

М Е Х А Н И К А

УДК 539.3, 612.76

АКУСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ КОНТРОЛЯ РЕГЕНЕРАЦИИ
КОСТНОЙ ТКАНИ¹*Аникина Т. А.², Ватульян А. О.³*

ACOUSTIC METHODS OF BONE TISSUE REGENERATION CONTROL

Anikina T. A., Vatulyan A. O.

One of urgent medical diagnostic problems is the development of devices for constant control over physiological condition of damaged hard tissues and diagnosis of the degree of bone fracture fragments consolidation at the seat of a fracture. The procedure of reconstructing the properties of the tibia during regeneration process is modelled based on the analysis of bending oscillations of a girder of variable rigidity. The method of integral equations is used to solve the problem under consideration. The inverse problem is considered, which is aimed to restore the modulus of elasticity and the modulus of solidity according to the frequency sounding data. The results of numerical experiments on defining initial approximation are presented.

Проблема мониторинга окружающей среды в последние годы имеет огромное значение в решении экологических проблем. При этом контроль физиологического состояния тканей и органов человека приобретает первостепенное значение для сохранения и поддержания здоровья. Изучение механических свойств некоторых тканей (кость, кожа, мышцы) позволяет как прогнозировать развитие некоторых заболеваний (остеопороз), так и контролировать этапы восстановления тканей по некоторым легко измеряемым характеристикам [1].

В настоящее время в биомеханике, один из разделов которой изучает механические свойства тканей, особое внимание уделяется совершенствованию моделей органов и тканей человеческого организма, а также методам идентификации их свойств на основе акустических методов. Это даёт возможность предсказать критические ситуации, выявить предвестники формирования патологий, найти области допустимых изменений формы и механических свойств. В свою очередь уточнение моделей расширяет сферу применения ди-

агностических методов и средств автоматизированной диагностики. Одной из актуальных задач является разработка недорогих и точных устройств для перманентного контроля физиологического состояния поврежденных твердых тканей и диагностики степени консолидации костных отломков в месте перелома. При этом процесс регенерации костной ткани условно моделируют тремя основными стадиями.

На 1-й стадии происходит заполнение места перелома мягкой гелеобразной тканью с параметрами $E_{gel} = 5$ кПа, $G_{gel} = 1,67$ кПа, $\rho_{gel} = 1000$ кг/м³; данный случай моделирует начальный период регенерации кости — до 20 дней после хирургической операции [2].

На 2-й стадии происходит образование хрящевой ткани с параметрами $E_{xr} = 3,78 \div 50$ МПа, $G_{xr} = 1,3 \div 1,67$ МПа, $\rho_{xr} = 900$ кг/м³, соответствующее ориентировочно пятидесятому дню срастания кости [2].

На 3-й стадии — образование спонгиозной ткани с параметрами $E_{sp} = 500$ МПа, $G_{sp} = 200$ МПа, $\rho_{sp} = 800$ кг/м³ [2].

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ (05-01-00734).

²Аникина Татьяна Александровна, аспирант кафедры теории упругости Южного федерального университета.

³Ватульян Александр Ованесович, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости Южного федерального университета.

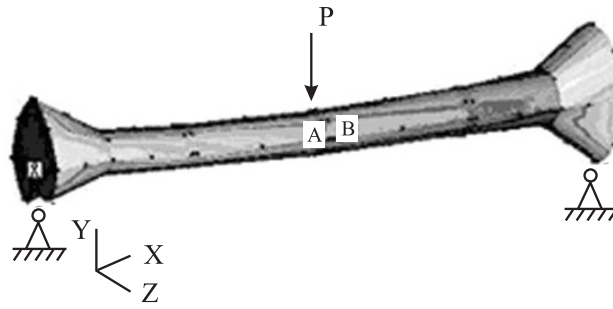


Рис. 1

Начиная с середины восьмидесятих годов, значительное число публикаций было посвящено приложениям вибрационных технологий для исследований и диагностики твердых тканей опорно-двигательного аппарата [3, 4]. Современные клинические исследования ясно показывают, что резонансные частоты могут быть использованы для оценки состояния перелома длинных трубчатых костей. Необходимо отметить, что понимание физической природы влияния жесткости костной мозоли на резонансные частоты кости очень важно, поскольку позволило бы установить объективный критерий для определения жесткости кости в период сращения по ее вибрационным характеристикам. Отметим работы [5, 6], посвященные исследованиям в области вибрационной диагностики механической системы, образованной бедренной костью и аппаратом Илизарова.

В настоящей работе проведено исследование влияния механических характеристик (модуля Юнга и плотности) бедренной кости в зоне перелома на различных стадиях заживления на вибрационные характеристики балки переменной жесткости, моделирующей бедренную кость, а также восстановление модуля упругости и плотности по АЧХ.

Рассматривается задача о поперечных колебаниях большеберцовой кости, ослабленной костной мозолью, локализованной на участке АВ, малом по сравнению с длиной балки (рис. 1).

Деформирование бедренной кости моделируется изгибом балки переменной жесткости, поскольку модули упругости меняются весьма сильно (на несколько порядков в зависимости от степени регенерации). Колебания вызываются сосредоточенной нагрузкой, приложенной в некоторой точке, а сама балка считается шарнирно опертой по краям, что соответствует схеме нагружения в реальных устройствах диагностики. Наличие костной мозоли будем

моделировать зависимостью модуля Юнга и плотности от продольной координаты x .

Уравнение колебаний балки в этом случае имеет вид [7]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(E(x)J \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) + F\rho(x) \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = P(t)\delta(x-l_0),$$

где E и ρ — соответственно модуль Юнга и плотность кости, F и J — соответственно площадь и момент инерции поперечного сечения балки.

Граничные условия представимы в форме

$$\begin{aligned} W(0, t) &= 0, & W(l, t) &= 0, \\ \left(E(x)J \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) (0, t) &= 0, \\ \left(E(x)J \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) (l, t) &= 0. \end{aligned}$$

Предполагая режим колебаний установившимся $P = P_0 e^{i\omega t}$, $W(x, t) = w(x) e^{i\omega t}$, отделим временную координату $e^{i\omega t}$, получим

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - k^2 \rho(x) w = P_* \delta(x - l_0), \quad (1)$$

$$w(0) = 0, \quad w(l) = 0,$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} (0) = 0, \quad \frac{d^2 w}{dx^2} (l) = 0, \quad (2)$$

где введено обозначение $k^2 = \frac{\omega^2 F}{J}$.

Далее, вводя безразмерные параметры $x = l\tilde{x}$, $w = l\tilde{w}$, $E(x) = E_k \tilde{E}(\tilde{x})$, $\rho(x) = \rho_k \tilde{\rho}(\tilde{x})$, $P_0 = P\tilde{P}$ (E_k , ρ_k — характеристики неповрежденной кости), преобразуем краевую задачу (1), (2) к виду

$$\frac{d^2}{d\tilde{x}^2} \left(\tilde{E}(\tilde{x}) \frac{d^2 \tilde{w}}{d\tilde{x}^2} \right) - \lambda^4 \tilde{\rho}(\tilde{x}) \tilde{w} = \tilde{P}_0 \delta(\tilde{x} - \tilde{x}_0), \quad (3)$$

$$\tilde{w}(0) = 0, \quad \tilde{w}(1) = 0,$$

$$\frac{d^2 \tilde{w}}{d\tilde{x}^2} (0) = 0, \quad \frac{d^2 \tilde{w}}{d\tilde{x}^2} (1) = 0,$$

$$\lambda^4 = \frac{k^2 \rho_k}{E_k}, \quad x_0 = l_0/l.$$

Опуская далее знак тильды, сведём краевую задачу (3) к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода с непрерывным ядром [8]. Для этого введём вспомогательную функцию $v(x)$ следующим образом:

$$v(x) = E(x) \frac{d^2 w}{dx^2}.$$

Перейдем от краевой задачи (3) к системе линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка относительно функций w и v

$$\begin{cases} \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{v(x)}{E(x)}, \\ \frac{d^2 v}{dx^2} = \lambda^4 \rho(x) w(x) + P_0 \delta(x - x_0) \end{cases} \quad (4)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} w(0) = 0, \quad w(1) = 0, \\ v(0) = 0, \quad v(1) = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, разрешая систему (4), (5) относительно введенных функций, получаем операторные соотношения

$$w(x) = \int_0^x (x - \xi) \frac{v(\xi)}{E(\xi)} d\xi - x \int_0^1 (1 - \xi) \frac{v(\xi)}{E(\xi)} d\xi,$$

$$\begin{aligned} v(x) = \lambda^4 \int_0^x (x - \xi) \rho(\xi) w(\xi) d\xi - \\ - x \lambda^4 \int_0^1 (1 - \xi) \rho(\xi) w(\xi) d\xi + P_0 \psi(x), \end{aligned}$$

$$\text{где } \psi(x) = \begin{cases} x_0 - 1, & x < x_0, \\ (x - 1), & x \geq x_0. \end{cases}$$

Подставляя выражение для функции $v(x)$ и меняя порядок интегрирования, получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода для определения функции $w(x)$

$$w(x) = \lambda^4 \int_0^1 w(\eta) K(x, \eta) d\eta + f(x), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} f(x) = P_0 \int_0^x \frac{(x - \xi)}{E(\xi)} \psi(\xi) d\xi - \\ - x P_0 \int_0^1 \frac{(1 - \xi)}{E(\xi)} \psi(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Ядро $K(x, \eta)$ представимо в форме

$$\begin{aligned} K(x, \eta) = \rho(\eta) \varphi(x, \eta) \int_{\eta}^x \frac{(x - \xi)(\xi - \eta)}{E(\xi)} d\xi - \\ - \rho(\eta)(1 - \eta) \int_0^x \frac{(x - \xi)\xi}{E(\xi)} d\xi - \\ - x \rho(\eta) \int_{\eta}^1 \frac{(1 - \xi)(\xi - \eta)}{E(\xi)} d\xi + \\ + \lambda^4 x \rho(\eta)(1 - \eta) \int_0^1 \frac{\xi(1 - \xi)}{E(\xi)} d\xi d\eta, \quad (7) \end{aligned}$$

где

$$\varphi(x, \eta) = \begin{cases} 1, & \eta \in [0, x], \\ 0, & \eta \in [x, 1]. \end{cases}$$

Заметим, что, если $\rho(x) \in C[0, 1]$, то $K(x, \eta) \in C([0, 1] \times [0, 1])$, если $\rho(x) \in L_2[0, 1]$, то $K(x, \eta) \in L_2([0, 1] \times [0, 1])$ и оператор в (6) есть оператор Фредгольма [8].

Для решения интегрального уравнения (6) использовался метод коллокаций [9]. Заменяя интегралы их приближёнными значениями по квадратурным формулам и удовлетворяя (6) в некотором наборе точек, сведём задачу к решению линейной алгебраической системы относительно узловых неизвестных

$$w_m - \sum_{n=1}^N a_{mn} w_n = f_m,$$

$$w_m = w(x_m), \quad f_m = f(x_m), \quad (8)$$

$$a_{mn} = \lambda^4 C_{mn} K(x_m, x_n),$$

где x_m — узловые точки, C_{mn} — коэффициенты квадратурной формулы, w_m — узловые неизвестные.

Метод тестировался для случая постоянных модуля Юнга и плотности ($\rho(x) = \rho_0 = \text{const}$, $E(x) = E_0 = \text{const}$), в численном методе использовалась квадратурная формула Симпсона [9].

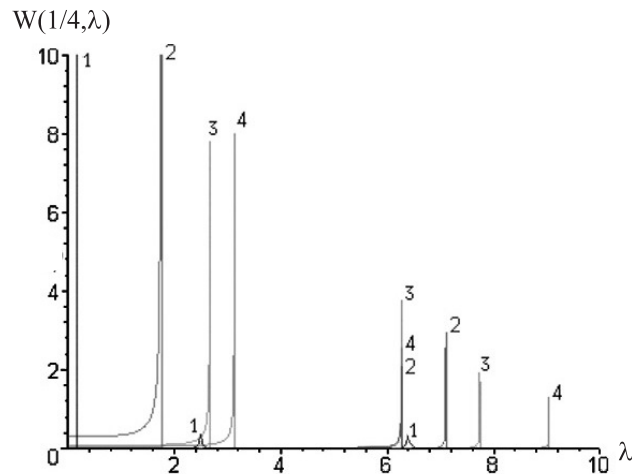


Рис. 2

Были построены графики величины смещения стержня в сечении $w(l/4, \lambda)$ в зависимости от волнового числа λ при моделировании процесса регенерации (рис. 2), где номером 1 (сплошной линией) обозначена АЧХ 1-й стадии регенерации, номером 2 (сплошной жирной линией) — АЧХ 2-й стадии регенерации, номером 3 (штрихпунктирной линией) — АЧХ 3-й стадии, а номером 4 (пунктирной линией) — АЧХ неповрежденной кости [5].

Для случая постоянных модулей и плотности результаты расчетов резонансных значений с погрешностью менее 1% совпадают с результатами, представленными в [7].

В [5] отмечено, что АЧХ бедренной кости значительно меняется в зависимости от степени регенерации костной ткани. Проведенные расчеты позволяют дать количественную оценку влияния степени регенерации на строение АЧХ и на основе этого диагностировать ее стадию. В таблицах приводятся значения первых трех собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, в зависимости от состояния костного регенерата в зоне перелома. В качестве сравнения выбиралось точное решение модельной задачи об изгибных колебаниях кусочно-неоднородной балки для параметров, отвечающих реальным характеристикам бедренной кости [5].

При расчётах использовались следующие значения входных характеристик: $l = 360$ мм, $AB = 4$ мм, $x_0 = OA = l/2$, и $E = 18700$ МПа, $\rho = 1850$ кг/м³, соответствующие характеристикам неповрежденной кости. Через l_1, l_2 обозначены соответственно координаты области перелома ($l_2 = l_1 + AB$).

В табл. 1, 2, 3 приведены первые три собственных значения краевой задачи (3) в зави-

симости от числа разбиений N в методе Симпсона. Отметим, что $N = 30$ соответствует сгущение сетки в области регенерата (по 10 на сплошных участках балки и 10 на участке, содержащем костную мозоль).

Сравнивая результаты численных экспериментов, можно отметить достаточно высокую точность метода, основанного на решении интегрального уравнения. Для регенерата из хрящевой и спонгиозной тканей погрешность определения первых трех резонансных частот составляет менее 1%, а для гелеобразной — менее 2%. Отметим, что из результатов расчетов следует, что вторая частота является практически неинформативной на поздних стадиях заживления, а третья — на ранних.

На рис. 3 изображены зависимости собственных значений от модуля Юнга $E(x)$, меняющихся от значений, соответствующих неповрежденной ткани до значений, соответствующих гелеобразной. Сплошной линией изображен график 1-го собственного значения, штрихпунктирной — 2-го, а пунктирной — 3-го. В связи с изменением модулей в процессе регенерации на несколько порядков зависимости строились в логарифмическом масштабе. Из них можно сделать вывод об однозначном восстановлении характеристик в месте регенерата по измеренным резонансным характеристикам.

Описанный подход основан на представлении о кусочно-постоянном изменении модуля Юнга в процессе восстановления костной ткани. В то же время отметим, что в области сращения модуль не является постоянным, процесс регенерации происходит таким образом, что костная ткань восстанавливает-

Таблица 1. Значения собственных значений для 1-й стадии регенерации (мягкая гелеобразная ткань) с параметрами $E = 5$ кПа, $\rho = 1000$ кг/м³

	Точное решение	$N = 15$	$N = 40$	$N = 30$ (с учащенной сеткой)
λ_1	0,18	0,18	0,18	0,18
λ_2	2,30	2,32	2,29	2,31
λ_3	7,81	7,23	7,80	7,53

Таблица 2. Значения собственных значений для 2-й стадии регенерации (хрящевая ткань) с параметрами $E = 50$ МПа, $\rho = 900$ кг/м³

	Точное решение	$N=15$	$N=40$	$N=30$ (с учащенной сеткой)
λ_1	1,80	1,78	1,79	1,79
λ_2	6,27	6,27	6,27	6,27
λ_3	8,01	7,82	7,98	7,95

Таблица 3. Значения собственных значений для 3-ей стадии регенерации (спонгиозная ткань) с параметрами $E = 500$ МПа, $\rho = 800$ кг/м³

	Точное решение	$N=15$	$N=40$ (равномерное разбиение)	$N=30$ (с учащенной сеткой)
λ_1	2,71	2,70	2,71	2,71
λ_2	6,28	6,28	6,28	6,28
λ_3	8,60	8,46	8,56	8,55

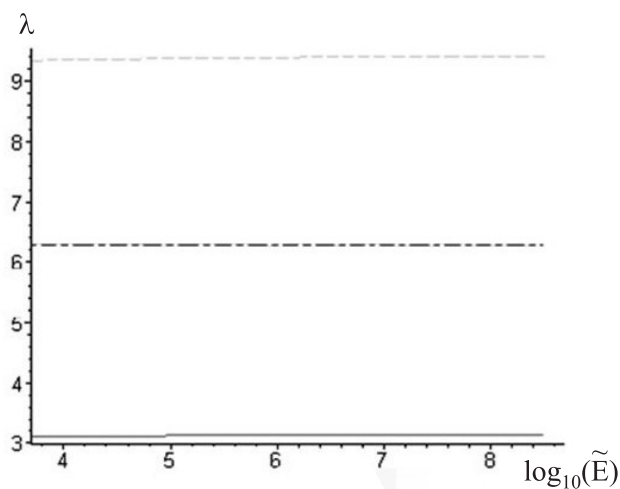


Рис. 3

ся от неповрежденных участков к середине, что приводит к сильной неоднородности модуля Юнга в достаточно малой области. Восстановление закона изменения модуля по данным акустического зондирования приводит к коэффициентной обратной задаче для дифференциального оператора четвертого порядка [10]. Постановка обратной задачи заключается в нахождении модуля Юнга $E(x)$ и плотности $\rho(x)$ большеберцовой кости в зоне перелома по известному смещению под нагрузкой в некотором частотном диапазоне [10, 11].

Математическая постановка задачи имеет вид

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(E(x) \frac{d^2 w}{dx^2} \right) + \lambda^4 \rho(x) w = P_0 \delta(x - x_*) = g(x),$$

$$w(0, \lambda) = 0, \quad w(1, \lambda) = 0,$$

$$\left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) (0, \lambda) = 0, \quad \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right) (1, \lambda) = 0, \quad (9)$$

$$w_1(x_1, \lambda) = f_1(\lambda),$$

$$\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2], w_2(x_2, \lambda) = f_2(\lambda), \quad (10)$$

где $w_1(x_1, \lambda)$, $w_2(x_2, \lambda)$ характеризуют смещения под силой с координатой $x_* = x_1$ и $x_* = x_2$, а $[\lambda_1, \lambda_2]$ — некоторый интервал изменения безразмерной частоты, не содержащий резонансных частот. Поставленная задача является нелинейной некорректной задачей, при решении которой необходима процедура регуляризации [12].

Задача (9)–(10) об отыскании функций $E(x)$ и $\rho(x)$ относится к классу коэффициентных обратных задач и является нелинейной [11, 12] и далее может быть построен итерационный процесс на основе сведения к решению интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода на каждом шаге.

Будем отыскивать начальное приближение в классе постоянных положительных функций $E_0(x) = a_0$, $\rho_0(x) = b_0$. Из априорной информации об ограниченности модуля упругости и плотности можно получить следующие ограничения на константы a_0 , b_0 :

$$0 \leq E_{gel} \leq a_0 \leq E_k,$$

$$0 \leq \rho_{xr} \leq b_0 \leq \rho_k,$$

которые определяют ограниченное множество на плоскости (a_0, b_0) . Значения постоянных a_0 , b_0 находились из условия минимума функционала невязки на введенном множестве [13]:

$$\Phi = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} |u(x_{01}, \lambda) - f_1(\lambda)|^2 d\lambda,$$

где $u(x_{01}, \lambda)$ — функция смещения в точке x_{01} при $E(x) = a_0$, $\rho(x) = b_0$.

Опишем построение итерационного процесса при решении обратной задачи. Представим искомые функции в виде разложения по малому параметру ε в окрестности некоторого известного начального приближения

$$\begin{aligned} E(x) &= E_0(1 + \varepsilon\eta_1), \\ \rho(x) &= \rho_0(1 + \varepsilon\eta_2), \\ w(x) &= w_0(x) + \varepsilon w_1(x), \end{aligned} \quad (11)$$

$\|\eta_1\| \ll 1$, $\|\eta_2\| \ll 1$ а ε — формальный параметр.

Подставляя соотношения (11) в исходную задачу (9) и приравнивая операторные коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим две задачи:

$$\varepsilon^0 : \begin{cases} \frac{d^4 w_0}{dx^4} - \lambda^4 w_0 = g(x), \\ w_0(0, \lambda) = w_0(1, \lambda) = 0, \\ \frac{d^2 w_0}{dx^2}(0, \lambda) = \frac{d^2 w_0(x)}{dx^2}(1, \lambda) = 0; \end{cases} \quad (12)$$

$$\varepsilon^1 : \begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} \left(\eta_1 \frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{d^2 w_1}{dx^2} \right) - \\ - \lambda^4 (\eta_2 w_0 + w_1) = 0, \\ w_1(0, \lambda) = w_1(1, \lambda) = 0, \\ \left(\eta_1(0) \frac{d^2 w_0(0, \lambda)}{dx^2} + \right. \\ \left. + \frac{d^2 w_1(0, \lambda)}{dx^2} \right) = \\ = \left(\eta_1(1) \frac{d^2 w_0(1, \lambda)}{dx^2} + \right. \\ \left. + \frac{d^2 w_1(1, \lambda)}{dx^2} \right) = 0. \end{cases} \quad (13)$$

Решение задач (12), (13) может быть построено лишь при помощи фундаментальных решений соответствующих дифференциальных операторов 4 порядка. Уравнение для определения функций $\eta_1(x)$ и $\eta_2(x)$ можно получить более простым образом, скалярно домножив в пространстве функций $L_2[0, 1]$ уравнение (13) на $w_0(x)$, а уравнение (12) на $w_1(x)$ и вычтя почленно. После интегрирования по

Таблица 4

Степень консолидации костной мозоли	Точное значение		Приближенное значение	
	$\tilde{E}(x)$	$\tilde{\rho}(x)$	$\tilde{E}(x)$	$\tilde{\rho}(x)$
Спонгиозная ткань 3 стадия регенерации	0,027	0,432	0,025	0,432
Хрящевая ткань 2 стадия регенерации	0,003	0,486	0,003	0,493
Гелеобразная ткань 1 стадия регенерации	$0,267 \cdot 10^{-6}$	0,541	$0,267 \cdot 10^{-6}$	0,536

частям и некоторых преобразований получим интегральное уравнение для определения функций $\eta_1(x)$ и $\eta_2(x)$, которое имеет вид

$$-\int_{l_1}^{l_2} \eta_1(x)(w_0'')^2 dx + \lambda^4 \int_{l_1}^{l_2} \eta_2(x)w_0^2 dx = w_1(x_0, \lambda).$$

Это уравнение может быть получено из общих интегральных уравнений, построенных в [10], подынтегральные выражения представляют собой по форме аналог удвоенных удельной потенциальной энергии деформаций и удельной кинетической энергии.

Проделав аналогичные выкладки для двух различных точек приложения нагрузки, получим систему интегральных уравнений для нахождения функций $\eta_1(x)$ и $\eta_2(x)$

$$-\int_{l_1}^{l_2} \eta_1(x)(w_{01})^2 dx + \lambda^4 \int_{l_1}^{l_2} \eta_2(x)w_{01}^2 dx = w_{11}(x_1, \lambda) = (f_1(\lambda) - w_{01}(x_1, \lambda)), \quad (14)$$

$$-\int_{l_1}^{l_2} \eta_1(x)(w_{02})^2 dx + \lambda^4 \int_{l_1}^{l_2} \eta_2(x)w_{02}^2 dx = w_{12}(x_2, \lambda) = (f_2(\lambda) - w_{02}(x_2, \lambda)).$$

Задача является некорректной, так как система уравнений (14) есть система уравнений Фредгольма первого рода с гладкими ядрами и порождает вполне непрерывный оператор [12]. На основе этих уравнений может быть построен итерационный процесс.

В табл. 4 приведены результаты численных экспериментов по определению начального приближения для случая кусочно-постоянного модуля упругости и плотности,

рассматривался частотный диапазон до первой резонансной частоты. Уточнение законов распределения модуля и плотности может быть осуществлено по приведенной выше схеме.

На основе серии расчетов можно сделать вывод относительно предложенного способа реконструкции: начальное приближение находится с достаточно высокой точностью и может быть использовано для дальнейшего уточнения законов распределения модуля и плотности на основе интегральных уравнений (14).

Литература

1. *Бегун П. И., Афонин П. Н.* Моделирование в биомеханике. М.: Высшая школа, 2004. 390 с.
2. *Pfafrod C. S., Vitinesh V. M., Laizans Y. B.* Principles of great strain theory for mechanical behaviour description of bone regenerate in second fracture healing // Int. conf. "Trends in human biomechanics research and applications in medicine and surgery". Riga. 1986. P. 579–583.
3. *Cornelissen M., Cornelissen P., Van Der Perre G., Christensen A. B., Ammitzboll F., Dyrbye C.* Assessment of tibial stiffness by vibration testing in situ. III. Sensitivity of different modes and interpretation of vibration measurements // J. Biomechanics. 1987. Vol. 20. № 4. P. 333–342.
4. *Nakatsuchi Y., Tsuchikane A., Nomura A.* The vibrational mode of the tibia and assessment of bone union in experimental fracture healing using the impulse response method // Med. Eng. Phys. 1996. Vol. 18. № 7. P. 575–583.
5. *Маслов Л. Б.* Резонансные свойства большеберцовой кости в неповрежденном состоянии и с устройствами внешней фиксации // Российский журнал биомеханики. 2003. Т. 7. № 2. С. 20–34.
6. *Маслов Л. Б., Шагин В. И., Смирнов Д. С., Львов С. Е., Блескин Е. В.* Применение вибрационных неразрушающих методов диагности-

- ки в ортопедии // Российский журнал биомеханики. 2006. № 1. С. 16–31.
7. *Филлипов А. П.* Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 736 с.
 8. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 544 с.
 9. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. 632 с.
 10. *Ватульян А. О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. 223 с.
 11. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994. 208 с.
 12. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
 13. *Баранов И. В., Ватульян А. О., Соловьев А. Н.* Об одном генетическом алгоритме и его применении в обратных задачах идентификации упругих сред // Вычислительные технологии. 2006. № 3. С. 14–26.

Статья поступила 6 августа 2007 г.

Южный федеральный университет (РГУ), г. Ростов-на-Дону

© Аникина Т. А., Ватульян А. О., 2007