УДК 539.3

О ФАКТОРИЗАЦИИ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ПРОБЛЕМЕ ПРОЧНОСТИ МАТЕРИАЛОВ СЛОЖНОГО СТРОЕНИЯ[1]

Евдокимова О. В.[2]

ABOUT FACTORIZATION OF MATRIX-FUNCTIONS OCCURRING IN THE PROBLEM OF COMPLEX-STRUCTURE MATERIALS STRENGTH

Evdokimova O. V.

The article introduces a number of new definitions for matrix-functions factorization, which are stipulated by two newly developed methods, i. e. differential and integral factorization methods.

В статье вводится ряд новых определений факторизации матриц-функций, которые продиктованы двумя новыми, разработанными методами – дифференциальным и интегральным методами факторизации [1–9]. Впервые доказано, что матрицы-функции с мероморфными элементами в общем случае имеют формулы факторизации, что ранее считалось возможным лишь для частных случаев [10–13]. В зависимости от задач приводятся различные виды этих формул. В частности, они позволяют построить решения многочисленных систем интегральных уравнений Винера–Хопфа, которые ранее не удавалось решить [13].

1. Рассматриваемые матрицы-функции $\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha}^\nu)$ обладают следующими свойствами: элементы $K_{mp}(\boldsymbol{\alpha}^\nu)$, $m, p = 1, 2, \ldots, N$ матриц-функций являются в общем случае целыми функциями экспоненциального типа переменных α_k^ν, $k = 1, 2, 3$.

Здесь индексом ν обозначена локальная система координат, порожденная касательным расслоением границы области, занятой материалом [1–5].

Предполагается, что нулевыми множествами целых функций являются некоторые аналитические множества многих комплексных переменных. Представления этих аналитических множеств формально можно записать в разрешенном относительно параметра α_n виде при вещественных остальных переменных

$$\alpha_{3s}^\nu = \alpha_{3s}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu) = \alpha_{3s}^\nu(\boldsymbol{\alpha}^{\nu\prime}), \quad s = 1, 2, \ldots.$$

Это представление в дальнейшем называем нулями целых функций, которые в терминах одного комплексного переменного определяют ее порядок и тип. Для упрощения порядок считается первым, а тип — не выше σ. Определитель $K(\alpha)$ матрицы-функции, очевидно, также целая функция того же порядка, а типа — не выше $N\sigma$.

Для применения построенных в настоящей работе формул факторизации необходимо знание в нужном объеме, диктуемом целями задачи, нулей определителя, которые обозначены в виде

$$z_{sk}^{\nu\pm} = \alpha_{sk}^{\nu\pm}(\boldsymbol{\alpha}')\pi s + o(1),$$

$$s = 1, 2, \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Здесь $z_{sk}^{\pm}$ — нули определителя матрицы-функции. Среди них могут быть лежащие в верхней $\operatorname{Im} z_{sk}^{+} > 0$ и нижней $\operatorname{Im} z_{sk}^{-} < 0$ полуплоскостях, или на вещественной оси, которые из физических соображений относятся к верхней или нижней полуплоскости, что указывается дополнительно. В том случае, когда принадлежность нуля верхней или нижней полуплоскости будет несущественной, или включаются все нули — верхней и нижней полуплоскостей, принимается обозначение z_{sk}.

[1]Отдельные фрагменты работы выполнены при поддержке РФФИ (06-01-00295, 06-01-08017, 06-08-00671), РФФИ_р_юг (06-01-96802, 06-01-96805, 06-05-96806, 06-01-96634, 06-01-96638), проекта НШ-4839.2006.1, программ отделения ЭММПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН.

[2]Евдокимова Ольга Владимировна, канд. физ.-мат. наук, заведующая кафедрой художественного проектирования костюма Кубанского государственного университета.

В частности, количество нулей может оказаться ограниченным, если матрица полиномиальная. Асимптотика нулей свидетельствует о том, что принят во внимание порядок целых функций.

Считаем, что $\alpha_{sk}^{\pm}(\boldsymbol{\alpha}')$ — непрерывные на вещественной оси функции вещественных переменных α_1, α_2.

Обозначим через λ_p область, содержащую все нули $z_{sp}(\boldsymbol{\alpha}')$ для избранного p определителя $K(\alpha_3^\nu) = \det \mathbf{K}(\alpha_3^\nu)$.

Обозначим через λ_{p+} область, содержащую все нули z_{sp+}^ν, $\operatorname{Im} z_{sp+}^\nu > 0$ определителя $K(\alpha_3^\nu) = \det \mathbf{K}(\alpha_3^\nu)$, а через λ_{p-} — ее дополнение до всей плоскости с нулями z_{sp-}^ν $\operatorname{Im} z_{sp-}^\nu < 0$ с разделяющей области границей Γ. В дальнейшем, если не оговорено отдельно, считаем, что контуры обходят области λ_p, λ_{p+} против часовой стрелки. Заметим, что области λ_p λ_{p+} могут оказаться неодносвязными, состоящими из нескольких областей, в том числе и уходящих на бесконечность. Соответственно контур Γ может состоять из нескольких контуров, ограничивающих области с обходом против часовой стрелки.

С каждой группой нулей $z_{sk}^{\pm}(\boldsymbol{\alpha}')$, $z_{sk}(\boldsymbol{\alpha}')$ связываются бесконечные произведения вида

$$\Phi_{p\pm}(\alpha_3) = \gamma_p(\alpha_3) \prod_{s=1}^{S_p} \left(1 - \frac{\alpha_3}{z_{sp}^{\mp}}\right) e^{\frac{\alpha_3}{z_{sp}^{\mp}}},$$

$$p = 1, 2, \ldots, N, \quad s_p \leqslant \infty,$$

$$\Phi_p(\alpha_3) = \gamma_p(\alpha_3) \prod_{s=1}^{S_p} \left(1 - \frac{\alpha_3}{z_{sp}}\right) e^{\frac{\alpha_3}{z_{sp}}},$$

$$p = 1, 2, \ldots, N, \quad s_p \leqslant \infty.$$

Определение 1. Будем называть матрицы-функции $\mathbf{K}_{lm}^{-1}(\alpha_3^\nu, -)$ левой, а $\mathbf{K}_{rm}^{-1}(\alpha_3^\nu, -)$ — правой факторизующей для матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu)$ в области λ_p, если они обладают следующими свойствами:

– в случае левой факторизующей имеет место соотношение

$$\mathbf{K}(\alpha_3^\nu, +) = \mathbf{K}_{lm}^{-1}(\alpha_3^\nu, -)\mathbf{K}(\alpha_3^\nu);$$

– в случае правой факторизующей справедливо соотношение

$$\mathbf{K}(\alpha_3^\nu, +) = \mathbf{K}(\alpha_3^\nu)\mathbf{K}_{rm}^{-1}(\alpha_3^\nu, -),$$

где матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu, +)$ регулярны в области λ_p и их определители не имеют в этой области нулей, а матрицы-функции $\mathbf{K}_{lm}(\alpha_3^\nu, -)$, $\mathbf{K}_{rm}(\alpha_3^\nu, -)$, обратные к матрицам-функциям $\mathbf{K}_{lm}^{-1}(\alpha_3^\nu, -)$, $\mathbf{K}_{rm}^{-1}(\alpha_3^\nu, -)$ соответственно, регулярны вне области λ_p и их определители не имеют вне этой области нулей.

Доказана

Теорема 1. Пусть элементы матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu)$ являются целыми или рациональными функциями. Пусть определитель матрицы-функции в области λ_p имеет нули $z_{sp}(\boldsymbol{\alpha}')$. Тогда элементы правой факторизующей матрицы-функции $\mathbf{K}_{lm}^{-1}(\alpha_3^\nu, -)$ для $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu)$ представимы в следующей форме:

$$\mathbf{K}_{rm}^{-1}(\alpha_3^\nu, -) = \begin{pmatrix} 1 & & R_{1m}(\alpha_3^\nu) & & 0 \\ & 1 & R_{2m}(\alpha_3^\nu) & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & \ldots & R_{mm}(\alpha_3^\nu) & \ldots & \\ & & \vdots & \ddots & \\ 0 & & R_{Nm}(\alpha_3^\nu) & & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_{pm}(\alpha_3^\nu) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \sum_{s=1}^{N}{}' \frac{D_{ps}(m,u) K_{sm}(u) du}{D_m(u)\Phi_m(u)(u_n - \alpha_3^\nu)},$$

$$p = 1, 2, \ldots, m-1, m+1, \ldots, N, \quad \alpha_3^\nu \notin \lambda_p,$$

$$R_{mm}(\alpha_3^\nu) = \Phi_m^{-1}(\alpha_3^\nu).$$

Матрицы-функции $\mathbf{K}_m(\alpha_3^\nu)$ порядка $N-1$, получающиеся из матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu)$ вычеркиванием строки и столбца под номером m, имеют обратные $\mathbf{K}_m^{-1}(\alpha_3^\nu)$, если их определители $D_m(\alpha_3^\nu)$ отличны от тождественного нуля. Обратную матрицу-функцию $\mathbf{K}_m^{-1}(\alpha_3^\nu)$ можно записать в виде

$$\mathbf{K}_m^{-1}(\alpha_3^\nu) = \left\| D_m^{-1}(\alpha_3^\nu) D_{ps}(m, \alpha_3^\nu) \right\|,$$

$$p \neq m, \quad s \neq m, \quad D_m(\alpha_3^\nu) = \det \mathbf{K}_m(\alpha_3^\nu).$$

Предполагается, что нули ξ_n^ν ее определителя $Q(\alpha_3^\nu) = \det \mathbf{K}(\alpha_3^\nu, m)$ не совпадают с нулями z_{sp}^ν. Теорема доказывается непосредственной проверкой произведения матриц-функций.

Аналогичный вид имеет левая факторизующая матрица-функция $\mathbf{K}_{lm}^{-1}(\alpha_3^\nu, -)$, с той лишь разницей, что

$$\mathbf{K}_{lm}^{-1}\left(\alpha_{3,}^\nu -\right) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ S_{m1} & S_{m2} & \ldots & S_{mm} & \ldots & S_{mN} \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

и подобным видом элементов $S_{mp}(\alpha_3^\nu)$.

$$S_{mp}(\alpha_3^\nu) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\mp} \sum_{s=1}^{N}{}' \frac{Q_{ps}(u_3)K_{ms}(u_3)du_3}{Q(u_3)K(u_3)(u_3-\alpha_3^\nu)} - \\ - \left(\frac{1}{2}\mp\frac{1}{2}\right)\frac{R^0_{mp}(\alpha_3^\nu)}{K(\alpha_3^\nu)},$$

$$m \neq p,$$

$$\frac{R^0_{mp}(\alpha_3^\nu)}{K(\alpha_3^\nu)} = \frac{Z_{mp}(\alpha_3^\nu)}{Q(\alpha_3^\nu)K(\alpha_3^\nu)} + \\ + \sum_n \frac{Z_{mp}(\xi_n^\nu)}{Q'(\xi_n^\nu)K(\xi_n^\nu)(\xi_n^\nu-\alpha_3^\nu)},$$

$$S_{mm}(\alpha_3^\nu) = K^{-1}(\alpha_3^\nu), \quad \alpha_3^\nu \in \lambda_\mp,$$

$$Z_{mp}(\alpha_3^\nu) = \sum_{s=1}^{N}{}' Q_{ps}(\alpha_3^\nu)K_{ms}(\alpha_3^\nu).$$

Ниже будем рассматривать матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu)$, являющиеся характеристическими уравнениями, порождаемыми системами дифференциальных уравнений в частных производных порядка N.

Элементы матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu)$ являются полиномиальными функциями. Представим определитель матрицы-функции в виде

$$K(\alpha_3^\nu) = \det \mathbf{K}(\alpha_3^\nu) \equiv \Phi(\alpha_3^\nu) = \\ = \prod_k (\alpha_3^\nu - z^\nu_{3k+}) \prod_n (\alpha_3^\nu - z^\nu_{3n-}).$$

Обозначим через λ_p область, содержащую все нули определителя $K\left(\alpha_3^\nu\right)$.

Определение 2. Левой дифференциальной факторизацией матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu)$ с полиномиальными коэффициентами будем называть ее представление в виде

$$\mathbf{K}\left(\alpha_3^\nu\right) = \mathbf{K}_{lm}\left(\alpha_3^\nu, -\right)\mathbf{K}\left(\alpha_3^\nu +\right),$$

где элементы матриц-функций $\mathbf{K}_{lm}(\alpha_3^\nu, -)$, $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu +)$ даются теоремой 1.

Правой дифференциальной факторизацией матрицы-функции $\mathbf{K}\left(\alpha_3^\nu\right)$ с полиномиальными коэффициентами будем называть ее представление в виде

$$\mathbf{K}\left(\alpha_3^\nu\right) = \mathbf{K}\left(\alpha_3^\nu +\right)\mathbf{K}_{rm}\left(\alpha_3^\nu, -\right),$$

где элементы матриц-функций $\mathbf{K}_{rm}\left(\alpha_3^\nu, -\right)$, $\mathbf{K}\left(\alpha_3^\nu +\right)$ даются теоремой 1.

Очевидно, матрица-функция $\mathbf{K}\left(\alpha_3^\nu +\right)$ имеет определитель, не зависящий от α_3^ν. Теорема 1 позволяет строить эти факторизации.

Построение формул факторизации мероморфных матриц-функций с элементами, зависящими от нескольких комплексных переменных, явилось принципиальным при дальнейших исследованиях.

2. Ниже строятся формулы факторизации для интегрального метода факторизации. Обсуждаются и решаются вопросы факторизации произвольных матриц-функций, элементы которых являются мероморфными функциями двух комплексных переменных. Строятся правосторонние и левосторонние факторизации, а также формулы, позволяющие осуществлять каноническую факторизацию.

Рассматриваются матрицы-функции $\mathbf{M}(\alpha_3^\nu)$ с мероморфными элементами вида

$$\mathbf{M}(\alpha_3^\nu) = \frac{\mathbf{K}(\alpha_3^\nu)}{M(\alpha_3^\nu)},$$

$$\mathbf{K}(\alpha_3^\nu) = \begin{pmatrix} K_{11}(\alpha_3^\nu) & \dots & K_{1N}(\alpha_3^\nu) \\ \vdots & & \vdots \\ K_{N1}(\alpha_3^\nu) & \cdots & K_{NN}(\alpha_3^\nu) \end{pmatrix}.$$

Здесь в общем случае функции $K_{ij}(\alpha_3^\nu)$, $K^(\alpha_3^\nu)$ являются целыми функциями первого порядка, типа σ.

Очевидно, в общем случае определитель матрицы-функции $K(\alpha_3^\nu) = \det \|K_{ij}(\alpha_3^\nu)\|$ будет целой функцией первого порядка, типа σN.

В связи с этим он в общем случае будет иметь N ветвей нулей, уходящих на бесконечность, имеющих указанное выше представление.

Будем считать, что элементы $M^{-1}(\alpha_3^\nu)K_{ij}(\alpha_3^\nu)$ матрицы-функции убывают как $|\alpha|^\varepsilon$, $|\varepsilon| < 1$, при $|\alpha| \to \infty$.

Обозначим через λ_+ верхнюю комплексную полуплоскость параметра α_3^ν, а через λ_- — нижнюю.

Определение 3. Правосторонней (левосторонней) интегральной факторизацией матрицы-функции $\mathbf{M}(\alpha_3^\nu)$ с нулевыми частными индексами называется ее представление в форме

$$\mathbf{M}\left(\alpha_3^\nu\right) = \mathbf{M}_\mp\left(\alpha_3^\nu\right)\mathbf{M}_\pm\left(\alpha_3^\nu\right).$$

Здесь принято, что верхние знаки этажности отвечают случаю правосторонней факторизации, а нижние — левосторонней факторизации. Матрица-функция $\mathbf{M}_+(\alpha_3^\nu)$ имеет регулярные в области λ_+ элементы и определитель

не обращается в ней в ноль. Матрица-функция $\mathbf{M}_-(\alpha_3^\nu)$ обладает таким же свойством в области λ_-. В общем случае матрицы-функции не коммутативные.

Для факторизации матрицы-функции $\mathbf{M}(\alpha_3^\nu)$ в случае наличия нулей необходимо факторизовать целую функцию $M(\alpha_3^\nu)$, что делается разделением множителей, содержащих нули в нижней и верхней полуплоскостях комплексной плоскости. Главная сложность состоит в том, что необходимо факторизовать матрицу-функцию $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu)$, причем должны быть выполнены требования каноничности факторизации всей матрицы-функции $\mathbf{M}(\alpha_3^\nu)$.

Приводится один из общих случаев факторизации матриц-функций с элементами в виде целых функций, для которых факторизацию удается выполнить точно. Осуществляется факторизация матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu)$.

Пусть нули определителя $K(\alpha_3^\nu)$ имеют N счетных множеств, каждое из которых занимает области λ_p, $p = 1, 2, \ldots, N$.

Положим $\lambda_{p\pm} = \lambda_p \cap \lambda_\pm$.

Условимся в следующих обозначениях:

$$\mathbf{K}_{lm}\left[\mathbf{K}(\alpha_3^\nu)\right]_m = \mathbf{K}_{lm}(\alpha_3^\nu, -)\,\mathbf{K}(\alpha_3^\nu),$$

$$\left[\mathbf{K}(\alpha_3^\nu)\right]_m \mathbf{K}_{rm} = \mathbf{K}(\alpha_3^\nu)\,\mathbf{K}_{rm}(\alpha_3^\nu, -).$$

Здесь левая факторизующая матрица-функция $\mathbf{K}_{lm}(\alpha_3^\nu, -)$ строится для стоящей справа матрицы-функции, а правая факторизующая матрица-функция $\mathbf{K}_{rm}(\alpha_3^\nu, -)$ — для стоящей слева, причем в качестве области выбрана λ_{lm+}.

В этих формулах для построения описанных матриц-функций $\mathbf{K}_{lm}(\alpha_3^\nu, -)$, $\mathbf{K}_{rm}(\alpha_3^\nu, -)$ используются элементы известной матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha_n)$. После этого вычисляются произведения матриц, порождающие новую матрицу-функцию. Применяя эту операцию, представим матрицу-функцию $\mathbf{K}(\alpha_n)$ в виде

$$\mathbf{K}(\alpha_3^\nu) = \mathbf{K}_{l1}^{-1} \ldots \mathbf{K}_{lN-1}^{-1} \mathbf{K}_{lN}^{-1}$$

$$\mathbf{K}_{lN}\left[\mathbf{K}_{lN-1}\left[\ldots \mathbf{K}_{l1}\left[\mathbf{K}(\alpha_3^\nu)\right]_1 \ldots\right]_{N-1}\right]_N.$$

Отсюда справедлива

Теорема 2. Основанные на левой факторизующей матрице функции, правосторонняя интегральная факторизация (левая правосторонняя интегральная факторизация) матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu)$ дается соотношениями

$$\mathbf{K}_+(\alpha_3^\nu) = \\ = \mathbf{K}_{lN}\left[\mathbf{K}_{lN-1}\left[\ldots \mathbf{K}_{l1}[\mathbf{K}(\alpha_3^\nu)]_1 \ldots\right]_{N-1}\right]_N,$$

$$\mathbf{K}_-(\alpha_3^\nu) = \mathbf{K}_{l1}^{-1} \ldots \mathbf{K}_{lN-1}^{-1} \mathbf{K}_{lN}^{-1},$$

$$\mathbf{K}_{lm}[\mathbf{K}(\alpha_3^\nu)]_m = \mathbf{K}_{lm}(\alpha_3^\nu, -)\mathbf{K}(\alpha_3^\nu),$$

если в качестве λ_p выбрано λ_{p+}.

Левосторонняя интегральная факторизация (левая левосторонняя интегральная факторизация) матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu)$ дается соотношениями

$$\mathbf{K}_-(\alpha_3^\nu) = \\ = \mathbf{K}_{lN}\left[\mathbf{K}_{lN-1}\left[\ldots \mathbf{K}_{l1}[\mathbf{K}(\alpha_3^\nu)]_1 \ldots\right]_{N-1}\right]_N,$$

$$\mathbf{K}_+(\alpha_3^\nu) = \mathbf{K}_{l1}^{-1} \ldots \mathbf{K}_{lN-1}^{-1} \mathbf{K}_{lN}^{-1},$$

если в качестве λ_p выбрано λ_{p-}.

Аналогично предыдущему рассмотрим соотношение

$$\mathbf{K}(\alpha_3^\nu) = \Bigg[\ldots\Bigg[\Big[\big[[[K]_1\mathbf{K}_{r1}]_2\mathbf{K}_{r2}]_3\mathbf{K}_{r3}\ldots \\ \ldots\big]_L\mathbf{K}_{rL}\ldots\Big]_{N-1}\mathbf{K}_{rN-1}\Bigg]_N\mathbf{K}_{rN}\mathbf{K}_{rN}^{-1}\mathbf{K}_{rN-1}^{-1}\ldots \\ \ldots\cdot\mathbf{K}_{rL}^{-1}\ldots\cdot\mathbf{K}_{r3}^{-1}\mathbf{K}_{r2}^{-1}\mathbf{K}_{r1}^{-1}.$$

Теорема 3. Основанные на правой факторизующей матрице-функции левосторонняя интегральная факторизация (правая правосторонняя интегральная факторизация) матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu)$ дается соотношениями

$$\mathbf{K}_+(\alpha_3^\nu) = \Bigg[\ldots\Bigg[\Big[\big[[[K]_1\mathbf{K}_{r1}]_2\mathbf{K}_{r2}]_3\mathbf{K}_{r3}\ldots \\ \ldots\big]_L\mathbf{K}_{rL}\ldots\Big]_{N-1}\mathbf{K}_{rN-1}\Bigg]_N\mathbf{K}_{rN},$$

$$\mathbf{K}_-(\alpha_3^\nu) = \mathbf{K}_{rN}^{-1}\mathbf{K}_{rN-1}^{-1}\ldots\cdot\mathbf{K}_{rL}^{-1}\ldots\cdot\mathbf{K}_{r3}^{-1}\mathbf{K}_{r2}^{-1}\mathbf{K}_{r1}^{-1},$$

$$\left[\mathbf{K}(\alpha_3^\nu)\right]_m\mathbf{K}_{rm} = \mathbf{K}(\alpha_3^\nu)\mathbf{K}_{rm}(\alpha_3^\nu, -),$$

если в качестве λ_p выбрано λ_{p+}.

Правосторонняя интегральная факторизация (правая левосторонняя интегральная факторизация) матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu)$ дается соотношениями

$$\mathbf{K}_-(\alpha_3^\nu) = \Bigg[\ldots\Bigg[\Big[\big[[[K]_1\mathbf{K}_{r1}]_2\mathbf{K}_{r2}]_3\mathbf{K}_{r3}\ldots \\ \ldots\big]_L\mathbf{K}_{rL}\ldots\Big]_{N-1}\mathbf{K}_{rN-1}\Bigg]_N\mathbf{K}_{rN},$$

$$\mathbf{K}_+(\alpha_3^\nu) = \mathbf{K}_{rN}^{-1}\mathbf{K}_{rN-1}^{-1}\ldots\cdot\mathbf{K}_{rL}^{-1}\ldots\cdot\mathbf{K}_{r3}^{-1}\mathbf{K}_{r2}^{-1}\mathbf{K}_{r1}^{-1},$$

если в качестве λ_p выбрано λ_{p-}.

Очевидно, для факторизации матрицы-функции $\mathbf{M}(\alpha_3^\nu)$ необходимо произвести деление во всех предыдущих результатах факторизации матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha_3^\nu)$ на результат факторизации функции $K(\alpha_3^\nu)$.

Построенные формулы факторизации составляют фундаментальную основу для практического применения абстрактных построений дифференциального и интегрального методов факторизации [1–4].

Литература

1. *Евдокимова О. В.* Дифференциальный метод факторизации в механике разрушения, материаловедении и сейсмологии // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. № 4. С. 32–42.
2. *Евдокимова О. В, Бабешко В. А., Федоренко А. Г., Бабешко О. М.* О дифференциальном методе факторизации в сложных макро-, микро-, и наноструктурах // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2007. № 1. С. 24–29.
3. *Бабешко В. А., Бабешко О. М, Евдокимова О. В.* Об интегральном и дифференциальном методах факторизации // ДАН. Т. 410. № 2. 2006. С. 168–172.
4. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.* К теории блочных и наноструктур // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. 2007. № 4. С. 42–48.
5. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* К проблеме исследования материалов с покрытиями // ДАН. Т. 410. № 1. 2006. С. 49–52.
6. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* К проблеме оценки состояния материалов с покрытиями // ДАН. Т. 409. № 4. 2006. С. 481–485.
7. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Евдокимов С. М.* Об исследовании физических свойств интеллектуально управляемых материалов и наноматериалов // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2003. № 1. С. 6–9.
8. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* О некоторых типах материалов // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. № 1. С. 14–17.
9. *Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М, Евдокимов С. М.* К решению краевых задач, связанных с факторизацией матриц-функций // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. № 3. С. 7–13.
10. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
11. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
12. *Ворович И. И., Бабешко В. А., Пряхина О. Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 248 с.
13. *Нобл Б.* Метод Винера–Хопфа. М.: Иностранная литература, 1962. 280 с.

Статья поступила 24 июня 2007 г.
Кубанский государственный университет, г. Краснодар
© Евдокимова О. В., 2007