

УДК 533.6

ДИНАМИКА ТВЕРДОЙ ПЛАСТИНЫ НА СЛОЕ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ АПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Ефремов И. И.¹, Лукащук Е. П.²

DYNAMICS OF A SOLID PLATE ON A LAYER OF COMPRESSIBLE FLUID UNDER
APERIODIC PERTURBATIONS

Efremov I. I., Lukashchik E. P.

This paper is dedicated to the research of dynamics of a plate on a layer of compressible fluid. Using the Fourier and Laplace transformations, the initially boundary-value problem for the velocity potential is reduced to an integral equation, which is further solved by the numerical method. On the basis of the numerical data obtained, the approximation of a transient characteristic is carried out. Results are presented in the graphical form for different values of the layer width.

В основе большинства проектов гигантских плавучих объектов (мелководных аэропортов, искусственных островов и т. п.) лежит концепция плавающей пластины. В силу этого особое значение приобретают исследования динамики плавающих пластин как численными, так и аналитическими методами. Результаты таких исследований можно использовать в этих проектах на этапе создания математических моделей, прогнозирования поведения названных объектов при нестационарных природных и техногенных возмущениях.

Нестационарные гидродинамические характеристики пластины, совершающей гармонические колебания на слое сжимаемой жидкости, определялись в работе авторов [1].

Настоящая работа посвящена определению динамического поведения твердой недеформируемой пластины при аперриодических возмущениях в слое жидкости.

Пусть на слое сжимаемой жидкости расположена пластина длины $2a$. Начало декартовой системы координат расположим в центре пластины. В момент времени $t = 0$ точкам пластины сообщается малая вертикальная скорость $V_0(x, t)$.

Течение сжимаемой жидкости описывается волновым уравнением

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0. \quad (1)$$

Граничными условиями являются:

1) условие непротекания пластины

$$\varphi_y = V_0(x, t), \quad y = 0, \quad |x| \leq a;$$

2) условие непротекания нижней твердой границы

$$\varphi_y = 0, \quad y = -h;$$

3) условие постоянства давления на свободной поверхности вне пластины

$$\varphi = 0.$$

Начальные условия примем нулевыми

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, 0) &= 0, \\ \varphi_t(x, y, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Для решения нестационарных задач, как правило, используется преобразование Лапласа по временной переменной

$$\Phi(x, y, s) = \int_0^{\infty} \varphi(x, y, t) e^{-st} dt.$$

Краевая задача для образа Лапласа $\Phi(x, y, s)$ от потенциала скорости $\varphi(x, y, t)$ будет иметь вид

$$\Phi_{xx} + \Phi_{yy} - \frac{s^2}{c^2} \Phi = 0, \quad -h < y < 0, \quad (2)$$

¹Ефремов Ион Иванович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры вычислительной математики и информатики Кубанского государственного университета.

²Лукащук Елена Павловна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры информационных технологий Кубанского государственного университета.

$$\begin{aligned}\Phi_y &= V_0(x, s), \quad y = 0, \quad |x| \leq a, \\ \Phi_y &= 0, \quad y = -h.\end{aligned}$$

Далее применяем преобразование Фурье по переменной x

$$\tilde{\Phi}(\alpha, y, s) = F[\Phi(x, y, s)](\alpha, y, s).$$

Для функции $\tilde{\Phi}(\alpha, y, s)$ получим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y^2} - (\alpha^2 + \nu^2) \tilde{\Phi} &= 0, \\ i\alpha \tilde{\Phi}(\alpha, -0, s) &= \Gamma(\alpha, s), \quad y = 0, \\ \tilde{\Phi}_y &= \tilde{V}(\alpha, s), \quad y = 0, \\ \tilde{\Phi}_y &= 0, \quad y = -h.\end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\nu = s/c,$$

$$\Gamma(\alpha, s) = i\alpha \tilde{\Phi}(\alpha, -0, s),$$

$$\tilde{V}(\alpha, s) = F[\Phi_y(x, 0_-, s)].$$

Решая краевую задачу (3), приходим к функциональному уравнению

$$\frac{\Gamma(\alpha)}{i} \frac{\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}}{\alpha} \operatorname{th}(h\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}) = \tilde{V}(\alpha). \quad (4)$$

Совершив обратное преобразование Фурье с использованием теоремы Парсеваля и учитывая финитность функции $\gamma(x, s)$, приходим к интегральному уравнению

$$\int_{-1}^1 \gamma(\xi, s) k(x - \xi, s) d\xi = V_0(x, s), \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned}k(x, s) &= F^{-1}[K(\alpha, s)](x, s), \\ K(\alpha, s) &= \frac{\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}}{i\alpha} \operatorname{th}(h\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}),\end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned}k(x, s) &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}}{\alpha} \operatorname{th}(h\sqrt{\alpha^2 + \nu^2}) e^{-i\alpha x} d\alpha.\end{aligned}$$

Отметим, что интеграл в (5) следует понимать в смысле обобщенных функций [2], поскольку подынтегральная функция при $\alpha \rightarrow \infty$ имеет предел

$$K(\alpha) \rightarrow \frac{\operatorname{sign}(\alpha)}{i} \text{ при } \alpha \rightarrow \infty.$$

Известно, что

$$F^{-1} \left[\frac{\operatorname{sign}(\alpha)}{i} \right] (x) = -\frac{1}{2\pi} P \left(\frac{1}{x} \right),$$

где $P \left(\frac{1}{x} \right)$ — обобщенная функция, которая в свертке с основными функциями приводит к интегралу в смысле главного значения по Коши [2].

Применяя теорему вычетов, ядро уравнения можно представить в виде суммы вычетов (аналогичный подход для вычисления ядер интегральных уравнений применяется в [3] при решении задач механики твердого тела)

$$\begin{aligned}k(x, s) &= \frac{1 + \operatorname{sign}(x)}{2} \nu \operatorname{th}(\nu h) + \\ &+ \frac{\operatorname{sign}(x)}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m^2}{b_m^2 + \nu^2} e^{-\sqrt{b_m^2 + \nu^2} |x|},\end{aligned}$$

где $b_m = \frac{2m-1}{2h} \pi$.

Решение интегрального уравнения (5) ищем в классе функций, неограниченных на краях пластины [4]. При этом необходимо выполнение условия ограниченности потенциала (или давления) на краях, что равносильно условию бесциркуляционности течения

$$\int_{-1}^{+1} \gamma(\xi, s) d\xi = 0.$$

Численное решение интегрального уравнения (5) строим при помощи метода квадратур Корнейчука [5]. При таком подходе интегральное уравнение аппроксимируется системой линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\pi}{N} \sum_{j=1}^N \gamma_j \sqrt{1 - \xi_j^2} k(x_i - \xi_j, s) = V_0(x, s), \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^N \gamma_j \sqrt{1 - \xi_j^2} = 0, \quad x_i = \cos\left(i \frac{\pi}{N}\right),$$

$$\xi_j = \cos\left(\frac{2j-1}{2N} \pi\right).$$

Здесь N — число вихрей с интенсивностью γ_j , ξ_j — точки размещения вихрей, x_i — точки коллокаций.

После решения системы (6), вычисляем коэффициент нормальной силы

$$C_n(s) = -\frac{\pi}{N} \sum_{j=1}^N \xi_j \sqrt{1 - \xi_j^2} \gamma_j(s).$$

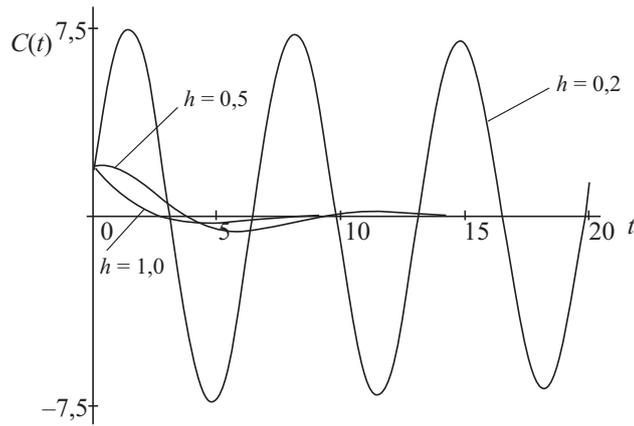


Рис. 1. Зависимость переходной характеристики от толщины слоя

По найденным числовым значениям функции $C_n(s)$ выполним аппроксимацию ее дробно-рациональной функцией

$$C_n(s) = \frac{l_0 + 2l_2s}{1 + l_1s + l_2s^2}. \quad (7)$$

Структура аппроксимирующей функции была выбрана в соответствии с поведением $C_n(s)$ при $s \rightarrow 0$ и $s \rightarrow \infty$: предельное значение $C_n(0)$ соответствует решению для несжимаемой жидкости, а при $s \rightarrow \infty$ согласно функциональному уравнению (4) легко установить, что $C_n(s) \rightarrow \frac{2}{s}$.

После определения констант l_i ($i = 0, 1, 2$) в выражении (6) путем применения обратного преобразования Лапласа приходим к следующему аналитическому выражению для переходной характеристики:

$$C(t) = a_1 e^{-\alpha t} \cos \beta t + a_2 e^{-\alpha t} \sin \beta t.$$

Расчеты показывают, что с уменьшением толщины слоя h заметно уменьшается демпфирование, вызванные возмущения представляют собой слабозатухающие колебания. Увеличение величины h приводит к сильному затуханию, вследствие чего, например, при $h = 0,5$ возмущения заметны практически лишь в течение временного интервала, равного периоду вызванных колебаний.

На рис. 1 представлены переходные характеристики пластины при толщине слоя $h = 0,2$ и $h = 0,5$ для случая резкого вертикального порыва (задача Вагнера [6])

$$V_0(x, t) = V_0 U(t),$$

где $U(t)$ — единичная функция Хевисайда.

Представленные выше результаты не отражают влияния на переходной процесс массы пластинки и массы жидкости.

Для исследования эффекта влияния отношения плотности материала пластины к плотности жидкого основания на динамику пластины введем новый безразмерный параметр

$$m = \frac{2\rho_0 h_0}{\rho a},$$

где ρ_0, h_0 — плотность и толщина материала пластины.

В случае поступательных вертикальных колебаний движение пластины как твердого тела можно свести к задаче о движении центра масс

$$\frac{d^2 f_c}{dt^2} = P.$$

Учет влияния массы приводит к появлению дополнительного слагаемого в уравнении (5)

$$\int_{-1}^{+1} \gamma(\xi, s) k(x - \xi, s) d\xi - \frac{1}{m} \int_{-1}^{+1} \xi \gamma(\xi, s) d\xi = V_0. \quad (8)$$

Определив решение интегрального уравнения (8), выражение для коэффициента нормальной силы можно представить в виде

$$C_n(s, m) = \frac{m C_n(s)}{m + C_n(s)}, \quad (9)$$

где $C_n(s)$ задается формулой (7).

Формула (9) показывает, что массивная пластина на слое жидкости функционирует как система с обратной связью [7].

Результаты, представленные на рис. 1, соответствуют частному случаю $m = \infty$.

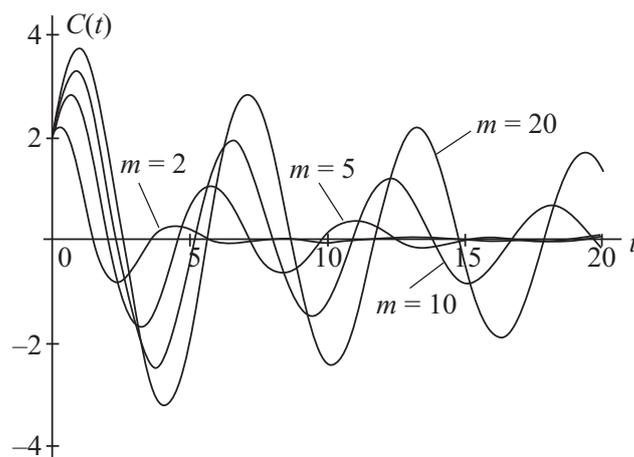


Рис. 2. Зависимость переходной характеристики от относительной массы

Графики коэффициента нормальной силы для массивной твердой пластины при фиксированной ширине слоя жидкости ($h = 0, 2$) на рис. 2 демонстрируют влияние относительной массы на характер переходного процесса, выражающееся в том, что уменьшение относительной массы приводит к более быстрому затуханию колебаний.

Описанная в настоящей работе математическая модель может быть использована для определения реакции на малые нестационарные возмущения произвольной формы с помощью интеграла Дюамеля, а также может послужить основой для создания более сложной модели, учитывающей упругие деформации пластины под действием гидродинамических сил.

Литература

1. Ефремов И. И., Лукащук Е. П. Применение метода дискретных особенностей для решения мо-

дельных задач теории упругости и гидродинамики // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2005. № 3. С. 21–27.

2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. Москва: Наука, 2000. 512 с.
3. Воронич И. И., Бабешко В. А., Прякина О. Д. Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 247 с.
4. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
5. Корнейчук А. А. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов // Вычислительная математика и математическая физика. 1964. Т. 4. № 4. С. 64–74.
6. Некрасов А. И. Теория крыла в нестационарном потоке. М.: Изд-во АН СССР, 1947. 258 с.
7. Попов Е. П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1989. 304 с.

Статья поступила 24 января 2007 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

© Ефремов И. И., Лукащук Е. П., 2007