УДК 518.8:53

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО МЕТОДА ФАКТОРИЗАЦИИ[1]

Евдокимова О. В.[2], Бабешко О. М.[3], Бабешко В. А.[4], Павлова А. В.[5], Гладской И. Б.[6], Зарецкая М. В.[7], Федоренко А. Г.[8]

SOME APPLICATIONS OF DIFFERENTIAL FACTORIZATION METHOD

Evdokimova O. V., Babeshko O. M., Babeshko V. A., Pavlova A. V., Gladskoy I. B., Zaretskaya M. V., Fedorenko A. G.

The differential factorization method is applied to solve some problems of the elasticity theory. The algorithm proposed can be used when studying and solving boundary-value problems for all classes of differential equations in partial derivatives with constant coefficients. Using the block structure or dividing the domains with a grid, it is possible to study boundary-value problems for equations with variable coefficients. The application of the Newton-Kantorovich approach and calculation of the Frechet operator makes it possible to use the differential factorization method to solve boundary-value problems for the systems of differential equations in partial derivatives as well.

Дифференциальный метод факторизации применяется к некоторым задачам теории упругости [1–3]. Излагаемый ниже алгоритм можно использовать при исследовании и решении краевых задач для всех классов дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. Применяя блочную структуру или разбивая области сеткой, получаем возможность исследовать краевые задачи для уравнений с переменными коэффициентами. Используя подход Ньютона–Канторовича, вычислив оператор Фреше, дифференциальный метод факторизации может быть применен также к краевым задачам для систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Особенность и эффективность дифференциального метода факторизации заключается в его применимости к исследованию краевых задач для дифференциальных уравнений по одному алгоритму независимо от типа дифференциальных уравнений.

Наиболее важное место среди материалов занимают изотропные материалы и блочные структуры из таких материалов. Избранные краевые задачи, динамические и статические, удобны также для сопоставления различных методов их решения и демонстрируют широкие возможности дифференциального метода

[1]Отдельные фрагменты работы выполнены при поддержке РФФИ, (06-01-00295, 06-01-08017, 06-08-00671), РФФИ_р_юг (06-01-96802–06-01-96805, 06-05-96806, 06-01-96634–06-01-96638), гранта Президента РФ (НШ-4839.2006.1), программ отделения ЭММПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН.

[2]Евдокимова Ольга Владимировна, канд. физ.-мат. наук, заведующая кафедрой художественного проектирования костюма Кубанского государственного университета.

[3]Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат.наук, гл. научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета.

[4]Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, директор НИИ проблем механики и геоэкологии, ректор Кубанского государственного университета.

[5]Павлова Алла Владимировна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета.

[6]Гладской Игорь Борисович, канд. физ.-мат. наук, ведущий сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета.

[7]Зарецкая Марина Валерьевна, канд. физ.-мат.наук, ст. научный сотрудник Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета.

[8]Федоренко Алексей Григорьевич, научный сотрудник Кубанского государственного университета.

факторизации. Они удобны и по той причине, что охватывают все основные случаи типов нулей характеристических уравнений краевых задач, а именно как однократные, так и многократные случаи. Применение метода к анизотропным материалам уже не представляет труда.

Удобство дифференциального метода факторизации состоит в том, что исходные уравнения при применении простой факторизации записываются в прямоугольной декартовой системе координат. Введение касательного расслоения многообразия в области, занятой телом, приводит к системам прямоугольных локальных координат, начала которых расположены на границе. При этом две оси лежат в касательных плоскостях, а третья — на внешней нормали.

Переходя от одной локальной системы координат к другой и осуществляя преобразования к этим локальным системам заданных краевых задач, получаем некоторый набор постановок краевых задач. Поскольку введенные локальные системы координат являются независимыми, получаемые новые неизвестные функции нуждаются в определении. Однако краевые задачи, входящие в этот набор и кажущиеся разнотипными, по существу однотипны и решаются единым методом. В настоящем параграфе рассматривается применение дифференциального метода факторизации к исследованию напряженно-деформированного состояния трехмерного изотропного линейно деформированного тела.

1. Будем считать, что область Ω, занятая изотропным, линейно деформируемым телом, является выпуклой, а граница $\partial\Omega$ — гладкой. В случае невыпуклых границ для решения краевой задачи имеются две возможности: либо переход к обобщенной факторизации, либо разбиение области на блочные структуры и исследование простой факторизацией. Однородные дифференциальные уравнения Ламе возьмем в традиционной форме

$$(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\theta+\mu\Delta\mathbf{u}=0, \qquad (1)$$

$$\mathbf{u}=(u_1,u_2,u_3)\,,\quad \theta=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}.$$

После применения к ним преобразований Фурье по всем параметрам, подстановки вместо соответствующих производных значений $-i\alpha_k$ и умножения на -1, система уравнений принимает вид

$$\mathbf{KU}=0,$$

$$\mathbf{U}=\{U_1,U_2,U_3\}\,,\quad \mathbf{K}=\|k_{ij}\|_{i,j=1}^{3}\,, \qquad (2)$$

$$k_{11}=(\lambda+2\mu)\,\alpha_1^2+\mu\alpha_2^2+\mu\alpha_3^2,$$

$$k_{12}=k_{21}=(\lambda+\mu)\,\alpha_1\alpha_2,$$

$$k_{13}=k_{31}=(\lambda+\mu)\,\alpha_1\alpha_3,$$

$$k_{22}=\mu\alpha_1^2+(\lambda+2\mu)\,\alpha_2^2+\mu\alpha_3^2,$$

$$k_{23}=\lambda\alpha_2\alpha_3,\quad k_{32}=(\lambda+\mu)\,\alpha_2\alpha_3,$$

$$k_{33}=\mu\alpha_1^2+\mu\alpha_2^2+(\lambda+2\mu)\alpha_3^2.$$

Представим матрицу $\mathbf{K}$ в форме

$$\mathbf{K}=(\lambda+\mu)\begin{pmatrix}\alpha_1^2 & \alpha_1\alpha_2 & \alpha_1\alpha_3\\ \alpha_1\alpha_2 & \alpha_2^2 & \alpha_2\alpha_3\\ \alpha_1\alpha_3 & \alpha_2\alpha_3 & \alpha_3^2\end{pmatrix}+ \\ +\begin{pmatrix}\mu A & 0 & 0\\ 0 & \mu A & 0\\ 0 & 0 & \mu A\end{pmatrix},$$

$$A=\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2.$$

Отсюда имеем

$$\mathbf{KU}=(\lambda+\mu)\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0 & 0\\ 0 & \alpha_2 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_3\end{pmatrix}\times \\ \times\begin{pmatrix}\alpha_1U_1+\alpha_2U_2+\alpha_3U_3\\ \alpha_1U_1+\alpha_2U_2+\alpha_3U_3\\ \alpha_1U_1+\alpha_2U_2+\alpha_3U_3\end{pmatrix}+ \\ +\mu A\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}U_1\\ U_2\\ U_3\end{pmatrix}.$$

Проведем касательное расслоение границы области и введем прямоугольные декартовы локальные координаты $\mathbf{x}^\nu=(x_1^\nu,x_2^\nu,x_3^\nu)$. Соответствующие им параметры преобразования Фурье имеют обозначения $\boldsymbol{\alpha}^\nu=(\alpha_1^\nu,\alpha_2^\nu,\alpha_3^\nu)$. Формулы перехода от одной локальной системы к другой даются известными соотношениями

$$\mathbf{x}^\nu=\mathbf{c}_\nu^\tau\mathbf{x}^\tau+\mathbf{x}_0^\tau,\quad \boldsymbol{\alpha}^\nu=\mathbf{c}_\nu^\tau\boldsymbol{\alpha}^\tau. \qquad (3)$$

Перейдем к новым неизвестным по аналогичным формулам

$$\mathbf{u}^\nu=\mathbf{c}_\nu^\tau\mathbf{u}^\tau. \qquad (4)$$

Лемма. При переходе к новым локальным координатам по формулам (3), (4), по таким же формулам изменяется оператор преобразования Фурье уравнений Ламе.

Действительно, справедливы соотношения

$$\alpha_1^\nu U_1^\nu + \alpha_2^\nu U_2^\nu + \alpha_3^\nu U_3^\nu = (\boldsymbol{\alpha}^\nu, \mathbf{U}^\nu) = \\ = (\mathbf{c}_\nu^\tau \alpha^\tau, \mathbf{c}_\nu^\tau \mathbf{U}^\tau) = (\boldsymbol{\alpha}^\tau, \mathbf{c}_\nu^{\tau *} \mathbf{c}_\nu^\tau \mathbf{U}^\tau) = (\boldsymbol{\alpha}^\tau, \mathbf{U}^\tau),$$

$$(\alpha_1^\nu)^2 + (\alpha_2^\nu)^2 + (\alpha_3^\nu)^2 = (\boldsymbol{\alpha}^\nu, \boldsymbol{\alpha}^\nu) = (\boldsymbol{\alpha}^\tau, \boldsymbol{\alpha}^\tau);$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1^\tau \\ U_2^\tau \\ U_3^\tau \end{pmatrix} = \mathbf{I}\mathbf{c}_\nu^\tau \mathbf{U}^\tau = \mathbf{c}_\nu^\tau \mathbf{U}^\tau;$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^\nu & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^\nu & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3^\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \\ = z_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1^\nu \\ \alpha_2^\nu \\ \alpha_3^\nu \end{pmatrix} = \\ = z_1 \mathbf{I}\mathbf{c}_\nu^\tau \boldsymbol{\alpha}^\tau = \mathbf{c}_\nu^\tau z_1 \boldsymbol{\alpha}^\tau.$$

Таким образом, доказано, что переход к новым координатам по формулам (3), (4) достигается преобразованием оператора Фурье по формуле $\mathbf{K}\mathbf{u}^\nu = \mathbf{c}_\nu^\tau \mathbf{K}\mathbf{u}^\tau$.

Аналогично доказывается лемма при наличии объемных сил и динамических членов.

2. Добавим в уравнения (1) динамические члены и изучим нули определителя матрицы-функции $\mathbf{K}$. Положим

$$B = \mu A + \delta. \tag{5}$$

Здесь $\delta = -\rho\omega^2$ в задачах вибрации и $\delta = \rho p^2$ в нестационарных задачах, где ω — частота колебаний, p — параметр преобразования Лапласа, ρ — плотность материала.

Представим диагональные элементы матрицы $\mathbf{K}$ (2) в виде $k_{ii} = (\lambda + \mu)\,\alpha_i^2 + B$. Легко видеть, что

$$\Delta = \det \mathbf{K} = B^2(B + (\lambda + \mu)A). \tag{6}$$

Таким образом, определитель имеет двукратный нуль $A = -\frac{\delta}{\mu}$ и однократный $A = -\frac{\delta}{\lambda + 2\mu}$.

3. Составим функциональные уравнения для изотропных уравнений Ляме

$$(\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\theta + \mu\Delta\mathbf{u} + \rho\omega^2\mathbf{u} = 0,$$

$$\sigma_{ii} = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u_i}{\partial x_i},$$

$$\sigma_{ij} = \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right), \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1,3}.$$

Уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{\partial \sigma_{i1}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{i2}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{i3}}{\partial x_3} + \rho\omega^2 u_i = 0, \quad i = \overline{1,3}.$$

Перепишем уравнения Ляме в форме

$$K_1\mathbf{u} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3} + \\ + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \rho\omega^2 u_1 = 0,$$

$$K_2\mathbf{u} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \mu\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \\ + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} + \\ + \rho\omega u_2 = 0, \tag{7}$$

$$K_3\mathbf{u} = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + \mu\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \mu\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \\ + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \rho\omega u_3 = 0.$$

Для построения функциональных уравнений введем для уравнений (7) внешние формы. Для операторов $K_k\mathbf{u}$ имеем

$$\omega_{sk} = R_{sk}dx_1 \Lambda dx_2 + Q_{sk}dx_1 \Lambda dx_3 + P_{sk}dx_2 \Lambda dx_3,$$

$$\boldsymbol{\omega}_s = \{\omega_{s1},\ \omega_{s2},\ \omega_{s3}\}.$$

Здесь s указывает группу внешних форм, k — номер оператора K_k. Обозначим этот вектор внешних форм $\boldsymbol{\omega}_1$, при этом

$$R_{11} = \left[\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - i\alpha_3 u_1\right) + \right. \\ \left. + (\lambda + \mu)\,\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x})} dx_1 \Lambda dx_2,$$

$$Q_{11} = -\left[\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - i\alpha_2 u_1\right) - \right. \\ \left. - (\lambda + \mu) i\alpha_1 u_2\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x})} dx_1 \Lambda dx_3,$$

$$P_{11} = \left[(\lambda + \mu)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - i\alpha_1 u_1\right) + \right. \\ \left. + (\lambda + \mu)\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - (\lambda + \mu) i\alpha_3 u_3\right] \times \\ \times e^{i(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x})} dx_2 \Lambda dx_3,$$

$$R_{12} = \left[\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - i\alpha_3 u_2\right) - \right.$$
$$\left. - (\lambda+\mu)\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} dx_1 \Lambda dx_3,$$

$$Q_{12} = -\left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - i\alpha_2 u_2\right) - \right.$$
$$\left. - i\alpha_1 u_1(\lambda+\mu) - i\alpha_3 u_3(\lambda+\mu)\right] \times$$
$$\times e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} dx_1 \Lambda dx_3, \quad (8)$$

$$P_{12} = \left[\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - i\alpha_1 u_1\right) + \right.$$
$$\left. + (\lambda+\mu)\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} dx_2 \Lambda dx_3,$$

$$R_{13} = \left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - i\alpha_3 u_3\right) + \right.$$
$$\left. + (\lambda+\mu)\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + (\lambda+\mu)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right] \times$$
$$\times e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} dx_1 \Lambda dx_2,$$

$$Q_{13} = -\left[\mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - i\alpha_2 u_3\right) - \right.$$
$$\left. - (\lambda+\mu)\, i\alpha_3 u_2\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} dx_1 \Lambda dx_3,$$

$$P_{13} = \left[\mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - i\alpha_1 u_3\right) - \right.$$
$$\left. - (\lambda+\mu)\, i\alpha_3 u_1\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} dx_2 \Lambda dx_3.$$

Убедимся в правильности построения внешних форм и найдем их дифференциалы. Имеем

$$d\omega_{11} = \frac{\partial R_{11}}{\partial x_3} + \frac{\partial Q_{11}}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{11}}{\partial x_1} =$$
$$= i\alpha_3\left[\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - i\alpha_3 u_1\right) + \right.$$
$$\left. + (\lambda+\mu)\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} +$$
$$+ \left[\mu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} - i\alpha_3\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) + \right.$$
$$\left. + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3}\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} +$$
$$+ i\alpha_2\left[\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - i\alpha_2 u_1\right) - \right.$$
$$\left. - i\alpha_1 u_2(\lambda+\mu)\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} +$$
$$+ \left[\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - i\alpha_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)\mu - \right.$$
$$\left. - i\alpha_1(\lambda+\mu)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} +$$
$$+ i\alpha_1\left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - i\alpha_1 u\right) + \right.$$
$$\left. + (\lambda+\mu)\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - (\lambda+\mu) i\alpha_3 u_3\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} +$$
$$+ \left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - i\alpha_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) + \right.$$
$$\left. + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} - (\lambda+\mu)\, i\alpha_3\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} =$$
$$= \left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \right.$$
$$\left. + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_3} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3}\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} +$$
$$+ \left[\mu A u_1 + (\lambda+\mu)\,\alpha_1\alpha_2 u_2 + (\lambda+\mu)\,\alpha_1\alpha_3 u_3 + \right.$$
$$\left. + (\lambda+\mu)\alpha_1^2 u_1\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} = L_1(\mathbf{u}) + S(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}).$$

Здесь приняты обозначения

$$L_1(\mathbf{u}) = \left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \mu\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \right.$$
$$\left. + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_3} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3}\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})},$$

$$S(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}) = \left[\mu A u_1 + (\lambda+\mu)\alpha_1\alpha_2 u_2 + \right.$$
$$\left. + (\lambda+\mu)\alpha_1\alpha_3 u_3 + (\lambda+\mu)\alpha_1^2 u_1\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})}.$$

Отсюда, используя интеграл Стокса, находим

$$\iiint\limits_{\Omega} d\boldsymbol{\omega}_1 = \iiint\limits_{\Omega} \left\{L_1(\boldsymbol{u}) + S(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{u}) - \right.$$
$$\left. - \rho\omega^2 u_1\right\} d\mathbf{x} = \iint\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{\omega}_1.$$

Учитывая, что $L_1(\boldsymbol{u}) = 0$, окончательно получаем

$$\left[(\lambda+2\mu)\,\alpha_1^2 + \mu\alpha_2^2 + \mu\alpha_3^2 - \rho\omega^2\right] U_1 +$$
$$+ (\lambda+\mu)\,\alpha_1\alpha_3 U_2 + (\lambda+\mu)\,\alpha_1\alpha_3 U_3 = \int\limits_{\partial\Omega} \omega_{11}.$$

Аналогичные соотношения получаются и для остальных операторов L_k.

Изучим более детально $R'_{1k} = R_{1k}e^{-i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})}$. Очевидно, имеем

$$R'_{11} = \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial u_3} - i\alpha_3 u_1\right) + (\lambda+\mu)\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \\ = \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) - i\mu\alpha_3 u_1 + \lambda\frac{\partial u_3}{\partial x_1} = \\ = \sigma_{13} - i\mu\alpha_3 u_1 + \lambda\frac{\partial u_3}{\partial x_1},$$

$$R'_{12} = \mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) - i\alpha_3 u_2 + \lambda\frac{\partial u_3}{\partial x_2} = \\ = \sigma_{23} - i\alpha_3 u_2 + \lambda\frac{\partial u_3}{\partial x_2};$$

$$R'_{13} = \lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) + 2\mu\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \\ - i\mu\alpha_3 2u_3 + \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) = \\ = \sigma_{33} - i\mu\alpha_3 2u_3 + \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right).$$

Внешние формы имеют некоторый произвол, позволяющий выбирать в зависимости от поставленной задачи наиболее удобный вид при их применении, диктуемый также видом граничных условий. На примерах будет показано, что на окончательные результаты это не влияет.

Выпишем внешние формы в другом виде, воспользовавшись второй группой интегралов. С этой целью в первом уравнении (8) заменим последнюю квадратную скобку на следующую:

$$(\lambda+\mu)\left[\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}e^{-i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})}dx_2dx_1 - \\ -i\alpha_1\int\limits_{\partial\Omega}u_3 e^{-i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})}dx_1dx_2 - i\alpha_1\alpha_3\int\limits_{\Omega}u_3e^{-i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})}d\mathbf{x}\right].$$

Во втором уравнении (8) заменим последнюю скобку на следующую:

$$(\lambda+\mu)\left[\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}e^{-i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})}dx_1dx_3 - \\ -i\alpha_2\int\limits_{\partial\Omega}u_3 e^{-i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})}dx_1dx_2 - \alpha_2\alpha_3\int\limits_{\Omega}\varphi e^{-i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})}d\mathbf{x}\right].$$

В третьем уравнении (8) заменим две последние скобки на следующую:

$$(\lambda+\mu)\left[\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u_1}{\partial x_3}e^{-i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})}dx_2dx_3 - \\ - i\alpha_1\int\limits_{\partial\Omega}u_1e^{-i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})}dx_1dx_2 - \\ - \alpha_1\alpha_3\int\limits_{\Omega}u_1e^{-i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})}d\mathbf{x}\right] + \\ + (\lambda+\mu)\left[\int\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u_2}{\partial x_3}e^{-i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})}dx_1dx_3 - \\ - i\alpha_2\int\limits_{\partial\Omega}u_2e^{-i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})}dx_1dx_2 - \\ - \alpha_2\alpha_3\int\limits_{\Omega}u_2e^{-i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})}d\mathbf{x}\right].$$

В результате получаем следующие представления для вектора внешних форм $\boldsymbol{\omega}_2$, $R'_k = e^{-i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})}R_k$:

$$R'_{21} = \left[\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - i\alpha_3 u_1\right) - \\ - (\lambda+\mu)\, i\alpha_1 u_3\right]dx_1\Lambda dx_2,$$

$$-Q'_{21} = \left[\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - i\alpha_2 u_1\right) - \\ - (\lambda+\mu)\, i\alpha_1 u_2\right]dx_1\Lambda dx_3,$$

$$P'_{21} = \left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - i\alpha_1 u_1\right) + \\ + (\lambda+\mu)\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right]dx_2\Lambda dx_3;$$

$$R'_{22} = \left[\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - i\alpha_3 u_2\right) - \\ - (\lambda+\mu)i\alpha_2 u_3\right]dx_1\Lambda dx_2,$$

$$-Q'_{22} = \left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - i\alpha_2 u_2\right) - \right.$$
$$\left. - i\alpha_1 u_1(\lambda+\mu) + (\lambda+\mu)\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right] dx_1 \Lambda dx_3,$$

$$P'_{22} = \left[\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - i\alpha_1 u_2\right) + \right.$$
$$\left. + (\lambda+\mu)\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right] dx_2 \Lambda dx_3;$$

$$R'_{23} = \left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - i\alpha_3 u_3\right) - \right.$$
$$\left. - (\lambda+\mu) i\alpha_1 u_1 - (\lambda+\mu) i\alpha_2 u_2\right] dx_1 \Lambda dx_2,$$

$$-Q'_{23} = \left[\mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - i\alpha_2 u_3\right) + \right.$$
$$\left. + (\lambda+\mu)\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right] dx_1 \Lambda dx_3,$$

$$P'_{23} = \left[\mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - i\alpha_1 u_3\right) + \right.$$
$$\left. + (\lambda+\mu)\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right] dx_2 \Lambda dx_3.$$

Проверим выполнение свойств внешних форм. Найдем их дифференциалы

$$d\omega_{21} = \frac{\partial R_{21}}{\partial x_3} + \frac{\partial Q_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{21}}{\partial x_1} =$$
$$= i\alpha_3\left[\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - i\alpha_3 u_1\right) - (\lambda+\mu) i\alpha_1 u_3\right] \times$$
$$\times e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} +$$
$$+ \left[\mu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} - i\alpha_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right) - (\lambda+\mu) i\alpha_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right] \times$$
$$\times e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} +$$
$$+ \left[\mu\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} - i\alpha_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) - (\lambda+\mu) i\alpha_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right] \times$$
$$\times e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} +$$
$$+ i\alpha_2\left[\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - i\alpha_2 u_1\right) - (\lambda+\mu) i\alpha_1 u_2\right] \times$$
$$\times e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} +$$
$$+ i\alpha_1\left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - i\alpha_1 u_1\right) + (\lambda+\mu)\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \right.$$
$$\left. + (\lambda+\mu)\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} +$$
$$+ \left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} - i\alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) + \right.$$
$$\left. + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3}\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} =$$
$$= (\lambda+\mu)\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3}\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} +$$
$$+ \mu\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2}\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} +$$
$$+ \left[\mu\alpha_3^2 u_1 + (\lambda+\mu)\,\alpha_1\alpha_3 u_3 + (\lambda+\mu)\,\alpha_1\alpha_2 u_2 + \right.$$
$$\left. + (\lambda+2\mu)\,\alpha_1^2 u_1 + \mu\alpha_2^2 u_1\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} +$$
$$+ \left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - i\alpha_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) - \right.$$
$$- (\lambda+\mu)\, i\alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} +$$
$$\left. + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 dx_3}\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} +$$
$$+ i\alpha_1\left[\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - i\alpha_1 u_2\right) + (\lambda+\mu)\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} +$$
$$+ \left[\mu\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} - i\alpha_1 \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2}\right] \times$$
$$\times e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} =$$
$$= (\lambda+\mu)\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3}\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} +$$
$$+ \mu\left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2}\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} +$$
$$+ \left[\mu\alpha_3^2 u_2 + (\lambda+\mu)\alpha_2\alpha_3 u_3 + \mu\alpha_1^2 u_2 + \right.$$
$$\left. + \mu\alpha_1^2 u_2 + (\lambda+2\mu)\,\alpha_2^2 u_2\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})};$$

$$d\omega_{22} = \frac{\partial R_{22}}{\partial x_3} + \frac{\partial Q_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{22}}{\partial x_1} =$$
$$= i\alpha_3\left[\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - i\alpha_3 u_2\right) - (\lambda+\mu)\, i\alpha_2 u_3\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} +$$
$$+ \left[\mu\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial^2 x_3} - i\alpha_3 \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right) - (\lambda+\mu)\, i\alpha_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right] \times$$
$$\times e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} +$$
$$+ i\alpha_2\left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - i\alpha_2 u_2\right) - i\alpha_1 u_1 (\lambda+\mu) + \right.$$
$$\left. + (\lambda+\mu)\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})};$$

$$d\omega_{23} = \frac{\partial R_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial Q_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial P_{23}}{\partial x_1} =$$
$$= i\alpha_3\left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - i\alpha_3 u_3\right) e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} - \right.$$

$$-(\lambda+\mu)\, i\alpha_1 u_1 - (\lambda+\mu)\, i\alpha_2 u_2\Big] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} +$$
$$+\left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} - i\alpha_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) -\right.$$
$$\left. -(\lambda+\mu) i\alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - (\lambda+\mu)\, i\alpha_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} +$$
$$+ i\alpha_2\left[\mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - i\alpha_2 u_3\right) + (\lambda+\mu)\,\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} +$$
$$+\left[\mu\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} - i\alpha_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) + (\lambda+\mu)\,\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3 \partial x_2}\right] \times$$
$$\times e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} +$$
$$+ i\alpha_1\left[\mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - i\alpha_1 u_3\right) + (\lambda+\mu)\,\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} +$$
$$+\left[\mu\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} - i\alpha_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) + (\lambda+\mu)\,\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3 \partial x_1}\right] \times$$
$$\times e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} =$$
$$= (\lambda+\mu)\left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} +$$
$$+\mu\Big[(\lambda+2\mu)\,\alpha_3^2 u_3 + (\lambda+\mu)\,\alpha_1\alpha_3 u_1 +$$
$$+ (\lambda+\mu)\,\alpha_2\alpha_3 u_2 + \mu\alpha_2^2 u_3 + \mu\alpha_1^2 u_3\Big] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})}.$$

Таким образом, получили полное совпадение формы с дифференциальной частью уравнения.

Сопоставляя выражения для векторов внешних форм $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$, замечаем, что значения производной от внешних форм не изменятся, если осуществить одновременно у компонент замены некоторых членов. Поэтому сформируем на основе имеющихся форм новую внешнюю форму $\boldsymbol{\omega}$, положив

$$R_{31} = \left[\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - i\alpha_3 u_1\right) + \right.$$
$$\left. + \mu\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - i\alpha_1 \lambda u_3\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} dx_1 \Lambda dx_2,$$

$$-Q_{31} = \left[\mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - i\alpha_2 u_1\right) - \right.$$
$$\left. i\alpha_1\,(\lambda+\mu)\, u_2\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} dx_1 \Lambda dx_3,$$

$$P_{31} = \left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - i\alpha_1 u_1\right) + \right.$$
$$\left. +(\lambda+\mu)\,\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - i\mu\alpha_1 u_3 + \lambda\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} dx_2 \Lambda dx_3;$$

$$R_{32} = \left[\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - i\alpha_3 u_2\right) + \right.$$
$$\left. + \mu\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \lambda i\alpha_2 u_3\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} dx_1 \Lambda dx_2,$$

$$-Q_{32} = \left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - i\alpha_2 u_2\right) - \right.$$
$$\left. - i\alpha_1 u_1\,(\lambda+\mu) + \lambda\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - i\mu\alpha_3 u_3\right] \times$$
$$\times e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} dx_1 \Lambda dx_3,$$

$$P_{32} = \left[\mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - i\alpha_1 u_2\right) + \right.$$
$$\left. + (\lambda+\mu)\,\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} dx_2 \Lambda dx_3;$$

$$R_{33} = \left[(\lambda+2\mu)\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - i\alpha_3 u_3\right) + \right.$$
$$\left. + \lambda\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) - \mu i\,(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)\right] \times$$
$$\times e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} dx_1 \Lambda dx_2,$$

$$-Q_{33} = \left[\mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - i\alpha_2 u_3\right) - \right.$$
$$\left. - \lambda i\alpha_3 u_2 + \mu\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} dx_1 \Lambda dx_3,$$

$$P_{33} = \left[\mu\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - i\alpha_1 u_3\right) - \right.$$
$$\left. - \lambda i\alpha_3 u_1 + \mu\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right] e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})} dx_2 \Lambda dx_3.$$

Анализируя компоненты R_{3k}, $k = \overline{1,3}$ полученной внешней формы, имеем следующие представления, согласующиеся с представлениями напряжений

$$R_{31} = [\sigma_{13} - i\mu\alpha_3 u_3 - i\lambda\alpha_1 u_3]\, e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})},$$

$$R_{32} = [\sigma_{23} - i\mu\alpha_3 u_2 - i\lambda\alpha_2 u_3]\, e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})},$$

$$R_{33} = [\sigma_{33} - i\,(\lambda+2\mu)\,\alpha_3 u_3 -$$
$$- i\mu\,(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)]\, e^{i(\boldsymbol{\alpha},\mathbf{x})}.$$

Учитывая, что элемент касательного расслоения описывается ориентированной площадью $dx_1 \Lambda dx_2$, нетрудно видеть, что на границе могут задаваться различные комбинации неизвестных — либо напряжения, либо перемещения, либо смешанные условия.

Таким образом, функциональные уравнения задачи для изотропного тела имеют вид

$$\mathbf{K}(\alpha)U = \iint\limits_{\partial\Omega} \boldsymbol{\omega}.$$

В качестве компонент вектора внешних форм можно брать полученные выше внешние формы, причем при их построении имеется некоторый произвол, который целесообразно учитывать, если граничные условия содержат агрегаты производных решения, например, соотношения закона Гука.

4. Заметим, что в силу изотропии вид внешних форм для элементов разбиения единицы или, что то же самое, для элементов касательного расслоения границы в каждой введенной локальной системе координат $\mathbf{x}^\nu$ не изменяется. Меняться будут лишь коэффициенты в связи с изменениями начала координат локальных систем при переходе от одной к другой. В связи с этим будем рассматривать функциональное уравнение в одной из локальных систем координат, опустив индекс ν

$$\boldsymbol{K}(\alpha)U = \iint\limits_{\partial\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{\omega} = \sum_\nu \iint\limits_{\partial\boldsymbol{\Omega}} \varepsilon_\nu \boldsymbol{\omega}^\nu.$$

Проведем некоторые исследования матрицы-функции $\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha})$.

$$\mathbf{K}(\alpha) = \|k_{ij}\|_{i,j=1}^3,$$

$$k_{11} = (\lambda+\mu)\,\alpha_1^2 + B, \quad k_{22} = (\lambda+\mu)\,\alpha_2^2 + B,$$

$$k_{33} = (\lambda+\mu)\,\alpha_3^2 + B,$$

$$k_{12} = k_{21} = (\lambda+\mu)\,\alpha_1\alpha_2,$$

$$k_{13} = k_{31} = (\lambda+\mu)\,\alpha_1\alpha_3,$$

$$k_{23} = k_{32} = (\lambda+\mu)\,\alpha_2\alpha_3.$$

Изучим более детально ее структуру. Найдем обратную матрицу $\mathbf{K}^{-1}(\boldsymbol{\alpha})$, учитывая, что $\det\mathbf{K}$ дается формулой (6). Здесь приняты обозначения (5).

Имеем

$$\mathbf{K}^{-1}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{\Delta}\|b_{ij}\|_{i,j=1}^3 = \\ = \frac{1}{B(B+(\lambda+\mu)\,A)}\|b'_{ij}\|_{i,j=1}^3.$$

$$b_{11} = B\left[B + (\lambda+\mu)\left(\alpha_2^2+\alpha_3^2\right)\right],$$

$$b_{22} = B\left[B + (\lambda+\mu)\left(\alpha_1^2+\alpha_3^2\right)\right],$$

$$b_{33} = B\left[B + (\lambda+\mu)\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right)\right],$$

$$b_{12} = b_{21} = -(\lambda+\mu)\,\alpha_1\alpha_2 B,$$

$$b_{13} = b_{31} = -(\lambda+\mu)\,\alpha_1\alpha_3 B,$$

$$b_{23} = b_{32} = -(\lambda+\mu)\,\alpha_2\alpha_3 B,$$

$$b'_{11} = B + (\lambda+\mu)(\alpha_2^2+\alpha_3^2),$$

$$b'_{22} = B + (\lambda+\mu)(\alpha_1^2+\alpha_3^2),$$

$$b'_{33} = B + (\lambda+\mu)(\alpha_1^2+\alpha_2^2),$$

$$b'_{12} = b'_{21} = -(\lambda+\mu)\alpha_1\alpha_2,$$

$$b'_{23} = b'_{32} = -(\lambda+\mu)\alpha_2\alpha_3,$$

$$b'_{13} = b'_{31} = -(\lambda+\mu)\alpha_1\alpha_3.$$

Вычисляя при построении $\mathbf{K}^{-1}(\boldsymbol{\alpha})$ миноры второго порядка, нетрудно убедиться, что они обращаются в нуль вместе с определителем Δ (при $B=0$, так как все миноры второго порядка — нули). Это означает, что ранг матрицы-функции $\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha})$ равен 1. Отсюда следует, что матрица-функция $\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha})$, будучи приведенной к диагональному виду, будет иметь следующую структуру:

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha}) = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B+(\lambda+\mu)A \end{pmatrix}.$$

При $B=0$ имеем $B=\mu A+\delta=0$, что дает корни

$$\alpha_{31+} = i\sqrt{\alpha_2^2+\alpha_3^2-\frac{\delta}{\mu}},$$

$$\alpha_{31-} = -i\sqrt{\alpha_2^2+\alpha_3^2-\frac{\delta}{\mu}}.$$

Очевидно, эти корни двукратные.

При $B+(\lambda+\mu)\,A=0$ имеем однократные корни вида

$$\alpha_{32+} = i\sqrt{\alpha_2^2+\alpha_1^2-\frac{\delta}{\lambda+2\mu}},$$

$$\alpha_{32-} = -i\sqrt{\alpha_2^2+\alpha_1^2-\frac{\delta}{\lambda+2\mu}}.$$

В соответствии с дифференциальным методом факторизации выделим только те составляющие, которые будут связаны с корнями из нижней полуплоскости. Для построения псевдодифференциальных уравнений для матрицы-функции используем результаты работы [4]. Факторизующие матрицы-функции с учетом произвола при выборе постоянных C_k принимают вид

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\alpha-\alpha_{31-}} & \dfrac{-\alpha_1}{\alpha_2\,(\alpha-\alpha_{31-})} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\alpha-\alpha_{31-}} & 0 & -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_{31-}\,(\alpha-\alpha_{31-})} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}.$$

$$q_{31} = \frac{\alpha_1}{\alpha_{32-}\,(\alpha_3-\alpha_{32-})},$$

$$q_{32} = \frac{\alpha_2}{\alpha_{32-}\,(\alpha_3-\alpha_{32-})}, \quad q_{33} = \frac{1}{\alpha_3-\alpha_{32-}}.$$

Для получения псевдодифференциальных уравнений необходимо приравнять нулю формы-вычеты Лере. В результате их вычисления приходим к соотношениям вида

$$\mathbf{Q}_1\mathbf{R}_3 = \lim_{\alpha\to\alpha_{31-}} (\alpha-\alpha_{31-})\times$$
$$\times \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\alpha-\alpha_{31-}} & \dfrac{-\alpha_1}{\alpha_2\,(\alpha-\alpha_{31-})} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{31} \\ R_{32} \\ R_{33} \end{pmatrix} = 0,$$

$$\mathbf{Q}_2\mathbf{R}_3 = \lim_{\alpha\to\alpha_{31-}} (\alpha-\alpha_{31-})\times$$
$$\times \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\alpha-\alpha_{31-}} & 0 & -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_{31-}\,(\alpha-\alpha_{31-})} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} R_{31} \\ R_{32} \\ R_{33} \end{pmatrix} = 0,$$

$$\mathbf{Q}_3\mathbf{R}_3 = \lim_{\alpha\to\alpha_{32-}} (\alpha-\alpha_{32-})\times$$
$$\times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ q'_{31} & q'_{32} & q'_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{31} \\ R_{32} \\ R_{33} \end{pmatrix} = 0.$$

$$q'_{31} = \frac{\alpha_1}{\alpha_{32-}\,(\alpha_3-\alpha_{32-})},$$

$$q'_{32} = \frac{\alpha_2}{\alpha_{32-}\,(\alpha_3-\alpha_{32-})},$$

$$q'_{33} = \frac{1}{\alpha_3-\alpha_{32-}}.$$

После несложных вычислений, смысл которых будет разъяснен позже, получаем псевдодифференциальные уравнения в следующем виде:

$$2i\mu\alpha_1\alpha_{32-}u_1 + 2i\mu\alpha_2\alpha_{32-}u_2 + $$
$$+ (2i\mu\alpha_1\alpha_{32-}^2 - i\lambda\delta(\lambda+2\mu)^{-1})u_3 - T_1^0 = 0,$$

$$i\mu\alpha_2\alpha_{31-}u_1 - i\mu\alpha_1\alpha_{31-}u_2 - T_2^0 = 0,$$

$$i\mu(\alpha_{31-}^2 - \alpha_1^2)u_1 - i\mu\alpha_1\alpha_2 u_2 + $$
$$+ i\mu\alpha_1\alpha_{31-}u_3 - T_3^0 = 0,$$

$$T_1^0 = \alpha_1\sigma_{13} + \alpha_2\sigma_{23} + \alpha_{32-}\sigma_{33},$$

$$T_2^0 = \sigma_{13}\alpha_2 - \sigma_{23}\alpha_1, \quad T_3^0 = \alpha_{31-}\sigma_{13} - \alpha_1\sigma_{33}.$$

В случае задания на границе напряжений отсюда получаем следующую систему уравнений:

$$2i\mu\alpha_1\alpha_{32-}u_1 + 2i\mu\alpha_2\alpha_{32-}u_2 + $$
$$+ (2i\mu\alpha_1\alpha_{32-}^2 - i\lambda\delta(\lambda+2\mu)^{-1})u_3 = T_1^0,$$

$$i\mu\alpha_2\alpha_{31-}u_1 - i\mu\alpha_1\alpha_{31-}u_2 = T_2^0, \tag{9}$$

$$i\mu(\alpha_{31-}^2 - \alpha_1^2)u_1 - i\mu\alpha_1\alpha_2 u_2 + i\mu\alpha_1\alpha_{31-}u_3 = T_3^0.$$

Ее определитель Δ_1 равен

$$\Delta_1 = -4i\mu^3\alpha_{31-}\upsilon^2\left[(\upsilon^2 + \frac{\sigma}{2\mu})^2 + \upsilon^2\alpha_{31-}\alpha_{32-}\right],$$

$$\upsilon^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2.$$

Очевидно, что своим множителем он содержит также и уравнение Релея для изотропного полупространства. Таким образом, полученное псевдодифференциальное уравнение отвечает телу в форме полупространства, если не наложены ограничения на носители искомых функций.

В матричном виде систему (9) можно представить в форме

$$\mathbf{LU} = \mathbf{DT}, \tag{10}$$

$$\mathbf{T} = \{T_1, T_2, T_3\}, \quad T_1 = \sigma_{13},$$

$$T_2 = \sigma_{23}, \quad T_3 = \sigma_{33},$$

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & s \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}$$

$$l_{11} = l_{22} = \alpha_1 \sqrt{\tau_1^2 - \upsilon^2},$$

$$l_{33} = -2\alpha_1 \sqrt{\tau_2^2 - \upsilon^2},$$

$$l_{12} = \alpha_2 \sqrt{\tau_1^2 - \upsilon^2}, \quad l_{21} = \alpha_2 \sqrt{\tau_2^2 - \upsilon^2},$$

$$l_{31} = 2s + \alpha_2^2, \quad l_{32} = -\alpha_1 \alpha_2,$$

$$\mathbf{D} = \frac{i}{\mu} \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha_1}{2} & \dfrac{\alpha_2}{2} & \dfrac{\sqrt{\tau_1^2 - \upsilon^2}}{2} \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \\ \sqrt{\tau_2^2 - \upsilon^2} & 0 & -\alpha_1 \end{pmatrix},$$

$$\tau_1 = \frac{\delta}{\lambda + 2\mu}, \quad \tau_2 = \frac{\delta}{\mu}, \quad s = 0,5\tau_2^2 - \upsilon^2.$$

Вычислив определитель матрицы $\mathbf{L}$, находим

$$\Delta = \det \mathbf{L} = 2\alpha_1 \sqrt{\tau_2^2 - \upsilon^2} \times$$
$$\times \left[\upsilon^2 \sqrt{\tau_1^2 - \upsilon^2} \sqrt{\tau_2^2 - \upsilon^2} + s^2 \right].$$

Стоящая в скобках функция является известной функцией Рэлея. Обратная матрица $\mathbf{L}^{-1}$ после вычисления принимает вид

$$\mathbf{L}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \|L_{ij}\|_{i,j=1}^3,$$

$$L_{11} = 2\alpha_1^2 \alpha_{320}^2, \quad L_{22} = \alpha_{320}^2 - \alpha_1^2,$$

$$L_{33} = -\alpha_{310} \alpha_{320} \upsilon^2,$$

$$L_{12} = \alpha_1 \alpha_2 \left(2\alpha_{310} \alpha_{320} - s \right), \quad L_{13} = \alpha_1 \alpha_{320} s,$$

$$L_{21} = 2\alpha_1 \alpha_2 \alpha_{320}^2, \quad L_{23} = \alpha_2 \alpha_{320} s,$$

$$L_{31} = 2\alpha_1 \alpha_{320}^2 s, \quad L_{32} = \alpha_2 \alpha_{320} \alpha_{320}^2,$$

$$\alpha_{310} = -i\sigma_1 = \sqrt{\tau_1^2 - \upsilon^2},$$

$$\alpha_{320} = -i\sigma_2 = \sqrt{\tau_2^2 - \upsilon^2}.$$

Подействовав матрицей $\mathbf{L}^{-1}$ слева на систему (10), получим

$$\mathbf{U} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{T}.$$

Образовавшаяся в результате перемножения матрица $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{D}$ после упрощения принимает вид

$$\mathbf{C} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{D} = \frac{i\alpha_1}{\mu \Delta} \|c_{ij}\|_{i,j=1}^3.$$

$$c_{11} = \alpha_1^2 \alpha_{320}^2 + 2\alpha_2^2 \alpha_{310} \alpha_{320} - (\alpha_2^2 - \alpha_{320}^2) s,$$

$$c_{22} = \alpha_2^2 \alpha_{320}^2 + 2\alpha_1^2 \alpha_{310} \alpha_{320} - (\alpha_1^2 - \alpha_{320}^2) s,$$

$$c_{33} = 0,5 \alpha_{310} \alpha_{320} \tau_2,$$

$$c_{12} = c_{21} = \alpha_1 \alpha_2 (\alpha_{320}^2 - 2\alpha_{310} \alpha_{320}),$$

$$c_{13} = -c_{31} = \alpha_1 \alpha_{320} (2\alpha_{310} \alpha_{320} - s),$$

$$c_{23} = -c_{32} = \alpha_2 \alpha_{320} (2\alpha_{310} \alpha_{320} - s).$$

Последнее можно представить также в форме системы интегральных уравнений с матрицей-функцией вида

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \alpha_1^2 M + \alpha_2^2 N & \alpha_1 \alpha_2 (M - N) & i\alpha_1 P \\ \alpha_1 \alpha_2 (M - N) & \alpha_1^2 N + \alpha_2^2 M & i\alpha_2 P \\ -i\alpha_1 P & -i\alpha_2 P & R \end{pmatrix},$$

$$M(\upsilon) = \frac{-0,5\tau_2^2 \sigma_2}{\upsilon^2 \Delta}, \quad N(\upsilon) = \frac{2}{\upsilon^2 \sigma_2},$$

$$P(\upsilon) = \frac{\upsilon^2 - 0{,}5\tau_2^2 - \sigma_1 \sigma_2}{\Delta}, \quad R(\upsilon) = \frac{-0{,}5\tau_2^2 \sigma_1}{\Delta},$$

$$\Delta_0 = (\upsilon^2 - 0{,}5\tau_2^2)^2 - \upsilon^2 \sigma_1 \sigma_2.$$

Получили формулы, совпадающие с тем случаем, когда тело является полупространством.

5. Статическая задача для трехмерного линейно деформируемого тела может быть решена с использованием решения, полученного для динамической задачи о вибрации тела путем вычисления предела в функциях, представляющих решение, когда частота колебаний стремится к нулю. Однако из методических соображений далее решение этой задачи строится методом факторизации. В отличие от рассмотренной выше динамической задачи, в статическом случае кратные корни характеристической матрицы-функции имеют присоединенные векторы. Это приводит к тому, что факторизующая матрица-функция имеет кратные полюсы второго порядка, так как ранг матрицы равен единице.

6. Применяя формулы факторизации матриц-функций, приведенные в [4], получаем представление характеристической матрицы-функции в виде

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 \mathbf{S}^{-1},$$

$$\mathbf{S}^{-1} = \begin{pmatrix} s'_{11} & s'_{12} & s'_{13} \\ b_{33} & 0 & -b \\ -b_{32} & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$s'_{11} = b_{32}b_{23} - b_{22}b_{33}, \quad s'_{12} = b_{33} - b_{13}b_{32},$$

$$s'_{13} = b_{22}b_{13} - b_{23},$$

$$b_{13} = \frac{\alpha_1\alpha_3}{(\varepsilon+1)\alpha_{30}^2}, \quad b_{22} = \frac{\varepsilon\alpha_{30}^2 - \alpha_1^2}{\alpha_1\alpha_2},$$

$$b_{23} = \frac{\alpha_3\alpha_2}{(\varepsilon+1)\,\alpha_{30}^2}, \quad b_{32} = -\frac{\varepsilon\alpha_3}{\alpha_1},$$

$$b_{33} = \frac{(\varepsilon+1)\,\alpha_{30}^2 - \varepsilon\alpha_3^2}{(\varepsilon+1)\,\alpha_{30}^2};$$

$$\mathbf{K}_0 = \begin{pmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix} = \|k_{ij}\|_{i,j=1}^3,$$

$$k_{11} = \alpha_1\alpha_2, \quad k_{31} = \alpha_2\alpha_3,$$

$$k_{21} = \alpha_2^2 + \varepsilon\left(\alpha_3^2 - \alpha_{30}^2\right),$$

$$k_{22} = \frac{\varepsilon\,(\varepsilon+1)\,\alpha_{30}^2\left(\alpha_3^2 - \alpha_{30}^2\right)}{\alpha_1\alpha_2},$$

$$k_{32} = \frac{-\varepsilon\,(\varepsilon+1)\left(\alpha_3^2 - \alpha_{30}^2\right)\alpha_3}{\alpha_1},$$

$$k_{33} = -\frac{\varepsilon\left(\alpha_3^2 - \alpha_{30}^2\right)}{\alpha_{30}^2};$$

$$\Delta(\alpha_3) = \det\mathbf{K}_0 = -\varepsilon^2(\varepsilon+1)\left(\alpha_3^2 - \alpha_{30}^2\right)^3,$$

$$\mathbf{K}_0^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\alpha_1\alpha_2} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

$$a_{21} = -\frac{\alpha_2^2 + \varepsilon\left(\alpha_3^2 - \alpha_{30}^2\right)}{\varepsilon\,(\varepsilon+1)\,\alpha_{30}^2\left(\alpha_3^2 - \alpha_{30}^2\right)},$$

$$a_{22} = \frac{\alpha_1\alpha_2}{\varepsilon\,(\varepsilon+1)\,\alpha_{30}^2\left(\alpha_3^2 - \alpha_{30}^2\right)},$$

$$a_{31} = \frac{\left[\alpha_2^2 + \varepsilon\left(\alpha_3^2 - \alpha_{30}^2\right) + \alpha_{30}^2\right]\alpha_3}{\varepsilon\alpha_1\left(\alpha_3^2 - \alpha_{30}^2\right)^2},$$

$$a_{32} = -\frac{\alpha_2\alpha_3}{\varepsilon\left(\alpha_3^2 - \alpha_{30}^2\right)},$$

$$a_{33} = \frac{\alpha_3\left[\varepsilon\left(\alpha_3^2 - \alpha_{30}^2\right) - \alpha_1^2\right]}{\alpha_1\varepsilon\left(\alpha_3^2 - \alpha_{30}^2\right)}.$$

7. Внося эти соотношения в функциональное уравнение, приходим к соотношению вида

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{K}_0^{-1}\int\limits_{\partial}\int\limits_{\mathbf{\Omega}} \boldsymbol{\omega}.$$

8. Вводя касательное расслоение и вычисляя формы-вычеты Лере, приходим к выражениям вида

$$\mathbf{MU} - \mathbf{DT} = 0,$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & 0 \end{pmatrix},$$

$$m_{11} = -2i\mu\alpha_{30}\left[\varepsilon\alpha_{30}^2 - \alpha_1^2\right],$$

$$m_{12} = 2i\alpha_1\alpha_2\alpha_{30}\mu, \quad m_{13} = 2\varepsilon\mu i\alpha_1\alpha_{30}^2,$$

$$m_{21} = 2i\mu\alpha_1\alpha_{30}, \quad m_{22} = 2i\mu\alpha_2\alpha_{30},$$

$$m_{23} = 2i\mu\alpha_{30}^2,$$

$$m_{31} = -m_{32} = i\mu\alpha_2\alpha_{30},$$

$$\Delta_1 = \det\mathbf{M} = -4i\mu^3\alpha_1\alpha_{30}^6,$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} -2\varepsilon\alpha_{30}^2 + \alpha_1^2 & \alpha_1\alpha_2 & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_{30} \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В результате получили три уравнения в соответствии с количеством нулей определителя характеристической матрицы-функции, имеющих отрицательные мнимые составляющие.

Допустим, как и в прошлой задаче, на границе задаются напряжения. В этом случае, разрешая псевдодифференциальное уравнение относительно перемещений, приходим к соотношению вида

$$\mathbf{U} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{DT}.$$

Здесь матрицы-функции представимы в форме

$$\mathbf{F} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{D} = \frac{1}{\Delta_1}\|f_{ij}\|_{i,j=1}^3,$$

$$f_{11} = -2\mu^2\alpha_1\alpha_{30}^3\left[\alpha_1^2(\varepsilon+1) + 2\alpha_2^2\right],$$

$$f_{22} = -2\mu^2\alpha_1\alpha_{30}^3\left[\alpha_2^2(\varepsilon+1) + 2\alpha_1^2\right],$$

$$f_{33} = 2\mu^2\alpha_1\alpha_{30}^5(\varepsilon+1),$$

$$f_{12} = f_{21} = -2\mu^2\alpha_1^2\alpha_2\alpha_{30}^3(\varepsilon-1),$$

$$f_{13} = -f_{31} = 2\varepsilon\mu^2\alpha_1^2\alpha_{30}^4,$$

$$f_{23} = -f_{32} = 2\varepsilon\mu^2\alpha_1\alpha_2\alpha_{30}^4;$$

$$\Delta_1 = 4i\mu^3\alpha_1\alpha_{30}^6.$$

Внеся под знак матрицы в качестве делителя определитель и произведя сокращения, окончательно получаем

$$\mathbf{F} = \|f'_{ij}\|_{i,j=1}^3$$

$$f'_{11}=\frac{i\left[(\varepsilon+1)\,\alpha_1^2+2\alpha_2^2\right]}{2\mu\alpha_{30}^3},$$

$$f'_{22}=\frac{i\left[(\varepsilon+1)\,\alpha_2^2+2\alpha_1^2\right]}{2\mu\alpha_{30}^3},\quad f'_{33}=-\frac{i\,(\varepsilon+1)}{2\mu\alpha_{30}},$$

$$f'_{12}=f'_{21}=\frac{i\alpha_1\alpha_2\,(\varepsilon-1)}{2\mu\alpha_{30}^3},$$

$$-f'_{13}=f'_{31}=\frac{\varepsilon i\alpha_1}{2\mu\alpha_{30}^2},\quad -f'_{23}=f'_{32}=\frac{\varepsilon i\alpha_2}{2\mu\alpha_{30}^2}.$$

Из последней формулы видно, что она описывает связь между напряжениями и перемещениями в полупространстве, т.е. если бы тело было бы полупространством. В случае ограниченного тела эта связь имеет место только для элемента разбиения поверхности тела в одной из локальных координат касательного расслоения. Эти формулы полностью совпадают с решением задачи для полупространства в случае, когда на границе задаются напряжения. Разница с полупространством состоит в том, что в данном случае носителями обращений Фурье функций $\mathbf{u}$ и $\mathbf{T}$ являются малые окрестности начал координат локальных систем касательного расслоения границы $\partial\Omega$.

Перепишем функциональное уравнение в виде

$$\mathbf{K}_\nu(\boldsymbol{\alpha}^\nu)\mathbf{U}^\nu=\iint\limits_{\partial\boldsymbol{\Omega}}\boldsymbol{\omega}^\nu=\sum_\tau\iint\limits_{\partial\boldsymbol{\Omega}}\varepsilon_\tau\boldsymbol{\omega}^\nu(\boldsymbol{\xi}^\tau,\boldsymbol{\alpha}^\nu).$$

Последовательно будем перебирать все локальные системы и записывать в них функциональное уравнение. Как доказано выше, при этом будут меняться как матрица-функция $\mathbf{K}_\nu(\boldsymbol{\alpha}^\nu)$, так и неизвестная $\mathbf{u}^\nu$. Неизменными останутся лишь значения неизвестной и ее производных на $\partial\Omega$, записанных в локальных координатах при интегрировании по элементу разбиения.

Таким образом, вычислив необходимые формы-вычеты Лере, имеем

$$\sum_\tau\iint\limits_{\partial\boldsymbol{\Omega}}\varepsilon_\tau\boldsymbol{\omega}^\nu\left(\boldsymbol{\xi}^\tau,\alpha_1^\nu,\alpha_2^\nu,\alpha_{3r-}^\nu\left(\alpha_1^\nu,\alpha_2^\nu\right)\right)=0,$$

$$r=1,2,3,\dots,R.$$

Анализируя с этих позиций предыдущие построения, констатируем, что получили представление для псевдодифференциального уравнения лишь для одной локальной системы координат и элемента разбиения в ее окрестности, т.е. в принятых обозначениях

$$\varepsilon_\nu\boldsymbol{\omega}^\nu\left(\boldsymbol{\xi}^\nu,\alpha_1^\nu,\alpha_2^\nu,\alpha_{3r-}^\nu\left(\alpha_1^\nu,\alpha_2^\nu\right)\right)=0.$$

Чтобы теперь на основе полученных в предыдущих пунктах результатов получить псевдодифференциальные уравнения, отвечающие исходной краевой задаче, необходимо сделать следующие построения:

1) пронумеровать все $\tau=1,2,\dots,T$;

2) для каждого $\tau=1,2,\dots,T$ построить выражения

$$\varepsilon_\tau\boldsymbol{\omega}^\tau\left(\boldsymbol{\xi}^\tau,\alpha_1^\tau,\alpha_2^\tau,\alpha_{3r-}^\tau\left(\alpha_1^\tau,\alpha_2^\tau\right)\right),$$

как это было сделано в предыдущих пунктах;

3) составить сумму

$$\sum_\tau\iint\limits_{\partial\boldsymbol{\Omega}}\varepsilon_\tau\boldsymbol{\omega}^\tau\left(\boldsymbol{\xi}^\tau,\alpha_1^\tau,\alpha_2^\tau,\alpha_{3r-}^\tau\left(\alpha_1^\tau,\alpha_2^\tau\right)\right);$$

4) путем замены $\boldsymbol{\alpha}^\tau=\mathbf{c}_\tau^\nu\boldsymbol{\alpha}^\nu$ в этой сумме для каждого $1\leqslant\nu\leqslant T$ составить искомые псевдодифференциальные уравнения по правилу

$$\sum_\tau\iint\limits_{\partial\boldsymbol{\Omega}}\varepsilon_\tau\boldsymbol{\omega}^\tau\left(\boldsymbol{\xi}^\tau,\alpha_1^\nu,\alpha_2^\nu,\alpha_{3r-}^\nu\left(\alpha_1^\nu,\alpha_2^\nu\right)\right)=0,$$

$$\nu=1,2,\dots,T.$$

Количество систем псевдодифференциальных уравнений равно количеству локальных систем координат.

Вновь возвращаясь к первоначально поставленным краевым задачам, опишем весь процесс применения дифференциального метода факторизации при их решении.

Применению перечисленных пунктов 1–4 должны предшествовать:

– введение касательного расслоения границы $\partial\Omega$, построение локальных систем прямоугольных координат;

– осуществление в каждой локальной системе координат преобразования Фурье по всем переменным, сопровождающееся введением своих внешних форм в каждой локальной системе координат;

– внесение во внешние формы граничных условий путем разрешения заданных граничных условий краевой задачи относительно независимых производных или их агрегатов;

– построение функциональных уравнений и осуществление требований автоморфизма — вычисление форм-вычетов Лере и их аннулирование. После этого реализуются перечисленные пункты 1–4.

Для дальнейшего исследования перепишем систему псевдодифференциальных уравнений в следующем виде:

$$\iint\limits_{\partial\boldsymbol{\Omega}_\nu} \varepsilon_\nu \boldsymbol{\omega}^\nu \left(\boldsymbol{\xi}^\nu, \alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_{3r-}^\nu\left(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu\right)\right) +$$

$$\sum_\tau{}' \iint\limits_{\partial\boldsymbol{\Omega}_\tau} \varepsilon_\tau \boldsymbol{\omega}^\tau \left(\boldsymbol{\xi}^\tau, \alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_{3r-}^\nu\left(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu\right)\right) = 0,$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, T.$$

Здесь штрих у символа суммы означает, что член с параметром $\tau = \nu$ в сумме отсутствует. Последнее можно переписать в виде

$$\begin{gathered}
\mathbf{M}^\nu \left(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_{3r-}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu)\right) \times \\
\times \mathbf{U}^\nu \left(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_{3r-}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu)\right) - \\
- \mathbf{D}^\nu \left(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_{3r-}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu)\right) \times \\
\times \mathbf{T}^\nu \left(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_{3r-}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu)\right) + \\
+ \sum_{\boldsymbol{\tau}=1}^{T}{}' \left[\mathbf{M}^\tau \left(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_{3r-}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu)\right) \times \right.\\
\times \mathbf{U}^\tau \left(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_{3r-}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu)\right) - \\
- \mathbf{D}^\tau \left(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_{3r-}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu)\right) \times \\
\left. \times \mathbf{T}^\tau \left(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_{3r-}^\nu(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu)\right) \right] = 0.
\end{gathered}$$

Построенные псевдодифференциальные уравнения позволяют формулировать краевые задачи для упругого тела в различных постановках. Например, допустим, на границе задан вектор перемещений $\mathbf{u}^\nu$. Тогда систему уравнений можно переписать в виде

$$\left(\mathbf{M}^\nu\right)^{-1} \mathbf{D}^\nu \mathbf{T}^\nu + \sum_{\boldsymbol{\tau}} \left(\mathbf{M}^\nu\right)^{-1} \mathbf{D}^\tau \mathbf{T}^\tau = \\ = \mathbf{U}^\nu + \left(\mathbf{M}^\nu\right)^{-1} \mathbf{M}^\tau \mathbf{U}^\tau.$$

В том случае, когда на границе задаются напряжения, соответствующая система уравнений принимает вид

$$\left(\mathbf{D}^\nu\right)^{-1} \mathbf{M}^\nu \mathbf{U}^\nu + \sum_{\tau} \left(\mathbf{D}^\nu\right)^{-1} \mathbf{M}^\tau \mathbf{U}^\tau = \\ = \mathbf{T}^\nu + \left(\mathbf{D}^\nu\right)^{-1} \mathbf{D}^\tau \mathbf{T}^\tau.$$

Введем обозначения

$$\mathbf{K}^\nu \left(\alpha_1^\nu,\ \alpha_2^\nu\right) = \left(\mathbf{M}^\nu\right)^{-1} \mathbf{D}^\nu,$$

$$\mathbf{K}^{\nu\tau}(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu) = \left(\mathbf{M}^\nu\right)^{-1} \mathbf{D}^\tau,$$

$$\mathbf{B}^{\nu\tau}(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu) = \left(\mathbf{M}^\nu\right)^{-1} \mathbf{M}^\tau.$$

Тогда, применяя обращение Фурье $V^{-1}\left(\mathbf{x}_1^\nu, \mathbf{x}_2^\nu\right)$ по параметрам, α_1^ν, α_2^ν, приходим к системе интегральных уравнений вида

$$\iint\limits_{\partial\Omega_\nu} \mathbf{k}^\nu \left(x_1^\nu - \xi_1^\nu, x_2^\nu - \xi_2^\nu\right) \mathbf{t}^\nu \left(\xi_1^\nu, \xi_2^\nu\right) d\xi_1^\nu d\xi_1^\nu +$$

$$+ \sum_{\tau=1}^{T}{}' \iint\limits_{\partial\Omega_\tau} \mathbf{k}^{\nu\tau} \left(x_1^\tau, \xi_1^\tau, x_2^\tau, \xi_2^\tau\right) \mathbf{t}^\tau \left(\xi_1^\tau, \xi_2^\tau\right) d\xi_1^\tau d\xi_1^\tau =$$

$$= \mathbf{u}^\nu(x_1^\nu, x_2^\nu) +$$

$$+ \sum_{\tau=1}^{T}{}' \iint\limits_{\partial\Omega_\tau} \mathbf{b}^{\nu\tau} \left(x_1^\tau, \xi_1^\tau, x_2^\tau, \xi_2^\tau\right) \mathbf{u}^\tau(\xi_1^\tau, \xi_2^\tau) d\xi_1^\tau d\xi_1^\tau,$$

$$x_1^\nu, x_2^\nu \in \partial\Omega_\nu, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant T,$$

$$\mathbf{k}^\nu \left(x_1^\nu, x_2^\nu\right) = V^{-1} \mathbf{K}^\nu \left(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu\right),$$

$$\mathbf{k}^{\nu\tau} \left(x_1^\tau, \xi_1^\tau, x_2^\tau, \xi_2^\tau\right) = \\ = V^{-1} \mathbf{K}^{\nu\tau} \left(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu\right) e^{i(\mathbf{c}_\tau^\nu \boldsymbol{\alpha}^\nu, \boldsymbol{\xi}^\tau)},$$

$$\mathbf{b}^{\nu\tau} \left(x_1^\tau, \xi_1^\tau, x_2^\tau, \xi_2^\tau\right) = \\ = V^{-1} \mathbf{B}^{\nu\tau} \left(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu\right) e^{i(\mathbf{c}_\tau^\nu \boldsymbol{\alpha}^\nu, \boldsymbol{\xi}^\tau)},$$

$$\mathbf{t}^\nu \left(x_1^\nu, x_2^\nu\right) = V^{-1} \mathbf{T}^\nu \left(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu\right),$$

$$\mathbf{u}^\nu \left(x_1^\nu, x_2^\nu\right) = V^{-1} \mathbf{U}^\nu \left(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu\right).$$

Или в операторном виде

$$\mathbf{K}^\nu \mathbf{t}^\nu + \sum_{\tau=1}^{T} \mathbf{K}^{\nu\tau} \mathbf{t}^\tau = \mathbf{u}^\nu + \sum_{\tau=1}^{T} \mathbf{B}^{\nu\tau} \mathbf{u}^\tau.$$

Аналогично, введя обозначения

$$\mathbf{N}^\nu \left(\alpha_1^\nu,\ \alpha_2^\nu\right) = \left(\mathbf{D}^\nu\right)^{-1} \mathbf{M}^\nu,$$

$$\mathbf{N}^{\nu\tau} \left(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu\right) = \left(\mathbf{D}^\nu\right)^{-1} \mathbf{M}^\tau,$$

$$\mathbf{R}^{\nu\tau} \left(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu\right) = \left(\mathbf{D}^\nu\right)^{-1} \mathbf{D}^\tau,$$

приходим к системе интегральных уравнений такого же типа, но уже относительно перемещений.

$$\iint\limits_{\partial\Omega_\nu} \mathbf{n}^\nu \left(x_1^\nu - \xi_1^\nu, x_2^\nu - \xi_2^\nu\right) \mathbf{u}^\nu \left(\xi_1^\nu, \xi_2^\nu\right) d\xi_1^\nu d\xi_1^\nu +$$

$$+ \sum_{\tau=1}^{T}{}' \iint\limits_{\partial\Omega_\tau} \mathbf{n}^{\nu\tau} \left(x_1^\tau, \xi_1^\tau, x_2^\tau, \xi_2^\tau\right) \mathbf{u}^\tau \left(\xi_1^\tau, \xi_2^\tau\right) d\xi_1^\tau d\xi_1^\tau =$$

$$= \mathbf{t}^\nu \left(x_1^\nu, x_2^\nu\right) +$$

$$+ \sum_{\tau=1}^{T}{}' \iint\limits_{\partial\Omega_\tau} \mathbf{r}^{\nu\tau} \left(x_1^\tau, \xi_1^\tau, x_2^\tau, xi_2^\tau\right) \mathbf{t}^\tau \left(\xi_1^\tau, \xi_2^\tau\right) d\xi_1^\tau d\xi_1^\tau,$$

$$x_1^\nu, x_2^\nu \in \partial\Omega_\nu, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant T,$$

$$\mathbf{n}^\nu\left(x_1^\nu, x_2^\nu\right) = V^{-1}\mathbf{N}^\nu\left(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu\right),$$

$$\mathbf{n}^{\nu\tau}\left(x_1^\tau, \xi_1^\tau, x_2^\tau, \xi_2^\tau\right) = \\ = V^{-1}\mathbf{N}^{\nu\tau}\left(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu\right) e^{i\left(\mathbf{c}_\tau^\nu \boldsymbol{\alpha}^\nu, \boldsymbol{\xi}^\tau\right)},$$

$$\mathbf{r}^{\nu\tau}\left(x_1^\tau, \xi_1^\tau, x_2^\tau, \xi_2^\tau\right) = \\ = V^{-1}\mathbf{R}^{\nu\tau}\left(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu\right) e^{i\left(\mathbf{c}_\tau^\nu \boldsymbol{\alpha}^\nu, \boldsymbol{\xi}^\tau\right)}.$$

Или в операторном виде

$$\mathbf{N}^\nu \mathbf{u}^\nu + \sum_{\tau=1}^{T} \mathbf{N}^{\nu\tau}\mathbf{u}^\tau = \mathbf{t}^\nu + \sum_{\tau=1}^{T} \mathbf{R}^{\nu\tau}\mathbf{t}^\tau.$$

Наконец, может случиться ситуация, при которой на части $\partial\Omega_{1\nu}$ окрестности $\partial\Omega_\nu = \partial\Omega_{1\nu} \cup \partial\Omega_{2\nu}$ задаются перемещения, а на части $\partial\Omega_{2\nu}$ — напряжения.

В этом случае система интегральных уравнений на одной из частей области $\partial\Omega_{1\nu}$ принимает вид

$$\iint\limits_{\partial\Omega_\nu} \mathbf{k}^\nu\left(x_1^\nu - \xi_1^\nu, x_2^\nu - \xi_2^\nu\right)\mathbf{t}^\nu\left(\xi_1^\nu, \xi_2^\nu\right) d\xi_1^\nu d\xi_1^\nu + \\ + \sum_{\tau=1}^{T}{}' \iint\limits_{\partial\Omega_\tau} \mathbf{k}^{\nu\tau}\left(x_1^\tau, \xi_1^\tau, x_2^\tau, \xi_2^\tau\right)\mathbf{t}^\tau\left(\xi_1^\tau, \xi_2^\tau\right) d\xi_1^\tau d\xi_1^\tau = \\ = \mathbf{u}^\nu\left(x_1^\nu, x_2^\nu\right) + \\ + \sum_{\tau=1}^{T}{}' \iint\limits_{\partial\Omega_\tau} \mathbf{b}^{\nu\tau}\left(x_1^\tau, \xi_1^\tau, x_2^\tau, \xi_2^\tau\right)\mathbf{u}^\tau\left(\xi_1^\tau, \xi_2^\tau\right) d\xi_1^\tau d\xi_1^\tau,$$

$$x_1^\nu, x_2^\nu \in \partial\Omega_{1\nu}, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant T;$$

на другой $\partial\Omega_{2\nu}$

$$\iint\limits_{\partial\Omega_\nu} \mathbf{n}^\nu\left(x_1^\nu - \xi_1^\nu, x_2^\nu - \xi_2^\nu\right)\mathbf{u}^\nu\left(\xi_1^\nu, \xi_2^\nu\right) d\xi_1^\nu d\xi_1^\nu + \\ + \sum_{\tau=1}^{T}{}' \iint\limits_{\partial\Omega_\tau} \mathbf{n}^{\nu\tau}\left(x_1^\tau, \xi_1^\tau, x_2^\tau, \xi_2^\tau\right)\mathbf{u}^\tau\left(\xi_1^\tau, \xi_2^\tau\right) d\xi_1^\tau d\xi_1^\tau = \\ = \mathbf{t}^\nu\left(x_1^\nu, x_2^\nu\right) + \\ + \sum_{\tau=1}^{T}{}' \iint\limits_{\partial\Omega_\tau} \mathbf{r}^{\nu\tau}\left(x_1^\tau, \xi_1^\tau,\ x_2^\tau, \xi_2^\tau\right)\mathbf{t}^\tau\left(\xi_1^\tau, \xi_2^\tau\right) d\xi_1^\tau d\xi_1^\tau,$$

$$x_1^\nu, x_2^\nu \in \partial\Omega_{2\nu}, \quad 1 \leqslant \nu \leqslant T.$$

Из анализа этих формул видно, что первые слева интегральные операторы обратимы интегральным методом факторизации, изложенным в [1–3] и являются главными.

Рассмотрим интегральные уравнения, записанные в операторном виде.

Справедлива

Теорема. *Операторы* $\mathbf{K}^{\nu\tau}, \mathbf{N}^{\nu\tau}$ *вполне непрерывны в каждом пространстве* $H_\mathbf{s}$*, в котором обратимы операторы* $\mathbf{K}^{\nu\tau}, \mathbf{N}^{\nu\tau}$ *соответственно.*

Доказательство следует из их непрерывности и дифференцируемости.

Обращая главные операторы, будем иметь

$$\mathbf{t}^\nu + \sum_{\tau=1}^{T}\left(\mathbf{K}^\nu\right)^{-1}\mathbf{K}^{\nu\tau}\mathbf{t}^\tau = \\ = \left(\mathbf{K}^\nu\right)^{-1}\mathbf{u}^\nu + \sum_{\tau=1}^{T}\left(\mathbf{K}^\nu\right)^{-1}\mathbf{B}^{\nu\tau}\mathbf{u}^\tau,$$

$$\mathbf{u}^\nu + \sum_{\tau=1}^{T}\left(\mathbf{N}^\nu\right)^{-1}\mathbf{N}^{\nu\tau}\mathbf{u}^\tau = \\ = \left(\mathbf{N}^\nu\right)^{-1}\mathbf{t}^\nu + \sum_{\tau=1}^{T}\left(\mathbf{N}^\nu\right)^{-1}\mathbf{R}^{\nu\tau}\mathbf{t}^\tau.$$

Таким образом, получили интегральные уравнения второго рода с вполне непрерывными операторами, которые можно решать дискретизацией. Для построения приближенного решения следует принять во внимание, что операторы $\mathbf{K}^{\nu\tau}, \mathbf{N}^{\nu\tau}$ имеют экспоненциальные составляющие, убывающие тем сильнее, чем больше разность $|\nu - \tau|$.

Поэтому для приближенных целей можно, отбросив суммы, взять

$$\mathbf{t}^\nu = \left(\mathbf{K}^\nu\right)^{-1}\mathbf{u}^\nu, \quad \mathbf{u}^\nu = \left(\mathbf{N}^\nu\right)^{-1}\mathbf{t}^\nu.$$

Уточнения этого решения можно достичь, удерживая определенное число членов сумм. В случае смешанных граничных условий для обращения главного оператора надо использовать метод исследования операторов для тел с покрытиями [5, 6]. Допуская, что решения интегральных уравнений получены, вносим их в представление решения [1–3] и получаем его в интегральной форме следующего вида:

$$\mathbf{u}^{\nu} = \frac{1}{8\pi^3} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{e}^{-i(\boldsymbol{\alpha}^{\nu},\mathbf{x}^{\nu})} \left(\mathbf{K}^{\nu}\right)^{-1} \times$$

$$\times \iint\limits_{\partial\boldsymbol{\Omega}} \boldsymbol{\omega}^{\nu} d\alpha_1^{\nu} d\alpha_2^{\nu} d\alpha_3^{\nu}.$$

Для расчетов по этой формуле целесообразно вновь во втором интеграле осуществить разбиение единицы и перейти к локальным координатам в каждой области $\partial\Omega_\tau$. Вычислив формы-вычеты Лере интеграла по параметру α_3^{ν} для $\mathbf{x}^{\nu} \in \Omega$, получим в виде интегральной суммы представление решения — точное или приближенное в зависимости от точности решения интегральных уравнений.

Литература

1. *Евдокимова О. В.* Дифференциальный метод факторизации в неоднородных и нестационарных задачах // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2007. №2. С. 51–55.
2. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* Об интегральном и дифференциальном методах факторизации // ДАН. 2006. Т. 410. №2. С. 168–172.
3. *Евдокимова О. В.* Дифференциальный метод факторизации в механике разрушения, материаловедении и сейсмологии // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. №4. С. 32–42.
4. *Евдокимова О. В.* О факторизации матриц-функций, возникающих в проблеме прочности материалов сложного строения // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2007. №2. С. 8–11.
5. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* К проблеме исследования материалов с покрытиями // ДАН. 2006. Т. 410. №1. С. 49–52.
6. *Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.* К проблеме оценки состояния материалов с покрытиями // ДАН. 2006. Т. 409. №4. С. 481–485.

Статья поступила 24 июня 2007 г.

Кубанский государственный университет, г. Краснодар