Математика

УДК 517.544.72+517.574

О ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВАХ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ КЛАССОВ $\Re^\theta$

Берберян С. Л.[1]

ON CLUSTER SETS OF CONTINUOUS FUNCTIONS IN CLASSES $\Re^\theta$

Berberyan S. L.

The article considers cluster sets for a wide range of continuous functions defined within a unit circle. The conditions have been obtained, which are necessary and sufficient for the existence of Plessner points on the unit circumference.

Теория предельных множеств комплекснозначных функций, в частности, мероморфных функций, определённых в единичном круге, широко освещена в монографиях [1, 2]. Граничному поведению голоморфных, мероморфных, гармонических функций, определённых в единичном круге, посвящены многие статьи [3–7]. Как известно [1, 2, 8], в этой теории важную роль играют принадлежащие единичной окружности точки, в которых предельные множества по любому углу совпадают. Множество таких точек обозначают $K(f)$. Кроме того, в теории предельных множеств большое внимание уделяется точкам Плеснера, т. е. точкам, в которых предельное множество по любому углу совпадает с замыканием числовой прямой. Цель работы — охарактеризовать вышеуказанные точки единичной окружности для достаточно широкого класса действительнозначных функций, определённых в единичном круге.

В настоящей работе использованы общепринятые обозначения: через D, Γ и $h(\xi,\varphi)$ обозначены соответственно единичный круг $|z|<1$, единичная окружность $|z|=1$ и хорда единичного круга D, оканчивающаяся в точке $\xi=e^{i\theta}\in\Gamma$ и образующая с радиусом в этой точке угол φ; $-\frac{\pi}{2}<\varphi<\frac{\pi}{2}$. Пусть $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$ — подобласть круга D, ограниченная хордами $h(\xi,\varphi_1)$ и $h(\xi,\varphi_2)$. Область $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$ называют обычно углом Штольца с вершиной в точке $\xi=e^{i\theta}\in\Gamma$ и кратко обозначают $\Delta(\xi)$. Интерпретируя круг D, как модель плоскости в геометрии Лобачевского, обозначим через $\sigma(z_1,z_2)$ неевклидовое расстояние между точками z_1, z_2 из круга D

$$\sigma(z_1,z_2)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u},\ \text{где } u=\left|\frac{z_1-z_2}{1-z_1\bar{z}_2}\right|.$$

Рассмотрим действительнозначную функцию $f(z)$. Для произвольного подмножества S круга D, для которого точка $\xi\in\Gamma$ — предельная точка, обозначим через $C(f,\xi,S)$ предельное множество функции $f(z)$ в точке ξ относительно множества S, т. е. $C(f,\xi,S)=\cap\overline{f(S\cap U(\xi))}$, где пересечение берётся по всем окрестностям $U(\xi)$ точки ξ, а черта означает замыкание множества относительно двухточечной компактификации $\overline{R}$ множества $R=(-\infty,+\infty)$ в виде отрезка посредством добавления к точкам множества R символов $-\infty$ и $+\infty$. Точку $\xi\in\Gamma$ отнесём к множеству $F(f)$, если $C(f,\xi,\Delta(\xi))$ состоит из единственного значения α. В этом случае говорят, что функция $f(z)$ имеет в точке $\xi\in\Gamma$ угловой предел α. Множество $F(f)$ называется множеством точек Фату для функции $f(z)$. Точку $\xi\in\Gamma$ отнесём к множеству $I(f)$, если $C(f,\xi,\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2))=C(f,\xi,\Delta(\xi,\varphi_1',\varphi_2'))=\overline{R}$ для любых двух углов $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$, $\Delta(\xi,\varphi_1',\varphi_2')$, где $\varphi_i,\varphi_i'\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $i=1,2$. Множество $I(f)$ называется множеством

[1]Берберян Самвел Левонович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики и математического моделирования Российско-Армянского (Славянского) государственного университета.

точек Плеснера для функции $f(z)$. Точку $\xi \in \Gamma$ относят к множеству $K(f)$ для функции $f(z)$, определённой в D, если $C(f,\xi,\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)) = C(f,\xi,\Delta(\xi,\varphi_1',\varphi_2'))$ для любых углов $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$ и $\Delta(\xi,\varphi_1',\varphi_2')$ с вершиной в точке ξ.

Понятие нормальной функции, введенное для мероморфных функций и состоящее в свойстве порождать нормальное семейство на группе T всех конформных автоморфизмов области определения, было затем перенесено на гармонические и субгармонические функции. В случае единичного круга D группа T состоит из элементов $\mathrm{T} = \{S(z);\ S(z) = e^{i\alpha}(z+a)(1+\bar{a}z)^{-1}$, a — произвольная точка в D, α — произвольное действительное число $\}$. Придерживаясь обозначений работы [9], положим, что действительнозначная функция $f(z) \in \Re$, если на группе T всех конформных автоморфизмов единичного круга D порождаемое ею семейство функций $\Phi : \{f(S(z));\ S(z) \in \mathrm{T}\}$ нормально в D в смысле Монтеля, т. е. из любой последовательности $\{f(S_n(z))\}$ семейства Φ, где $S_n(z) \in \mathrm{T}$ можно извлечь подпоследовательность $\{f(S_{n_k}(z))\}$, равномерно сходящуюся на любом компакте K в D или равномерно расходящуюся к $-\infty$ или к $+\infty$ на K. В [9] сформулирована общая задача об изучении граничных свойств мероморфных функций, порождающих нормальные семейства на подгруппах группы T. Была рассмотрена подгруппа $\mathrm{T}^\theta = \{S_a^\theta(z);\ S_a^\theta(z) = (z + ae^{i\theta})(1 + aze^{-i\theta})$, где $a \in (-1,1)$ и θ, $0 \leqslant \theta < \pi$ — фиксировано $\}$. Действительнозначную функцию $f(z)$ отнесём к классу $\Re^\theta$, где $0 \leqslant \theta < \pi$ — фиксировано, если порождаемое ею семейство функций $\Phi^\theta = \{f(S_a^\theta(z));\ S_a^\theta \in \mathrm{T}^\theta\}$ нормально в D в смысле Монтеля.

Теорема 1. Пусть непрерывная в D функция $f(z) \in \Re^\theta$, где $0 \leqslant \theta < \pi$ — фиксировано. Для того, чтобы точка $\xi = e^{i\theta} \in \Gamma$ (или $\xi = -e^{i\theta}$) была точкой из множества $K(f)$, необходимо и достаточно совпадение предельных множеств $C(f,\xi,h(\xi,\varphi))$ для множества значений φ, всюду плотных в интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Теорема 2. Для того, чтобы для непрерывной функции $f(z) \in \Re^\theta$, где $0 \leqslant \theta < \pi$, точка $\xi = e^{i\theta}$ (или $\xi = -e^{i\theta}$) была точкой Плеснера, необходимо и достаточно существование такой последовательности $\{z_n\} \to \xi$, целиком лежащей внутри некоторого угла $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$, для которой предельное множество $C(f,\xi,z_n)$ не ограничено ни сверху, ни снизу.

Теорема 3. Если $\xi \in \Gamma$ — точка Плеснера для непрерывной функции $f(z)$ класса $\Re^\theta$, $0 \leqslant \theta < \pi$ фиксировано, то предельное множество $C(f,\xi,\{z_n\})$ совпадает с $\overline{R}$ для любой последовательности $\{z_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \xi$, лежащей внутри некоторого угла $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$ и удовлетворяющей условию $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(z_n,z_{n+1}) = 0$.

Предварительно докажем леммы.

Лемма 1. Пусть непрерывная в D функция $f(z) \in \Re^\theta$ ($0 \leqslant \theta < \pi$ фиксировано) и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = c$ по некоторой последовательности $\{z_n\} \in \Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$, $z_n \to \xi = e^{i\theta}$ (или $-e^{i\theta}$). Если $\{z_n'\}$ — произвольная последовательность точек в D, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(z_n,z_n') = 0$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n') = c$.

Доказательство леммы 1 приведено в работе [10].

Для доказательства теоремы 2 рассмотрим следующее утверждение.

Лемма 2. Пусть $f(z)$ — непрерывная в D функция класса $\Re^\theta$, где $0 \leqslant \theta < \pi$, и имеет место совпадение предельных множеств $C(f,\xi,h(\xi,\varphi))$ в точке $\xi = e^{i\theta}$ или ($\xi = -e^{i\theta}$) для множества значений φ, всюду плотных в интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Тогда совпадение предельных множеств $C(f,\xi,h(\xi,\varphi))$ имеет место для любых значений $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

Доказательство. В силу непрерывности функции $f(z)$ и связности хорд предельные множества $C(f,\xi,h(\xi,\varphi))$ для указанных в лемме 2 хорд $h(\xi,\varphi)$ совпадают с некоторым замкнутым промежутком $[\alpha,\beta]$, причем возможно, что $\alpha = -\infty$ или $\beta = +\infty$. Докажем, что и для любого $\varphi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ предельное множество $C(f,\xi,h(\xi,\varphi_0))$ совпадает с $[\alpha,\beta]$. Рассмотрим такую последовательность хорд $\{h(\xi,\varphi)\}_{n=1}^\infty$, что $\varphi_n = \varphi_0$ и $C(f,\xi,h(\xi,\varphi_n)) = [\alpha,\beta]$.

Пусть γ — произвольное число, принадлежащее промежутку $[\alpha,\beta]$. Тогда на каждой хорде $h(\xi,\varphi_n)$ найдется такая последовательность $\{z_n^k\} \in h(\xi,\varphi_n)$, $\{z_n^k\} \to \xi$ при $k \to \infty$, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_n^k) = \gamma$. Фиксируя n, через точки этой последовательности проведем неевклидовые перпендикуляры к $h(\xi,\varphi_0)$, пересекающие эту хорду соответственно в точках $\{p_n^k\}_{k=1}^\infty$. Изменяя n получим множество последовательностей: $z_1^1, z_1^2, \ldots, z_1^k$; $z_2^1, z_2^2, \ldots, z_2^k$; $z_n^1 z_n^2, \ldots, z_n^k, \ldots$.

Из этого множества выберем диагоналевую последовательность $\{z_{n_m}^m\}_{m=1}^\infty$ таким образом, чтобы $\lim\limits_{m\to\infty} \sigma(z_{n_m}^m, p_{n_m}^m) = 0$ и

$\lim\limits_{m\to\infty} f(z^m_{n_m}) = \gamma$. Отсюда, в силу утверждения леммы 1, следует, что $\lim\limits_{m\to\infty} p(z^m_{n_m}) = \gamma$. Поэтому, в силу произвольности числа γ, получим $C(f,\xi,h(\xi,\varphi_0)) \in [\alpha,\beta]$ при любом $\varphi_0 \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Докажем справедливость следующего соотношения:

$$C(f,\xi,h(\xi,\varphi)) = [\alpha,\beta] \tag{1}$$

при любом $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Без нарушения общности допустим, что $\alpha \neq -\infty$ и $\lambda < \alpha$. Обозначим через $\delta = \alpha - \lambda$ разность. Рассмотрим такую последовательность $\{q_k\}_{k=1}^\infty$, что $q_k \in C(f,\xi,h(\xi,\varphi))$ и $\lim\limits_{k\to\infty} f(q_k) = \lambda$. Проведем через точки $\{q_k\}$ неевклидовые перпендикуляры E_k к хорде $h(\xi,\varphi)$, пересекающие при любом фиксированном n хорду $h(\xi,\varphi_n)$ в точках l^n_k, где $k = 1,2,\ldots$ и $n = 1,2,\ldots$. В силу предположения, при любом фиксированном n из последовательности $\{l^n_k\}_{k=1}^\infty$ можно выбрать такую точку $l^n_{k_n}$, где $k_n \in N$, что

$$f(l^n_{k_n}) - \lambda > \frac{\delta}{2}. \tag{2}$$

Значения k_n можно выбирать таким образом, чтобы $k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots$. Так как $\varphi_n \to \varphi$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(q^n_{k_{n'}}, l^n_{k_n}) = 0$. Принимая во внимание утверждение леммы 1, получим $\lim\limits_{n\to\infty} f(l^n_{k_n}) = \lambda$. А это противоречит неравенству (2), тем самым утверждение леммы 2 доказано.

Для доказательства теоремы 2 докажем следующее утверждение.

Лемма 3. Пусть непрерывная в D функция $f(z)$ из класса $\Re^\theta$, где $0 \leqslant \theta < \pi$. Если существует такая последовательность $\{z_n\} \to \xi$ (или$\{z_n\} \to -\xi$), что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \sigma(z_n, z_{n+1}) \leqslant M < \infty$, $\{z_n\}$ лежит внутри некоторого угла $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$ и предельное множество $C(f,\xi,\{z_n\})$ ограничено сверху (или снизу), то функция $f(z)$ ограничена сверху (или снизу) в любом углу $\Delta(\xi)$.

Доказательство. Не нарушая общности, допустим, что $\xi = 1$. Предположим, что предельное множество $C(f,\xi,\Delta(1,\varphi_1,\varphi_2))$ не ограничено сверху. Тогда существует такая последовательность $\{a_n\}$, $\{a_n\} \in \Delta(1,\varphi_1,\varphi_2)$, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = +\infty$. Соединим точки z_n неевклидовыми отрезками при любом n. Получим кривую L, лежащую внутри области $H(1,-\beta_0,\beta_0) \supset \Delta(1,\varphi_1,\varphi_2)$. Через точки a_n проведем неевклидовые перпендикуляры E_n к Λ^0, пересекающие L и Λ^0 соответственно в точках t_n и r_n. В силу свойств неевклидовой геометрии круга D $\sigma(t_n,r_n) \leqslant \sigma(0, tg\frac{\beta_0}{2}) = N$ и $\sigma(a_n,r_n) \leqslant N$ при $n = 1,2,\ldots$.

Так как точки t_k при любом k будут лежать между точками z_{n_k}, $k = 1,2,\ldots$, где $\{z_{n_k}\}$ — подпоследовательность последовательности $\{z_n\}$, то $\sigma(t_k,z_{n_k}) \leqslant \sigma(z_{n_k},z_{n_k+1}) \leqslant M+1$, начиная с некоторого номера k. В силу неравенства треугольника для метрики σ будем иметь, что $\sigma(r_k,z_{n_k}) \leqslant \sigma(r_k,t_k) + \sigma(t_k,z_{n_k}) \leqslant M+N+1$. Рассмотрим при любом k отображения $S_k(z) = \frac{z+r_k}{1+r_k z}$, где $k = 1,2,\ldots$. Очевидно, что $S_k(0) = r_k$, $S_k(z'_k) = z_k$, $S_k(a'_k) = a_k$, где z'_k, a'_k прообразы точек z_k, a_k при отображениях $S_k(z)$. Рассмотрим компакт $K = \{z : |z| \leqslant th(M+N+2)\}$, который представляет из себя замкнутый неевклидовый круг с центром в точке $z = 0$ и неевклидовым радиусом $M+N+2$. В силу инвариантности метрики σ отсюда следует, что предельные точки последовательностей z'_k и a'_k будут лежать внутри K. Обозначим предельные точки некоторых их подпоследовательностей через z'_0 и a'_0. Так как функция $f(z) \in \Re^\theta$, где $0 \leqslant \theta < \pi$ — фиксировано, то существует подпоследовательность последовательности $\{f(S_k(z))\}$, которую обозначим для простоты через $\{f(S_k(z))\}$, равномерно сходящаяся на K к непрерывной функции $F(z)$ или равномерно расходящаяся к $+\infty$(или к $-\infty$). Так как $\lim\limits_{k\to\infty} f(S_k(a'_k)) = \lim\limits_{k\to\infty} f(a_k) = +\infty$, то предельная функция $F(z) \equiv +\infty$, что невозможно в силу соотношения

$$F(z'_0) = \lim_{m\to\infty} F(z'_{k_m}) =$$
$$= \lim_{m\to\infty} f(S_{k_m}(z'_{k_m})) = \lim_{m\to\infty} f(z_{k_m}) < +\infty.$$

Полученное противоречие говорит о том, что предельное множество $C(f,\xi,\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2))$ ограничено сверху. Таким образом, мы доказали ограниченность сверху функции $f(z)$ в любом углу, содержащем последовательность $\{z_n\}$. Пусть $\Delta(\xi)$ — произвольный угол с вершиной в точке ξ. Можно выбрать такой угол $\Delta'(\xi)$ с вершиной в ξ, что все точки $\Delta(\xi)$ и $\Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$ в некоторой окрестности точки ξ будут лежать в $\Delta'(\xi)$. Так как последовательность z_n, начиная с некоторого номера n, содержится в углу $\Delta'(\xi)$, то предельное множество $C(f,\xi,\Delta'(\xi))$ограничено сверху. С другой стороны, так как $\Delta(\xi) \subset \Delta'(\xi)$, то предельное множество $C(f,\xi,\Delta(\xi))$ также ограничено сверху, что и требовалось доказать. Утверждение леммы 3 доказано в случае ограниченности сверху. Аналогично доказывается ограниченность снизу.

Замечание 1. Отметим, что ограниченность в углах для голоморфных функций класса $\mathfrak{R}$ рассматривалась Багемилом [11].

Доказательство теоремы 1. Необходимость условий теоремы очевидна. Для доказательства достаточности условий теоремы 1 рассмотрим произвольный угол $\Delta(\xi)$ и докажем, что $C(f,\xi,\Delta(\xi)) = C(f,\xi,h(\xi,\varphi))$ для любой хорды $h(\xi,\varphi)$. Тем самым будет доказано утверждение теоремы 1. Возьмем произвольное значение $\eta \in C(f,\xi,\Delta(\xi))$. Пусть $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ — такая последовательность точек, что $t_n \to \xi$ при $n \to \infty$, $t_n \in \Delta(\xi)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(t_n) = \eta$. Обозначим через ψ_n угол, образуемый хордой, проходящей через точки t_n и ξ, с радиусом в точке ξ. Так как последовательность $\{\psi_n\}$ ограниченная, то из нее можно извлечь подпоследовательность $\{\psi_{n_k}\}$, которая сходится к конечному пределу ψ_0. Через точки t_{n_k}, соответствующие углам ψ_{n_k}, $k = 1, 2, \ldots$, проведем неевклидовые перпендикуляры E_{n_k}, пересекающие хорду $h(\xi,\psi_0)$ в точках t'_{n_k}. Так как $\psi_{n_k} \to \psi_0$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\sigma(t_{n_k},t'_{n_k}) = 0$. Принимая во внимание, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(t_{n_k}) = \eta$, в силу леммы 1 $\lim\limits_{k\to\infty} f(t'_{n_k}) = \eta$. Следовательно, $\eta \in C(f,\xi,h(\xi,\psi_0))$ и, значит, в силу утверждения леммы 2, $\eta \in C(f,\xi,h(\xi,\varphi))$ для любого угла $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Учитывая произвольность угла $\Delta(\xi)$, получим утверждение теоремы 1.

Следствие 1. Пусть непрерывная функция $f(z) \in \mathfrak{R}^{\theta}$, где $0 \leqslant \theta < \pi$ — фиксировано. Для того, чтобы функция $f(z)$ имела в точке $\xi = e^{i\theta}$ (или $\xi = -e^{i\theta}$) угловой предел α, необходимо и достаточно существование равных хордальных пределов $\lim\limits_{\substack{z\to\xi \\ z\in h(\xi,\varphi)}} f(z) = f(\xi,\varphi) = \alpha$ для значений φ, всюду плотных в интервале $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

Доказательство теоремы 2. Достаточность. Заметим из условия теоремы 2, что для всех углов $\Delta(\xi)$ с вершиной в точке ξ (или $-\xi$) предельное множество функции $f(z)$ должно быть не ограничено и сверху и снизу. Это непосредственно следует из утверждения леммы. Следовательно, $\pm\infty \in C(f,\xi,\Delta(\xi))$ для любого угла $\Delta(\xi)$. С другой стороны [1], если подмножество S круга D — связное множество и функция $f(z)$ — непрерывная, то предельное множество $C(f,\xi,S)$ является связным замкнутым множеством на $\bar{R}$. Поэтому предельное множество $C(f,\xi,\Delta(\xi)) = \bar{R}$ для любого угла $\Delta(\xi)$ с вершиной в точке $\xi \in \Gamma$. Следовательно $\xi \in I(f)$, что и требовалось доказать.

Необходимость. Так как $\xi \in I(f)$, то для любого угла $\Delta(\xi)$ $C(f,\xi,\Delta(\xi)) = \overline{R}$. Отсюда следует, что в любом углу $\Delta(\xi)$ существует такая последовательность $\{z'_n\}$, $z'_n \to \xi$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} f(z'_n) = -\infty$, и такая последовательность $\{z''_n\}$, $z''_n \to \xi$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} f(z''_n) = +\infty$. Рассматривая произвольную последовательность $\{z_n\}$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \xi$, $\{z_n\} \in \Delta(\xi)$ и членами которой являются последовательности $\{z'_n\}$ и $\{z''_n\}$, получим искомую последовательность $\{z_n\}$. Необходимость условий теоремы 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Соединим неевклидовыми отрезками точки последовательности $\{z_n\}$. Получим кривую L, которая будет лежать внутри некоторого угла $\Delta(\xi,\varphi'_1,\varphi'_2) \supset \Delta(\xi,\varphi_1,\varphi_2)$. В этом случае справедливо соотношение

$$C(f,\xi,L) = C(f,\xi,\{z_n\}). \tag{3}$$

Действительно, пусть $\omega_0 \in C(f,\xi,L)$ и $\lim\limits_{k\to\infty} z'_k = \xi$, $z'_k \in L$ и $\lim\limits_{k\to\infty} f(z'_k) = \omega_0$. Обозначим через z_{n_k} и z_{n_k+1}, $k = 1, 2, \ldots$ те точки из последовательности $\{z_n\}$, которые являются ближайшими к z'_k, $k = 1, 2, \ldots$. По предположению

$$\lim_{k\to\infty}\sigma(z'_k, z_{n_k}) = \lim_{k\to\infty}\sigma(z'_k, z_{n_k+1}) = 0. \tag{4}$$

Из соотношения (4), в силу утверждения леммы 1 следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} f(z_{n_k}) = \omega_0$. Поэтому $\omega_0 \in C(f,\xi,\{z_n\})$ и значит, $C(f,\xi,L) \subset C(f,\xi,\{z_n\})$.

Обратное включение очевидно и, следовательно, соотношение (3) доказано. Будем считать без нарушения общности, что $\xi = 1$. Максимальное неевклидовое расстояние от точек гиперциклов $L(1,\varphi'_1)$ и $L(1,\varphi'_2)$ до диаметра Λ^0 не превосходит положительного числа $M_1 = \max\{\sigma(0,\operatorname{tg}\frac{\varphi'_1}{2}),\ \sigma(0,tg\frac{\varphi'_2}{2})\}$. Возьмём такую последовательность $\{r_n\}$ на диаметре Λ^0, что $r_n \to 1$ при $n \to \infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(r_n) = +\infty$. Проведём через r_n неевклидовые перпендикуляры E_n к Λ^0, пересекающие L в точках t_n, $n = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим отображения $S_n(z) = (z + r_n)/(1 + r_n z)$, где $n = 1, 2, \ldots$. Очевидно, $S_n(0) = r_n$, $S_n(t'_n) = t_n$,

$S_n(z'_n) = z_n$, где z'_n, t'_n — прообразы точек z_n, t_n при отображениях $S_n(z)$. Так как при любом n $\sigma(r_n, t_n) \leqslant M_1$ и $\sigma(t_n, z_n) \leqslant M$, где $M > 0$ — некоторое постоянное число, то $\sigma(r_n, z_n) \leqslant \sigma(r_n, t_n) + \sigma(t_n, z_n) \leqslant M + M_1$. В силу инвариантности метрики σ будем иметь, что $\sigma(0, t'_n) \leqslant M$ и $\sigma(0, z'_n) \leqslant M + M_1$ при $n \in N$. Обозначим через $K = \{z : |z| \leqslant th(M + M_1 + 1)\}$. Очевидно, что все предельные точки последовательностей $\{z'_n\}$ и $\{t'_n\}$ лежат внутри K. Так как непрерывная функция $f(z) \in \Re^{\theta}$, то для последовательности $\{f(S_n(z))\}$ существует такая подпоследовательность $\{f(S_{n_k}(z))\}$, которая на компакте K либо равномерно сходится к непрерывной функции $F(z)$, либо к бесконечности. Так как $F(0) = \lim\limits_{k\to\infty} f(S_{n_k}(0)) = +\infty$, то и предельная функция $F(z) \equiv \pm\infty$, и следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} f(S_{n_k}(z'_{n_k})) = \lim\limits_{k\to\infty} F(z'_{n_k}) = \lim\limits_{k\to\infty} f(z_{n_k}) = \pm\infty$. Поэтому $+\infty \in C(f, \xi, \{z_n\})$. Аналогично доказывается, что $-\infty \in C(f, \xi, \{z_n\})$. Так как L — связное множество и $f(z)$ — непрерывная функция, то согласно известному утверждению предельное множество $C(f, \xi, L)$ — замкнутое связное множество и в силу соотношения (2) $C(f, \xi, \{z_n\}) = C(f, \xi, L) = \bar{R}$. Теорема 3 полностью доказана.

Следствие 2. Пусть $f(z)$ непрерывная в D функция класса $\Re^{\theta}$, $0 \leqslant \theta < \pi$. Если в точке $\xi = e^{i\theta}$ существует такая последовательность $\{z_n\} \to \xi$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(z_n, z_{n+1}) = 0$, целиком лежащая в некотором углу $\Delta(\xi, \varphi_1, \varphi_2)$ и для которой предельное множество $C(f, \xi, \{z_n\})$ не совпадает с $\overline{R}$, тогда точка $\xi = e^{i\theta}$ не является точкой Плеснера.

В заключение отметим, что достаточность условия в следствии 1 была доказана в лемме 2 работы [10]. Необходимость условия в утверждении следствия 1 очевидна. Утверждение теоремы 3 в случае, когда последовательность лежит на некоторой хорде и удовлетворяет условию для мероморфных функций, доказано в теореме 3 работы [8]. Таким образом, для нормальных действительнозначных функций, определённых в единичном круге, удаётся охарактеризовать множество точек $K(f)$ и множество точек Плеснера при менее жёстких условиях, чем для мероморфных функций.

Литература

1. *Коллингвуд Э., Ловатер А.* Теория предельных множеств. М.: Мир, 1971. 306 с.
2. *Ловатер А.* Граничное поведение аналитических функций // Итоги науки и техники. Математический анализ. 1973. Т. 10. С. 99–260.
3. *Aikawa H.* Harmonic functions having no tangential limits // Proc. Amer. Math. 1990. Vol. 108. No. 2.P. 457–464.
4. *Aikawa H.* Harmonic functions and Green potentials having no tangential limits // J. London Math Soc. 1991. Vol. 43. No. 1. P. 125–136.
5. *Nowak M.* On zeros of normal functions // Annal. Acad. Scient. Fenn., Ser. AI, Math. 2002. Vol. 27. P. 381–390.
6. *Pavicevic Z.* Meromorphic functions generating normal families in a arbitrary open subset of the unit disk // New Zeland Journal of Mathematics. 1999. Vol. 28. P. 89–106.
7. *Barth K.F., Rippon.P.J., Sons L.* Angular limits of holomorphic and meromorphic functions // J. London Math. Soc. 1990. Vol. 42. P. 279–291.
8. *Гаврилов В. И.* О граничном поведении функций, мероморфных в единичном круге // Вестник МГУ. Серия I. Математика, механика. 1965. №5. С. 3–10.
9. *Гаврилов В. И.* Нормальные функции и почти периодические функции // ДАН СССР. 1978. Т. 240. №4. С. 768–770.
10. *Берберян С. Л.* Об угловых граничных значениях нормальных непрерывных функций // Изв. вузов. Математика. 1986. №3. С. 22–28.
11. *Берберян С. Л.* О граничных свойствах субгармонических функций, порождающих нормальные свойства на подгруппах автоморфизмов единичного круга // Изв. АН Арм. ССР. 1980. Т. 15. №4. С. 395–402.

Статья поступила 23 мая 2007 г.
Российско-Армянский (Славянский) государственный университет, г. Ереван