, $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ — для плоской деформации и плоского напряжённого состояния соответственно, черта сверху — комплексно сопряжённая величина.

С учётом соотношений (1.3) и формул $n_1 ds = dx_2$, $n_2 ds = -dx_1$ комплексное представление интегралов внутренней энергии (1.2) имеет вид [1, 2]

$$U = -\frac{1}{4\mu}\,\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{i}\oint\limits_{\Sigma}\left(\Theta_{11}\Theta_{12} - \Theta_{21}\Theta_{22}\right)\,dz\right\} - \\ - \frac{\alpha_0 T_0 k_1}{2\mu}\,\mathrm{Re}\left\{i\oint\limits_{\Sigma}\Theta_{21}dz\right\}, \quad (1.4)$$

где

$$\Theta_{11} = \kappa\varphi_1(z) - z\overline{\varphi_1'(z)} - \overline{\psi_1(z)},$$

$$\Theta_{12} = \bar{z}\varphi_0''(z) + \psi_0'(z),$$

$$\Theta_{21} = \kappa\overline{\varphi_1(z)} - \bar{z}\varphi_1'(z) - \psi_1(z),$$

$$\Theta_{22} = \varphi_0'(z) + \overline{\varphi_0'(z)}.$$

## 2. Макроскопический критерий хрупкого разрушения при образовании изолированного дефекта в форме астроиды

Решения краевых задач термоупругости для тел с трещиной зависят от её характерных размеров. Однако в этих решениях не содержится зависимости между характерными размерами трещины и заданными внешними нагрузками, при которых возможно начало её движения. Для получения такой зависимости необходимо дополнить решения задач термоупругости условием разрушения, связывающим величины внешней нагрузки с характерными размерами трещин, при которых возможно их распространение. Состояние тела, при котором движение трещины становится возможным, называется предельным состоянием равновесия, а условие наступления этого предельного состояния, называют макроскопическим критерием разрушения. В общем случае при однократном статическом нагружении это энергетическое условие разрушения (1.1). Однако конкретизация этого соотношения требует дополнительных предположений относительно формы и расположения дефекта. Приведём формулировку макроскопического критерия хрупкого разрушения при однократном статическом нагружении в условиях однородного плоского напряжённо-деформированного состояния

$$F\left(P_1, P_2, E, \nu, T_0, \alpha_0, a_*\right) = 0, \quad (2.1)$$

который представляет предельную кривую в пространстве главных напряжений $P_1, P_2$, определяющую все те комбинации компонентов напряжений (пределов прочности), при которых возможно начало движения трещины с характерным размером $a_*$.

Рассмотрим задачу о разрушении пластинки при образовании дефекта в форме астроиды с параметром $a$ (рис. 1) под действием главных растягивающих и (или) сжимающих напряжений $P_1$, $P_2$, причём направление действия напряжения $P_1$ составляет угол $\alpha = \alpha(a)$ с осью $ox_1$, а направление действия напряжения $P_2$ составляет с осью $Ox_1$ угол, равный $\alpha + \frac{\pi}{2}$.

Для случая плоскости [4] при однородном напряжённо-деформированном состоянии

$$\varphi_0(z) = \frac{P_1 + P_2}{4}z, \\ \psi_0(z) = -\frac{P_1 - P_2}{4}ze^{-2i\alpha}. \quad (2.2)$$

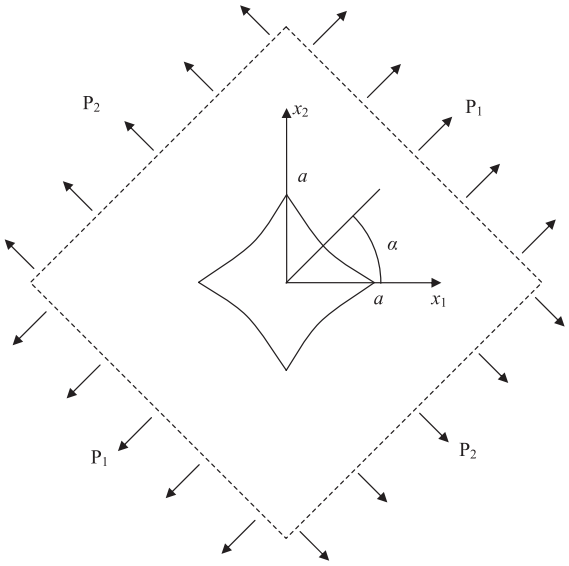



Рис. 1. Схема нагружения пластины при образовании дефекта в форме астроиды

Для этой же плоскости, ослабленной отверстием $\Sigma$ в форме астроиды, граничное условие на контуре астроиды при $z \in \Sigma$ имеет вид

$$\varphi_1(z) + z\overline{\varphi_1'(z)} + \overline{\psi_1(z)} = 0, \qquad (2.3)$$

то же условие в комплексно-сопряжённой форме

$$\overline{\varphi_1(z)} + \overline{z}\varphi_1'(z) + \psi_1(z) = 0. \qquad (2.4)$$

Подставляя выражения (2.2), (2.3), (2.4) в интеграл (1.4), после элементарных преобразований получаем

$$U = -\frac{\kappa+1}{8\mu}\,\mathrm{Re}\Big\{ i \oint\limits_{\Sigma} \Big[\overline{\varphi_1(z)}\,(P_1+P_2) + \varphi_1(z)(P_1-P_2)e^{-2i\alpha}\Big]dz\Big\} - \frac{\alpha_0 T_0 k_1 \kappa}{2\mu}\,\mathrm{Re}\left\{ i \oint\limits_{\Sigma} \overline{\varphi_1(z)}dz \right\}. \qquad (2.5)$$

Введём функцию

$$z = \omega(\xi) = \frac{3a}{4}\left(\xi + \frac{1}{3\xi^2}\right), \qquad (2.6)$$

которая отображает рассматриваемую плоскость с отверстием в виде астроиды на плоскость $|\xi| > 1$ с круглым отверстием. Переходя в интегралах (2.5) к переменной $\xi$ по формуле (2.6), получаем

$$U = -\frac{\kappa+1}{8\mu}\,\mathrm{Re}\Big\{ i \oint\limits_{|\xi|=1} \Big[\overline{\varphi_1(\xi)}\,(P_1+P_2) + \varphi_1(\xi)\,(P_1-P_2)\,e^{-2i\alpha}\Big]\omega'(\xi)d\xi\Big\} - \frac{\alpha_0 T_0\,(\kappa+1)}{2\mu}\,\mathrm{Re}\left\{ i \oint\limits_{|\xi|=1} \overline{\varphi_1(\xi)}\omega'(\xi)d\xi \right\}. \qquad (2.7)$$

Функция $\varphi_1(\xi)$, следуя [5], имеет вид

$$\varphi_1(\xi) = \frac{3a}{4}\left\{\Gamma\xi - \frac{\Gamma}{3\xi^3} - \frac{\overline{\Gamma'}}{\xi} + \frac{4\overline{a_1}}{9a\xi}\right\}, \qquad (2.8)$$

где $\Gamma = \frac{1}{4}\,(P_1+P_2)$, $\Gamma' = -\frac{1}{2}\,(P_1-P_2)\,e^{-2i\alpha}$.

Вычисляя интегралы (2.7) по окружности $|\xi| = 1$ при заданных функциях (2.6), (2.8) с учётом равенства $\Sigma = 6a$ для полной энергии (1.2) получаем выражение

$$W = W\,[a, \alpha(a)] = U - \gamma\Sigma = \frac{\kappa+1}{8\mu}\frac{3}{128}\pi a^2\Big[16\,(P_1+P_2)^2 + 9\,(P_1-P_2)^2 + 9\,(P_1-P_2)^2\cos 4\alpha\Big] + \frac{\alpha_0 T_0 k_1\,(\kappa+1)}{2\mu}\frac{3}{8}\pi a^2\,(P_1+P_2) - 6\gamma a.$$

Подставляя последнее выражение в энергетическое условие хрупкого разрушения (1.1), получим макроскопический критерий хрупкого

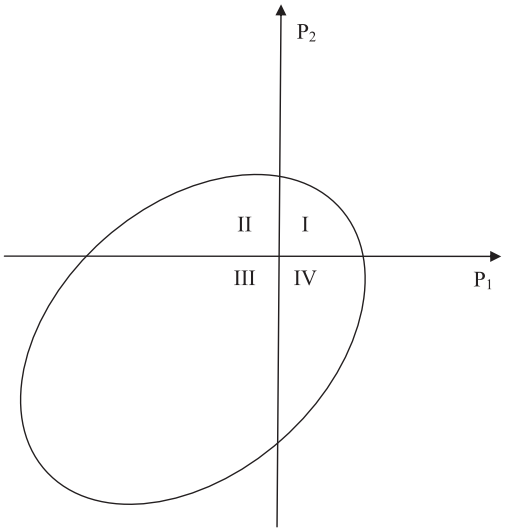



Рис. 2. Предельная кривая в пространстве главных напряжений $P_1$, $P_2$

разрушения

$$\frac{dW}{da} = \frac{3(\kappa+1)\pi a}{512\mu}\Big[16(P_1+P_2)^2 + 27(P_1-P_2)^2 + 9(P_1-P_2)^2\cos 4\alpha - 18a(P_1-P_2)^2\sin 4\alpha\frac{d\alpha}{da}\Big] + \frac{3\alpha_0 T_0 k_1(\kappa+1)}{8\mu}\pi a(P_1+P_2) - 6\gamma = 0. \quad (2.9)$$

В случае изотропных материалов критерий разрушения (2.9) представляет предельную кривую в пространстве переменных $P_1$, $P_2$, которая должна быть симметричной относительно прямой $P_1 = P_2$. Это выполняется при следующем условии:

$$2a\sin 4\alpha\frac{d\alpha}{da} = \cos 4\alpha. \quad (2.10)$$

Предполагая в уравнении (2.9), что для каждого материала существует характерные размер образовавшегося дефекта $a = a_* = \text{const}$ при любых комбинациях главных напряжений, с учетом условия (2.10) получим макроскопический критерий хрупкого разрушения при однократном статическом нагружении (рис. 2).

$$P_1^2 + P_2^2 - \frac{22}{43}P_1P_2 + \frac{64}{43}\alpha_0 T_0 k_1(P_1+P_2) = \frac{1024\mu}{43(\kappa+1)\pi}\frac{\gamma}{a_*}. \quad (2.11)$$

Заметим, что критерий (2.11) является частным случаем критерия, полученного в работе [1] для дефекта эллиптической формы при $\nu_* \approx 0,256$

$$P_1^2+P_2^2-2\nu_* P_1P_2+2\alpha_0 T_0 k_1(1-\nu_*)(P_1+P_2) = \frac{32\mu(1-\nu_*)}{(\kappa+1)\pi}\frac{\gamma}{a_*}.$$

Положение дефекта относительно направлений действия главных напряжений $P_1$ и $P_2$ определим из уравнения (2.10). Интегрируя уравнение (2.10), получаем

$$|\cos 4\alpha| = \frac{c_0^2}{a^2},$$

$$\alpha(a) = \begin{cases} \dfrac{1}{4}\arccos\dfrac{a^2}{c_0^2} \\ \text{при } 0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{8}, \\ \dfrac{3\pi}{8} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{1}{4}\left(\pi - \arccos\dfrac{a^2}{c_0^2}\right) \\ \text{при } \dfrac{\pi}{8} < \alpha < \dfrac{3\pi}{8}, \\ a \geqslant a_* > 0, \end{cases} \quad (2.12)$$

где $c_0$ — произвольная постоянная.

Рассмотрим решение (2.12) при образовании дефекта критических размеров, т. е. при $a = a_*$. Значению $a_*$ соответствуют возможные комбинации критических напряжений $P_1$, $P_2$ (2.11). Тогда постоянная $c_0$ может быть определена, если известно положение трещины при разрушении образца материала, развивающейся из точек возврата дефекта в форме астроиды, для какой либо одной комбина-

ции главных напряжений $P_1$ и $P_2$. Из эксперимента известно, что для рассматриваемых материалов в случае $P_2 = 0$, $P_1 = P^+$, соответствующем одноосному растяжению $\alpha(a_*) = 0$ или $\alpha = \pi/2$, трещина развивается из двух точек возврата дефекта $x_1 = 0$, $x_2 = \pm a$ или $x_2 = 0$, $x_1 = \pm a$ перпендикулярно растягивающему напряжению $P^+$, которое равно пределу прочности при растяжении.

С другой стороны, для рассматриваемых материалов при $P_2 = 0$, $P_1 = P^-$, что соответствует одноосному сжатию (рис. 1) $\alpha(a_*) = \pi/4$, трещина развивается равновозможно из каких-либо двух противоположных точек возврата дефекта под углом 45° к линии действия сил.

Для того, чтобы значения $\alpha(a_*) = 0$, $\alpha(a_*) = \pi/4$, $\alpha(a_*) = \pi/2$ могли реализоваться, в (2.12) необходимо положить $c_0 = a_*$. Выбор ориентации трещины, развивающейся из точек возврата дефекта, при различных комбинациях $P_1$ и $P_2$ (рис. 2) может быть сделан из дополнительных экспериментальных данных, с учётом перехода к рассмотренным случаям осевого растяжения и сжатия.

Во втором квадранте координатной плоскости $P_1$, $P_2$ (рис. 2) в случае $P_2 > 0$, $P_1 < 0$ и $|P_1| \leqslant P_2$ для рассматриваемых материалов при $|P_1| = P_2$ трещина развивается из точек возврата дефекта перпендикулярно растягивающему напряжению $P_2$, $\alpha = 0$ (рис. 1), что соответствует экспериментальным данным, причём при значениях $|P_1|$, близким к нулю, и $P_2$, близким к $P^+$, получаем случай одноосного растяжения.

Аналогичные рассуждения для определения положения трещины могут быть проведены для четвёртого квадранта координатной плоскости $P_1$, $P_2$.

В первом квадранте при $P_1 > 0$, $P_2 > 0$ трещина располагается перпендикулярно к линии действия наибольшего растягивающего напряжения. При этом при любых комбинациях величин $P_1$ и $P_2$ значение $\alpha(a_*)$ будет равно либо нулю, либо $\pi/2$ в силу симметрии дефекта и также удовлетворяется случай простого растяжения.

В третьем квадранте при $P_1 < 0$, $P_2 < 0$ трещина располагается под углом 45° к линии действия наибольшего сжимающего напряжения, а также удовлетворяется случай простого сжатия, если какое-либо из напряжений $P_1$ или $P_2$ равно нулю.

## Заключение

В работе показано, что ориентация трещины при ее образовании может зависеть от начальной формы образования дефекта. Для модели дефектов в форме астроиды (например, поры в поликристаллических керамиках) получено, что при одноосном сжатии пластины трещина распространяется под углом 45° к линии действия силы. При этом предельная кривая разрушения имеет форму эллипса в пространстве главных напряжений и является частным случаем предельной кривой, полученной при образовании дефекта эллиптической формы.

## *Литература*

1. *Дунаев И. М., Дунаев В. И.* Энергетическое условие разрушения термоупругих твёрдых тел // Изв. РАН. МТТ. 2003. № 6. С. 69–81.
2. *Dunaev I. M., Dunaev V. I.* Thermomechanics of Brittle Fracture // Int. J. of Fracture. 2004. Vol. 128. P. 81–93.
3. *Dunaev I. M., Dunaev V. I.* Analysis of thermodynamic conditions for brittle fracture // J. Comptes Rendus Mecanique Academie des sciences. Elsevier. 2004. Vol. 332. P. 789–794.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математический теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.
5. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. Киев. Наукова думка, 1968. 246 с.

Статья поступила 25 мая 2007 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар
© Дунаев В. И., Тугуз Т. К., 2007