УДК 539.3

ОБ УСЛОВИЯХ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОГО РАВНОВЕСИЯ В ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ДВУХФАЗНОЙ ПЛАСТИНКИ[1]

Еремеев В. А.[2]***, Макарьев А. И.***[3]

ON THE THERMODYNAMICAL EQUILIBRIUM CONDITIONS IN THE PROBLEM OF BENDING OF A TWO-PHASE PLATE

Eremeyev V. A., Makaryev A. I.

We present some recent results of solving static problems of bending of elastic plates with phase transitions. We assume that the plate consists of two phases separated by a smooth curve. The deformation of the plate is described by the vertical displacement w and the position of the curve separating the material phases. The weak formulation is used based on the minimal principle of total energy of a plate. The balance equations along the phase interface are deduced. These equations contain the additional balance relation, which is necessary to determine the position of the phase interface.

Механика материалов, испытывающих фазовые превращения, представляет значительный интерес для развития материаловедения, нанотехнологий, а также в других областях науки и техники. Среди таких элементов конструкций важное место занимают тонкостенные элементы, например, пленки, пластинки и оболочки из сплавов с памятью формы [1–4]. Механика тонкостенных элементов конструкций, испытывающих фазовые превращения, в рамках общей нелинейной механики оболочек построена в [5, 6]. В [5, 6] использована слабая постановка задач статики — состояние равновесия доставляет стационарное значение функционалу потенциальной энергии оболочки на кинематически возможных полях перемещений и поворотов, а также возможных положениях границы раздела фаз. Предполагалось, что в деформированном состоянии оболочка состоит из двух областей, занятых разными фазами и разделенных достаточно гладкой кривой — межфазной границей.

Для трехмерных тел вариационные методы в задаче о фазовом равновесии развивались в ряде работ, например, в [7–9].

В данной работе рассмотрен наиболее простой вариант механики оболочек — линейная теория пластинок [10]. Такая постановка позволяет рассмотреть и построить многие решения статики двухфазных пластин в аналитической форме.

1. Постановка задачи равновесия двухфазной пластинки

Рассмотрим малые прогибы тонкой пластинки, материал которой может испытывать фазовые превращения. Будем предполагать, что пластинка занимает двумерную область Ω, состоящую из двух частей $\Omega = \Omega_A \cup \Omega_B$, разделенных кривой γ, положение которой заранее неизвестно. Деформация пластинки определяется при помощи функции w, описывающей ее прогибы под действием поперечной нагрузки q, а также сил и моментов, приложенных по краю оболочки. Плотность энергии деформации пластинки для каждой фазы примем в виде

$$W_{A,B} = \frac{1}{2} D_{A,B} \left\{ (\nabla^2 w)^2 - (1-\nu_{A,B}) \times \right.$$
$$\left. \times \left[\frac{\partial w^2}{\partial x^2} \frac{\partial w^2}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial w^2}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} + \Delta_{A,B}, \quad (1.1)$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (07-01-00525) и Фонда содействия отечественной науке.

[2]Еремеев Виктор Анатольевич, д-р физ.-мат. наук, зав. лабораторией механики активных материалов Южного научного центра РАН.

[3]Макарьев Антон Иванович, младший научный сотрудник НИИ физики Южного федерального университета.

где $\nabla^2 \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$, x, y — декартовы координаты, $D_{A,B}$ и $\nu_{A,B}$ — изгибная жесткость и коэффициент Пуассона, сответствующие разным фазам оболочки. Фазы будем обозначать буквами A и B, а величины, — относящиеся к ним, индексами A и B соответственно. Постоянные $\Delta_{A,B}$ в (1.1) представляют собой плотности энергии при отсутствии деформаций. Обычно постоянная, с точностью до которой определяется энергия, полагается равной нулю, поскольку определяет уровень отсчета энергии тела. В случае двухфазных тел положить нулю сразу обе постоянные нельзя, потому что энергии фаз матерала в недеформированном состоянии, вообше говоря, отличаются. Разность $\Delta_A - \Delta_B$ определяет скачок энергии при фазовом переходе при отсутствии деформаций. Аналогом разности $\Delta_A - \Delta_B$ в теории плавления является скрытая теплота плавления или кристаллизации.

Уравнения состояния (1.1) сформулированы при условии пренебрежения температурными эффектами и собственной фазовой деформацией.

Далее для простоты вывода предположим, что края пластинки защемлены или свободны от действия внешних сил и моментов. Тогда условия равновесия пластинки могут быть получены из вариационного принципа [10]

$$\delta I = 0,$$

$$I[w] = \iint\limits_{\Omega_A} W_A\, dxdy + \iint\limits_{\Omega_B} W_B\, dx\mathrm{d}y - \iint\limits_{\Omega_A\cup\Omega_B} qw\, dxdy. \quad (1.2)$$

Вариацию δW_A можно представить в виде [10]

$$\delta W_A = M_{11}\delta\kappa_{11} + M_{22}\delta\kappa_{22} + 2M_{12}\delta\kappa_{12} = \mathbf{M}\cdot\cdot\delta\boldsymbol{\kappa}^T \quad (1.3)$$

где $\mathbf{M}$ — тензор моментов

$$\mathbf{M} = M_{11}\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1 + M_{22}\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2 + M_{12}(\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2),$$

$$\begin{aligned} M_{11} &= D_A(\kappa_{11} + \nu_A\kappa_{22}),\\ M_{22} &= D_A(\kappa_{22} + \nu_A\kappa_{11}),\\ M_{12} &= D_A(1-\nu_A)\kappa_{12}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ — координатные орты, $\boldsymbol{\kappa}$ — тензор изгиба-кручения,

$$\boldsymbol{\kappa} = \kappa_{11}\mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_1 + \kappa_{22}\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_2 + \kappa_{12}(\mathbf{e}_2\otimes\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1\otimes\mathbf{e}_2) = -\nabla\nabla w, \quad (1.5)$$

$$\kappa_{11} = -\frac{\partial w^2}{\partial x^2}, \quad \kappa_{22} = -\frac{\partial w^2}{\partial y^2}, \quad \kappa_{12} = -\frac{\partial w^2}{\partial x\partial y}.$$

Аналогично находится выражение для δW_B.

Учитывая варьирование межфазной границы γ и используя формулы [5,6], можно привести вариацию функционала к виду

$$\delta I = \iint\limits_{\Omega_A} \delta W_A\, dxdy + \iint\limits_{\Omega_B} \delta W_B\, dxdy - \iint\limits_{\Omega_A\cup\Omega_B} q\delta w\, dxdy - \int\limits_{\gamma} V\,[\![W]\!]\, ds, \quad (1.6)$$

где V — виртуальная скорость движения межфазной границы в направлении нормали $\mathbf{n}$. Для определенности выбран вектор нормали $\mathbf{n}$, внешний по отношению области Ω_A. Двойными квадратными скобками обозначен скачок соответствующей величины при пересечении межфазной линии, например, $[\![W]\!] \equiv W_A - W_B$.

Используя (1.3)–(1.5), выражение (1.6) можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta I = &-\iint\limits_{\Omega_A} \mathbf{M}\cdot\nabla\nabla\delta w\, dxdy - \iint\limits_{\Omega_B} \mathbf{M}\cdot\nabla\nabla\delta w\, dxdy - \iint\limits_{\Omega_A\cup\Omega_B} q\delta w\, dxdy - \int\limits_{\gamma} V\,[\![W]\!]\,\mathrm{d}s = \\ &= \iint\limits_{\Omega_A} (\nabla\cdot\mathbf{M})\cdot\nabla\delta w\, dxdy + \iint\limits_{\Omega_B} (\nabla\cdot\mathbf{M})\cdot\nabla\delta w\, dxdy - \\ &- \int\limits_{\partial(\Omega_A\cup\Omega_B)} \mathbf{n}\cdot\mathbf{M}\cdot\nabla\delta w\, ds - \iint\limits_{\Omega_A\cup\Omega_B} q\delta w\, dxdy - \\ &- \int\limits_{\gamma} [\![\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}\cdot\nabla\delta w]\!]\,\mathrm{d}s - \int\limits_{\gamma} V\,[\![W]\!]\, ds = \end{aligned}$$

$$= -\iint\limits_{\Omega_A} \nabla\cdot(\nabla\cdot\mathbf{M})\delta w\,dxdy - $$
$$- \iint\limits_{\Omega_B} \nabla\cdot(\nabla\cdot\mathbf{M})\delta w\,dxdy + $$
$$+ \int\limits_{\partial(\Omega_A\cup\Omega_B)} \mathbf{n}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{M})\delta w\,ds - $$
$$- \int\limits_{\partial(\Omega_A\cup\Omega_B)} \mathbf{n}\cdot\mathbf{M}\cdot\nabla\delta w\,ds - $$
$$- \iint\limits_{\Omega_A\cup\Omega_B} q\delta w\,dxdy + $$
$$+ \int\limits_{\gamma} [\![\mathbf{n}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{M})\delta w]\!]\,ds - $$
$$- \int\limits_{\gamma} [\![\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}\cdot\nabla\delta w]\!]\,ds - \int\limits_{\gamma} V\,[\![W]\!]\,ds. \quad (1.7)$$

Учитывая произвольность δw и равенство $\nabla\cdot(\nabla\cdot\mathbf{M}) = -D_{A,B}\nabla^4 w$, из (1.2) и (1.7) следует уравнение равновесия внутри пластины [10]

$$D_{A,B}\nabla^4 w = q. \quad (1.8)$$

На краю пластинки $\partial(\Omega_A\cup\Omega_B)$ получаются стандартные краевые условия [10], которые здесь не приводятся.

Из (1.2) и (1.7) также следует соотношение

$$\int\limits_{\gamma}\Big\{V\,[\![W]\!] + [\![\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}\cdot\nabla\delta w]\!] - $$
$$- [\![\mathbf{n}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{M})\delta w]\!]\Big\}\,ds = 0. \quad (1.9)$$

Считая, что γ замкнута или что ее концы фиксированы, уравнение (1.9) можно преобразовать к виду

$$\int\limits_{\gamma}\left\{V\,[\![W]\!] + \left[\!\!\left[\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{n}\frac{\partial\delta w}{\partial n}\right]\!\!\right] - \right.$$
$$- \left[\!\!\left[\Big\{\frac{\partial}{\partial s}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{t}) + \right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \mathbf{n}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{M})\Big\}\delta w\right]\!\!\right]\right\}ds = 0, \quad (1.10)$$

где $\mathbf{t}$ — единичный касательный вектор к γ, $\dfrac{\partial}{\partial n}$ — производная по нормали к γ, а $\dfrac{\partial}{\partial s}$ — по касательной к γ, s — длина дуги.

Из (1.10) следует равенство

$$V\,[\![W]\!] + \left[\!\!\left[\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{n}\frac{\partial\delta w}{\partial n}\right]\!\!\right] - $$
$$- \left[\!\!\left[\Big\{\frac{\partial}{\partial s}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{t}) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \mathbf{n}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{M})\Big\}\delta w\right]\!\!\right] = 0. \quad (1.11)$$

2. Условия баланса на межфазной границе

Рассмотрим уравнение (1.11) более подробно. Вариации δw_A, δw_B и V, входящие в (1.11), вообще говоря, не являются независимыми. Функция w является непрерывной (иначе нарушится сплошность пластинки) и кусочно дифференцируемой. Это значит, что выполняется равенство

$$[\![w]\!] = 0. \quad (2.1)$$

Из (2.1) сразу же следует кинематическое соотношение, связывающее вариации δw_A, δw_B и V на межфазной границе

$$[\![\delta w]\!] + V\left[\!\!\left[\frac{\partial w}{\partial n}\right]\!\!\right] = 0. \quad (2.2)$$

Если предположить, что функция w является непрывно дифференцируемой, то из уравнения

$$\left[\!\!\left[\frac{\partial w}{\partial n}\right]\!\!\right] = 0$$

следует второе кинематическое соотношение, связывающее вариации δw_A, δw_B и V на межфазной границе

$$\left[\!\!\left[\frac{\partial\delta w}{\partial n}\right]\!\!\right] + V\left[\!\!\left[\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}\right]\!\!\right] = 0. \quad (2.3)$$

В [5,6] для оболочек были введены два типа границ раздела фаз: когерентные и некогерентные по отношению к поворотам. Для первого типа границ предполагалось, что перемещения и повороты поверхности оболочки являются непрерывными, а для второго допускалось отсутствие непрерывности у поля поворотов. Учитывая, что в рамках рассматриваемой теории пластин величина $\dfrac{\partial w}{\partial n}$ описывает поворот как края оболочки, так и линии раздела фаз, терминологию [5, 6] можно распространить на случай линейной теории пластин. А именно, назовем межфазную границу когерентной, если на ней одновременно выполняются кинематические соотношения (2.2) и (2.3). Межфазную границу, на которой выполняется только (2.2), будем называть некогерентной по отношению к поворотам. С механической точки зрения последний тип границ соответствует шарнирному закреплению между собой частей пластинки, занятыми разными фазами, а когерентный тип границ — жесткой связи этих частей.

Для когерентных межфазных границ из (1.11) с учетом (2.2) и (2.3) следуют уравнения баланса

$$\begin{gathered}[\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{n}]=0,\\ \left[\!\!\left[\frac{\partial}{\partial s}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{t})+\mathbf{n}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{M})\right]\!\!\right]=0,\end{gathered}\tag{2.4}$$

$$[\![W]\!]-\left[\!\!\left[\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{n}\frac{\partial w^2}{\partial n^2}\right]\!\!\right]+\left[\!\!\left[\left\{\frac{\partial}{\partial s}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{t})+\mathbf{n}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{M})\right\}\frac{\partial w}{\partial n}\right]\!\!\right]=0.\tag{2.5}$$

Уравнения (2.4) представляют собой условия механического равновесия для составной оболочки (условия равенства моментов, а также перерезывающих сил). Уравнение (2.5) является дополнительным соотношением, соответствующим новой степени свободы, появившейся в задаче о фазовом равновесии – заранее неизвестной линии γ. По своей природе оно аналогично термодинамическому условию равновесия фаз трехмерных нелинейно упругих тел [7–9, 11].

Для некогерентных межфазных границ уравнения баланса имеют вид

$$\begin{gathered}\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}_{A,B}\cdot\mathbf{n}=0,\\ \left[\!\!\left[\frac{\partial}{\partial s}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{t})+\mathbf{n}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{M})\right]\!\!\right]=0,\end{gathered}\tag{2.6}$$

$$[\![W]\!]+\left[\!\!\left[\left\{\frac{\partial}{\partial s}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{t})+\mathbf{n}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{M})\right\}\frac{\partial w}{\partial n}\right]\!\!\right]=0.\tag{2.7}$$

Полученные здесь соотношения баланса на фазовой границе (2.4)–(2.7) являются специальным случаем соотношений, полученных ранее в [5], и, вообще говоря, могут быть выведены непосредственно из общих формул [5] с использованием уравнений линейной теории пластин. Данный здесь вывод существенно проще [5], поскольку использован более простой вариант теории пластин.

3. Конфигурационные силы в теории пластин

Выражения, образующие правые части уравнений баланса (2.5), (2.7), представляют собой конфигурационную силу (configurational force, driving force), действующую на межфазную границу. Концепция конфигурационных сил оказалась полезной при описании неоднородных тел [12–14], в частности, для описания движения дефектов разной природы.

Конфигурационные силы, действующие на когерентную и некогерентную межфазные границы, соответственно равны

$$\mathbb{F}_C=[\![W]\!]-\left[\!\!\left[\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{n}\frac{\partial w^2}{\partial n^2}\right]\!\!\right]+\left[\!\!\left[\left\{\frac{\partial}{\partial s}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{t})+\mathbf{n}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{M})\right\}\frac{\partial w}{\partial n}\right]\!\!\right],$$

$$\mathbb{F}_I=[\![W]\!]+\left[\!\!\left[\left\{\frac{\partial}{\partial s}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{M}\cdot\mathbf{t})+\mathbf{n}\cdot(\nabla\cdot\mathbf{M})\right\}\frac{\partial w}{\partial n}\right]\!\!\right].$$

Рассмотрим квазистатическую деформацию пластины, т. е. предположим, что функция w зависит от времени t как от параметра и удовлетворяет уравнениям равновесия (1.8), кинематическим условиям баланса и статическим условиям равновесия (2.4) или (2.6) на границе $\gamma(t)$, а также соответствующим краевым условиям на $\partial\Omega$.

Тогда изменение во времени полной энергии пластины оказывается равным

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}I=-\int_{\gamma}V\mathbb{F}\,ds,\tag{3.1}$$

где V — скорость движения γ, $\mathbb{F}=\mathbb{F}_C$ для когерентной границы, и $\mathbb{F}=\mathbb{F}_I$ для некогерентной.

Из (3.1) видно, что если движение кривой сопровождается диссипацией энергии, справедливо неравенство

$$V\mathbb{F}\geq 0.\tag{3.2}$$

Неравенство (3.2) должно выполняться при любых квазистатических движениях пластины, происходящих в условиях механического равновесия. В состоянии термодинамического равновесия, согласно (2.5), (2.7), конфигурационные силы тождественно равны нулю.

Полученные результаты представляют интерес не только для моделирования фазовых превращений мартенситного типа, но также для описания движения и равновесия произвольных сингулярных кривых в пластинке, определяющих дефекты разной природы (например, изломы поверхности пластины, полосы сдвига и др.), при использовании линейной теории пластин [10].

Литература

1. *Bhattacharya K., James R.D.* A theory of thin films of martensitic materials with applications to microactuators // J. Mech. Phys. Solids. 1999. Vol. 36. P. 531–576.
2. *James R.D., Rizzoni R.* Pressurized shape memory thin films // J. Elasticity. 2000. Vol. 59. P. 399–436.
3. *Feng P., Sun Q. P.* Experimental investigation on macroscopic domain formation and evolution in polycrystalline NiTi microtubing under mechanical force // J. Mech. Phys. Solids. 2006. Vol. 54. P.1568–1603.
4. *Pieczyska E. A., Tobushi H., Gadaj S. P., Nowacki W. K.* Superelastic deformation behaviors based on phase transformation bands in TiNi shape memory alloy// Materials Trans. 2006. Vol. 47. No. 3. P. 670–676.
5. *Eremeyev V. A., Pietraszkiewicz W.* The nonlinear theory of elastic shells with phase transitions // J. Elasticity. 2004. Vol. 74. No 1. P. 67–86.
6. *Pietraszkiewicz W., Eremeyev V. A., Konopińska V.* Extended non-linear relations of elastic shells undergoing phase transitions// ZAMM. 2007. Vol. 87. No. 2. P. 150–159.
7. *Гринфельд М.А.* Методы механики сплошных сред в теории фазовых превращений. М.: Наука. 1990. 312 с.
8. *Осмоловский В.Г.* Вариационная задача о фазовых переходах в механике сплошной среды. СПб: Изд-во СПб ун-та, 2000. 262 с.
9. *Bhattacharya K., Kohn R.V.* Elastic energy minimization and the recoverable strains of polycrystalline shape-memory materials // Arch. Rational Mech. Anal. 1997. Vol. 139. P. 99–180.
10. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 624 с.
11. *Еремеев В.А., Фрейдин А.В., Шарипова Л.Л.* Об устойчивости равновесия двухфазных упругих тел // ПММ. 2007. Т. 71. Вып. 1. С. 66–92.
12. *Maugin G.A.* Material inhomogeneities in elasticity. London et al.: Chapman Hall, 1993. 276 p.
13. *Gurtin M.E.* Configurational forces as basic concepts of continuum physics. Berlin et al.: Springer-Verlag, 2000. 249 p.
14. *Kienzler R., Herrmann G.* Mechanics in material space with applications to defect and fracure mechanics. Berlin et al.: Springer-Verlag, 2000. 299 p.

Статья поступила 19 июня 2007 г.
Южный научный центр РАН
Южный федеральный университет