

УДК 518.8:53

ДИНАМИКА ПРОВОДЯЩЕЙ КАПЛИ НА ТВЕРДОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ¹*Канчукоев В. З.², Карамурзов Б. С.³, Лесев В. Н.⁴***DYNAMICS OF A CONDUCTIVE DROP ON A SOLID SURFACE IN THE ELECTROMAGNETIC FIELD**

Kanchukoev V. Z., Karamurzov B. S., Lesev V. N.

The motion of a small drop partially wetting the solid surface under the action of oscillatory transversal electromagnetic force is studied. A new algorithm for numerical implementation of the mathematical model has been developed and computing experiment has been conducted. The experiment results have shown that the amplitude of vibrations of the drop surface increases while approaching the apex and the intensity of liquid moving within the drop essentially depends on the contact wet angle.

Введение

Результаты многочисленных исследований, выполненных в последние годы [1, 2], свидетельствуют о существенной роли смачивания и растекания во многих современных технологиях, связанных с очисткой и защитой поверхностей, созданием композиционных материалов, пайкой и сваркой, ядерной энергетикой и космическими технологиями, развитием электроники и медицины, добычей и переработкой полезных ископаемых, защитой окружающей среды и т. д. Закономерности смачивания и растекания могут быть, например, успешно использованы для решения таких важнейших задач, стоящих в настоящее время перед нефтеперерабатывающей и нефтехимической промышленностью, как интенсификация технологических процессов и вовлечение в переработку все более тяжелых видов сырья [3]. Хорошо известно, что процессы термической переработки и охлаждения углеводородов сопровождаются образованием коксовых отложений на поверхности реакционных аппаратов и в условиях ужесточения технологических режимов перехода к все более сильно коксующимся видам сырья, коксоотложение становится основным препятствием на

пути интенсификации процессов переработки нефтяного сырья.

Перспективным направлением интенсификации переработки традиционных видов сырья и вовлечения в переработку тяжелых нефтяных фракций, а также твердых топлив является проведение технологических процессов в присутствии расплавов металлов, солей и окислов, применяемых в виде тонких пленок на внутренней поверхности реакционных аппаратов.

Установленные зависимости для расчета кинетики процессов капиллярного течения, растекания и коксоотложения, а также критических тепловых потоков при кипении могут быть использованы при модернизации действующих и проектировании новых трубчатых печей и закалочных аппаратов промышленных установок пиролиза, при создании теплообменников для нагрева и переработки нефтяного сырья, обогреваемых теплоносителем ядерного реактора [4] и т. д.

Отметим также, что наряду с хорошо известными статическими методами определения теплофизических свойств жидкостей (жидких сплавов) [5], в последнее время стали широко использоваться динамические методы [6], позволяющие определять, например, не

¹Работа выполнена при поддержке РФФИ р_юг (06-03-96614).

²Канчукоев Владимир Зедунович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры вычислительной математики Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова.

³Карамурзов Барасби Сулейманович, д-р техн. наук, профессор, ректор Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова.

⁴Лесев Вадим Николаевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теории функций и функционального анализа Кабардино-Балкарского государственного университета им. Х. М. Бербекова.

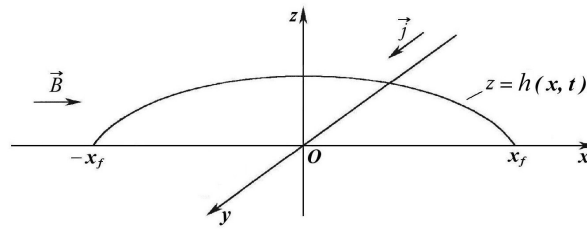


Рис. 1. Капля электропроводной жидкости в магнитном поле

только поверхностное натяжение, но и динамическую вязкость на основе анализа формы капли. Однако сложность в развитии указанных методов связана с отсутствием аналитических решений уравнений колебаний свободной поверхности капли и разработкой численных методов реализации математических моделей более высокого уровня, наиболее адекватно описывающих исследуемый физический процесс, что делает актуальными проводимые исследования.

1. Модель движения малой капли проводящей жидкости в электромагнитном поле

Рассмотрим «плоскую» каплю электропроводной частично-смачивающей жидкости ($0 < \theta_s < \frac{\pi}{2}$, θ_s — равновесный краевой угол смачивания), свободно лежащую на однородной горизонтальной твердой поверхности (рис. 1). Вдоль однородной оси y через систему пропустим периодический электрический ток.

Результаты проведенных ранее исследований показывают, что смачивание представляет собой чрезвычайно сложный процесс, который зависит от большого числа факторов [2, 7] и характеризуется отсутствием детальных сведений о его механизме. Экспериментальные данные [8, 9] свидетельствуют, что скорость движения линии трехфазного контакта связана с величиной динамического краевого угла смачивания. При этом в обычных условиях перемещение границы капли затруднено так, что угол смачивания может изменяться в значительных пределах при неподвижной границе. Если, например, рассматриваются достаточно быстрые установившиеся колебания свободной поверхности жидкости, то, по-видимому, можно считать линию трехфазного контакта неподвижной, а величину угла смачивания переменной величиной, которая колеблется около некоторого среднего значения [10]. В качестве примера такого движения свободной поверхности рассмотрим колебания малой кап-

ли частично смачивающей жидкости под действием осциллирующей поперечной электромагнитной силы.

Для малых капель жидкости с хорошей проводимостью оказываются выполнимыми сильные неравенства [10]: $Re \ll 1$, $Re_m \ll 1$, $s \geq 1$, где $Re = LU/\nu$ — число Рейнольдса, $Re_m = \mu_0 \sigma LU$ — магнитное число Рейнольдса, $s = \sigma/L\rho U^2$ — критерий, определяющий роль поверхностного натяжения, $U = \Delta L/T_0$ — характерная скорость, T_0 — характерное время, равное периоду колебания тока в системе, $\Delta L = LP_m/P_0$ — характерная величина смещения поверхности капли, $P_m = B_0 j_0 L$ — характерная величина магнитного давления, $P_0 = \sigma/L$ — характерная величина давления в капле, создаваемое поверхностным натяжением, μ_0 — магнитная постоянная, ν — кинематическая вязкость, ρ — плотность, σ — поверхностное натяжение, B_0 , j_0 — амплитуды колебаний внешнего магнитного поля и плотности тока, его вызывающего.

Например, для олова при температуре 600 К и $L = 10^{-4}$ м, $B_0 = 0,1$ Тл, $j = 10^7$ А/м², $T = 10^{-2}$ с получим $Re \approx 0,1$, $Re_m \approx 4 \cdot 10^{-8}$, $s = 2 \cdot 10^7$. Для хорошо смачивающей жидкости, у которой $\text{tg } \theta_s \ll 1$, можно считать, что производные всех величин вдоль и поперек капли также связаны сильным неравенством: $\partial/\partial y \ll \partial/\partial x$.

Выполнение указанных сильных неравенств позволяет воспользоваться безындукционным приближением в сочетании с приближением теории смазки [11], что существенно упрощает задачу расчета проводящей жидкой капли в электромагнитном поле. При этом в магнитном давлении необходимо учитывать только взаимодействие тока, текущего в капле с плотностью $\mathbf{j} = (0, j(t), 0)$, с внешним магнитным полем индукции $\mathbf{B} = (B(t), 0, 0)$ и система магнитогидродинамических уравнений сильно упрощается. Пренебрегая действием силы тяжести из-за малых размеров капли, запишем уравнения сохранения импульса

в этом приближении в виде

$$\frac{\partial P}{\partial x} - \nu\rho \frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z} + jB = 0. \quad (1.1)$$

Уравнения (1.1) должны быть дополнены уравнением неразрывности

$$\frac{\partial \vartheta_x}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta_z}{\partial z} = 0, \quad (1.2)$$

граничными условиями на твердой поверхности $z = 0$

$$\vartheta_x|_{z=0} = 0, \quad \vartheta_z|_{z=0} = 0, \quad (1.3)$$

граничными условиями на свободной поверхности $z = h(x, t)$

$$P|_{z=h} = -\sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \quad (1.4)$$

$$\left. \frac{\partial \vartheta_x}{\partial z} \right|_{z=h} = 0, \quad (1.5)$$

$$\left. \frac{\partial h}{\partial t} + \vartheta_x \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{z=h} = \vartheta_z. \quad (1.6)$$

Интегрируя второе уравнение (1.1), с учетом (1.4), получим

$$P = jB(h - z) - \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}. \quad (1.7)$$

Дифференцируя (1.7) по переменной x и принимая во внимание первое уравнение (1.1), имеем

$$jB \frac{\partial h}{\partial x} - \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} = \nu\rho \frac{\partial^2 \vartheta_x}{\partial z^2}. \quad (1.8)$$

Интегрируя (1.8) с учетом граничных условий (1.3) и (1.5), получим выражение для горизонтальной компоненты скорости

$$\vartheta_x = \frac{1}{\nu\rho} \left[jB \frac{\partial h}{\partial x} - \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right] \left(\frac{1}{2} z^2 - hz \right). \quad (1.9)$$

Из уравнения неразрывности (1.2) и выражения для проекции скорости (1.9) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta_z}{\partial z} = \frac{1}{\nu\rho} \left\{ \left[jB \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \sigma \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \right] \left(hz - \frac{1}{2} z^2 \right) + \right. \\ \left. + \left[jB \frac{\partial h}{\partial x} - \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right] \frac{\partial h}{\partial x} z \right\}. \quad (1.10) \end{aligned}$$

После интегрирования (1.10), с учетом условия на твердой поверхности (1.3), получим выражение для вертикальной составляющей скорости

$$\begin{aligned} \vartheta_z = \frac{1}{\nu\rho} \left\{ \left[jB \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} - \sigma \frac{\partial^4 h}{\partial x^4} \right] \left(\frac{hz^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right) + \right. \\ \left. + \left[jB \frac{\partial h}{\partial x} - \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right] \frac{\partial h}{\partial x} \frac{z^2}{2} \right\}. \quad (1.11) \end{aligned}$$

Из кинематического условия на свободной поверхности (1.6), с учетом выражений для компонент скорости проводящей капли (1.10) и (1.11), окончательно получим уравнение нестационарного движения свободной поверхности капли в виде

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{\nu\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{h^3}{3} \left[jB \frac{\partial h}{\partial x} - \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right] \right\}. \quad (1.12)$$

Заметим, что уравнение свободной поверхности жидкой капли в электромагнитном поле (1.12), является квазилинейным вырождающимся уравнением параболического типа.

Для симметричной относительно плоскости $x = 0$ капли уравнение (1.12) будем рассматривать вместе с условиями на границе капли $|x| = x_f$

$$h|_{x=\pm x_f} = 0, \quad \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{x=\pm x_f} = \mp \operatorname{tg} \theta_s, \quad (1.13)$$

$$\left. \left[jB \frac{\partial h}{\partial x} - \sigma \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right] \right|_{x=\pm x_f} = 0 \quad (1.14)$$

и нелокальным условием

$$\frac{d}{dt} \int_{-x_f}^{x_f} h(x, t) dx = 0. \quad (1.15)$$

Условия (1.14) и (1.15) выражают соответственно отсутствие расхода жидкости через границу капли $x = |x_f|$ и постоянство массы проводящей капли, а условия (1.13) очевидны.

С учетом симметрии профиля капиллярной поверхности относительно плоскости $x = 0$ исследуемая задача в безразмерных переменных окончательно примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left\{ u^3 \left[\kappa^2 \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} - \beta_0 \frac{\partial^3 u}{\partial \bar{x}^3} \right] \right\}, \quad (1.16)$$

$$u|_{\bar{t}=0} = u_0(\bar{x}), \quad (1.17)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} \right|_{\bar{x}=\bar{x}_f} = -1, \quad \frac{d}{dt} \int_0^{\bar{x}_f} u d\bar{x} = 0, \quad (1.18)$$

$$u|_{\bar{x}=\bar{x}_f} = 0, \quad \left[\kappa^2 \frac{\partial u}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial^3 u}{\partial \bar{x}^3} \right] \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_f} = 0, \quad (1.19)$$

где $u = h/(L \operatorname{tg} \theta_s)$, $\bar{x} = x/L$, $\bar{t} = t/T_0$, $\beta_0 = T_0 \sigma \operatorname{tg}^3 \theta_s (3\rho\nu)$, $\kappa^2(t) = jBL^2\beta_0/\sigma$, u_0 — безразмерный профиль капли в начальный момент времени.

Отметим, что аналогичная задача для частного случая, когда $jB = j_0 B_0(1 + \sin \omega \bar{t})$, где $\omega = 2\pi/T_0$ исследована в [10] методом малого параметра.

2. Определение профиля поверхности проводящей капли в электромагнитном поле

Решение задачи (1.16)–(1.19) будем искать численным методом.

С учетом специфики исследуемой задачи, сформулируем соответствующую квазилинейную задачу в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{(n+1)} u}{\partial t} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ u^3 \left[\kappa^2(t) \frac{\partial^{(n+1)} u}{\partial x} - \beta_0 \frac{\partial^3 u^{(n)}}{\partial x^3} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\left. u^{(n+1)} \right|_{t=0} = u_0(x), \quad (2.2)$$

$$\left. u^{(n+1)} \right|_{x=x_f} = 0, \quad \left. \frac{\partial u^{(n+1)}}{\partial x} \right|_{x=x_f} = -1, \quad (2.3)$$

$$\frac{d}{dt} \int_0^{x_f} u^{(n+1)} dx = 0,$$

$$\left[\kappa^2(t) \frac{\partial u^{(n)}}{\partial x} - \frac{\partial^3 u^{(n)}}{\partial x^3} \right] \Big|_{x=x_f} = 0, \quad (2.4)$$

где $u^{(n)}$ — n -ое приближение решения данной задачи.

Здесь и далее для удобства записи опущены обозначения безразмерных величин.

Введем в $\bar{\Omega} = \{0 \leq x \leq x_f, 0 \leq t \leq t_p\}$, где t_p — безразмерное расчетное время, разностную сетку $\bar{\Omega}_{h\tau} = \{x_i = ih - 0, 5h, t_j = j\tau,$

$i = \overline{0, N+1}, j = \overline{0, M}\}$ с шагами $h = x_f/N$, $\tau = t_p/M$ так, чтобы границы $x = 0$ и $x = x_f$ совпали с полупелыми индексами $x_{1/2}$ и $x_{N+1/2}$. Для индексации сеточных функций будем пользоваться определением $v_i^j = v(x_i, t_j)$.

Учитывая дивергентный характер уравнения (2.1), конечно-разностную аппроксимацию построим на основе метода баланса [12].

Интегрируя уравнение (2.1) по элементарной ячейке $w_{ij} = \{x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}, t_j \leq t \leq t_{j+1}\}$, имеем уравнение баланса

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \left[u^{(n+1)}(x, t_{j+1}) - u^{(n+1)}(x, t_j) \right] dx = \\ = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[\Gamma^{(n+1)}(x_{i-1/2}, t) - \Gamma^{(n+1)}(x_{i+1/2}, t) \right] dt - \\ - \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[\Pi^{(n)}(x_{i-1/2}, t) - \Pi^{(n)}(x_{i+1/2}, t) \right] dt, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$\Gamma^{(n+1)}(x, t) = -k \binom{(n)}{u} \frac{\partial^{(n+1)} u}{\partial x},$$

$$\Pi^{(n)}(x, t) = -\beta \binom{(n)}{u} \frac{\partial^3 u^{(n)}}{\partial x^3}, \quad \beta = \beta_0 u^3.$$

Чтобы получить разностную схему, соответствующую исходной дифференциальной задаче, заменим далее интеграл по переменной x формулой средних прямоугольников, по переменной t — формулой прямоугольников с весовым коэффициентом $0 \leq \delta \leq 1$, $\Gamma(x, t)$ — простейшей формулой аппроксимации с центральными разностями.

Имеем двухслойную шеститочечную неявную схему относительно неизвестных сеточных функций $y_i^{(n+1)j+1}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} \left(y_i^{(n+1)j+1} - y_i^{(n)j} \right) + \\ + \frac{\delta}{h} \left(\Gamma_{i+1/2}^{(n+1)j+1} - \Gamma_{i-1/2}^{(n+1)j+1} \right) = \\ = \frac{1-\delta}{h} \left(\Gamma_{i+1/2}^{(n+1)j} - \Gamma_{i-1/2}^{(n+1)j} \right) - \Phi_i, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$\Gamma_{i+1/2}^{(n+1)j} = -k \frac{y_{i+1}^{(n+1)j} - y_i^{(n+1)j}}{h},$$

$$\Phi_i = \frac{1}{h} \left(\Pi_{i+1/2}^j - \Pi_{i-1/2}^j \right),$$

$$\Pi_i^j = -\beta_i \frac{\binom{n}{y}_{i+2} - 2 \binom{n}{y}_{i+1} + 2 \binom{n}{y}_{i-1} - \binom{n}{y}_{i-2}}{2h^3}.$$

Схема (2.6) имеет относительно $\binom{n+1}{y}_i$ аппроксимацию $O(h^2 + (\delta - 1/2)\tau + \tau^2)$ при соответствующих предположениях относительно k и является консервативной. Аппроксимируя условия (2.2), (2.3) тем же методом, что и (2.6), получим

$$\binom{n+1}{y}_i = u_0(x_i), \quad 0 \leq i \leq N, \quad (2.7)$$

$$\sum_{i=1}^n \binom{n+1}{y}_{i+1} = \frac{M_0}{2}, \quad 0 \leq j \leq M, \quad (2.8)$$

$$\frac{\binom{n+1}{y}_{N+1} - \binom{n+1}{y}_N}{h} = -1, \quad 0 \leq j \leq M, \quad (2.9)$$

где $M_0 = \frac{m_0}{\rho L^3 \text{tg } \theta_s}$.

Опуская здесь и далее в последующих преобразованиях (2.6)–(2.9) номер итерации $(n+1)$ и индекс $j+1$ для неизвестной точной функции $\binom{n+1}{y}_i$, разностную задачу, соответствующую исследуемой дифференциальной задаче, окончательно запишем в виде

$$\mathbf{A}_0 \mathbf{y}_* = \mathbf{F}_0, \quad (2.10)$$

где

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -c_1 & b_1 & -a_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -c_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{N-1} & -a_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -c_N & b_N \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}_* = \{y_i\}, \quad \mathbf{F}_0 = \{f_i\}, \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

$$a_i = \begin{cases} \delta k_{i+1/2} = \delta(k_i + k_{i+1})/2, & 1 \leq i \leq N-1, \\ 0, & i = N, \end{cases}$$

$$c_i = \delta k_{i-1/2} = \frac{\delta(k_i + k_{i-1})}{2}, \quad d = \frac{h^2}{\tau},$$

$$b_i = a_i + c_i + d, \quad f_i = d \binom{n}{y}_i^j + h^2 \Phi_i + \tilde{f}_i,$$

$$\tilde{f}_i = (1 - \delta) k_{i+1/2} \left(\binom{n}{y}_{i+1}^j - \binom{n}{y}_i^j \right) - k_{i-1/2} \left(\binom{n}{y}_i^j - \binom{n}{y}_{i-1}^j \right),$$

$$f_0 = \sum_{i=1}^N \binom{n+1}{y}_i = \frac{M_0}{2}, \quad \binom{n+1}{y}_i = u_0(x_i),$$

$$1 \leq i \leq N,$$

а соотношения

$$\binom{n}{y}_0 = \binom{n}{y}_1, \quad \binom{n}{y}_{-1} = \binom{n}{y}_2, \quad \binom{n}{y}_{-2} = \binom{n}{y}_3,$$

$$\binom{n}{y}_{N+1} = -\binom{n}{y}_N,$$

$$\binom{n}{y}_{N+2} = \binom{n}{y}_{N-2} - (2 + \kappa^2) \left(\binom{n}{y}_{N-1} - \binom{n}{y}_N \right),$$

$$y_{N+3} = -(6 + \kappa^2) \binom{n}{y}_N - (3 + \kappa^2) \binom{n}{y}_{N-1} - 4h^3 \kappa^2$$

следуют из симметрии профиля свободной поверхности относительно плоскости $x = 0$ и граничного условия (2.4).

Нарушение трехдиагональности матрицы \mathbf{A}_0 верхней строкой не позволяет решать систему (2.10) обычным методом прогонки. Для ее решения можно использовать вариант, основанный на идее метода окаймления, подобно тому, как она использовалась, например в [13].

Для этого запишем систему (2.10) в виде

$$\boldsymbol{\xi} \mathbf{y} = f_0, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{A} \mathbf{y} - \boldsymbol{\eta} y_0 = \mathbf{f}, \quad (2.12)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} b_1 & -a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -c_2 & b_2 & -a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{N-1} & -a_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -c_N & b_N \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\xi} = \{1, 1, \dots, 1\}^T, \quad \boldsymbol{\eta} = \{c_1, 0, \dots, 0\}^T,$$

$$\mathbf{y} = \{y_i\}^T, \quad \mathbf{f} = \{f_i\}^T, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Легко проверить, что решение системы уравнений (2.11), (2.12) можно представить в виде

$$\mathbf{y} = \mathbf{p} + y_0 \mathbf{q}, \quad (2.13)$$

где \mathbf{p} и \mathbf{q} — решения задач

$$\mathbf{A} \mathbf{p} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{A} \mathbf{q} = \boldsymbol{\eta} \quad (2.14)$$

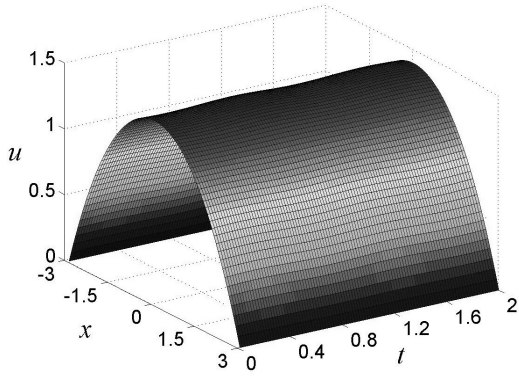


Рис. 2. Динамика профиля свободной поверхности проводящей капли в электромагнитном поле

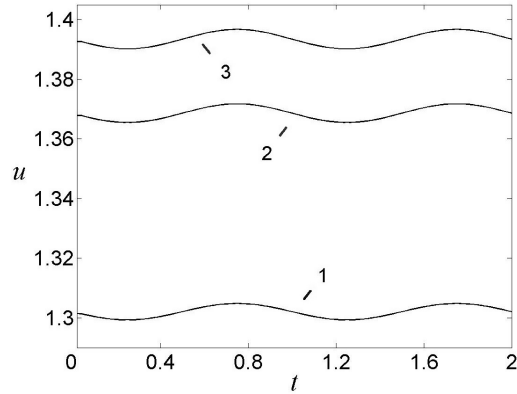


Рис. 3. Колебания поверхности капли на высотах, соответствующих абсциссам: 1 — $x = 0,72$, 2 — $x = 0,34$, 3 — $x = 0$

соответственно. Матрица \mathbf{A} является трехдиагональной, поэтому задачи (2.14) можно решать методом обычной прогонки. Алгоритм реализации следующий

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \alpha_{i+1} = \frac{a_i}{b_i - c_i \alpha_i}, \quad \alpha_1 = 0, \quad i = \overline{1, N}, \\ \leftarrow \\ \beta_{i+1} = \frac{c_i \beta_i + f}{b_i - c_i \alpha_i}, \quad \beta_1 = 0, \quad i = \overline{1, N}, \\ \leftarrow \\ \gamma_{i+1} = \frac{c_i \gamma_i}{b_i - c_i \alpha_i}, \quad \gamma_1 = 1, \quad i = \overline{1, N}, \end{array} \end{array} \right. \quad (2.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \leftarrow \\ p_i = \alpha_{i+1} p_{i+1} + \beta_{i+1}, \\ \leftarrow \\ q_i = \alpha_{i+1} q_{i+1} + \gamma_{i+1}, \\ i = N-1, N-2, \dots, 1. \end{array} \right. \quad (2.16)$$

Поскольку $\alpha_{N+1} = 0$, то формулы обратной прогонки (2.16) уже не требуют отдельного вычисления p_N и q_N . Устойчивость прогонок (2.15) и (2.16) вытекает из очевидных соотношений

$$a_i > 0, \quad c_i > 0, \quad b_i > a_i + c_i. \quad (2.17)$$

После того, как p_i, q_i будут найдены, неизвестные сеточные функции $y_i^{(n+1)}$ можно вычислять по вытекающим из (2.11) и (2.13) формулам

$$y_0^{(n+1)} = \left(\frac{M_0}{2} - \sum_{i=1}^n p_i \right) / \sum_{i=1}^n q_i, \quad (2.18)$$

$$y_i^{(n+1)} = p_i + y_0^{(n+1)} q_i, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.19)$$

Легко показать, что из соотношений (2.15)–(2.17) следует неравенство $0 < q_i < 1$,

$i = \overline{1, N}$, следовательно, счет по формуле (2.19) устойчив.

Порядок решения задачи организуется тогда следующим образом. При известном нулевом приближении решения задачи $y_i^{(0)}$ ($y_i^0 = u_0(x_i)$) вычисляются правые части и коэффициенты a_i, b_i, c_i , а затем по формулам (2.15), (2.16), (2.18) и (2.19) рассчитывается первое приближение $y_i^{(1)}$. Подобная процедура вычисления a_i, b_i, c_i и нового последующего приближения $y_i^{(n+1)}$ продолжается до тех пор, пока итерации не сойдутся по какому-либо критерию, например, пока не выполнится условие

$$\max_{1 \leq i \leq N} \left| y_i^{(n+1)} - y_i^{(n)} \right| < \varepsilon,$$

где ε — требуемая точность решения задачи.

3. Анализ результатов

На основе разработанного алгоритма численной реализации математической модели исследуемого физического процесса был проведен вычислительный эксперимент, некоторые результаты которого в безразмерных величинах приводятся ниже. Вычисления производились в пакете MATLAB для малой капли олова при температуре 600°K и следующих значениях параметров системы: $L = 10^{-4}$ м, $B_0 = 0,1$ Тл, $j_0 = 10^7$ А/м², $T_0 = 10^{-2}$ с, $\kappa^2(t) = 0,15\pi^{-1}(1 + 2\pi t)$, $x_f = 3$, $\beta_0 = 3/2\pi$, $\varepsilon = 10^{-5}$.

Колебания поверхности капли под действием осциллирующей поперечной электромагнитной силы представлены на рис. 2.

Расчеты показывают, что амплитуда колебания свободной поверхности проводящей капли под действием осциллирующей электромагнитной силы растет с высотой, достигая наибольшего значения в апексе (рис. 3). В точках с абсциссами $x_1 = 0,72$, $x_2 = 0,34$, $x_3 = 0$, были получены, например, следующие значения безразмерных амплитуд: $A_1 = 2,75 \cdot 10^{-3}$, $A_2 = 3,12 \cdot 10^{-3}$, $A_3 = 3,26 \cdot 10^{-3}$ соответственно.

Проведенные расчеты позволяют также утверждать, что интенсивность движения жидкости в капле существенно зависит от значения краевого угла смачивания, а взаимодействие переменного тока, проходящего внутри капли, с внешним магнитным полем активизирует тепло-массообменные процессы в трехфазной системе. При этом, изменяя величину и направление векторов \mathbf{V} и \mathbf{j} можно с использованием электромагнитокапиллярных эффектов [14,15] дистанционно управлять процессами смачивания и растекания, которые сопутствуют многим современным нанотехнологиям.

Литература

1. Сумм Б. Д., Иванова Н. И. Объекты и методы коллоидной химии и нанохимии // Успехи химии. 2000. 69(1). С. 955–138.
2. Де Жен П. Ж. Смачивание: Статика и динамика // Успехи физ. наук. 1987. Т. 51. №4. С. 619–681.
3. Фейгин Е. А., Рауд Э. А. Применение расплавленных сред в процессах нефтепереработки и нефтехимии. М.: ЦНИИТЭИнефтехим, 1983. 104 с.
4. Фейгин Е. А., Рауд Э. А., Романова Е. Г. и др. Перспективы использования ядерных реакторов для энергообеспечения нефтеперерабатывающих заводов // Химия и технология топлив и масел. 1984. Вып. 12. С. 2–7.
5. Русанов А. И., Прохоров В. А. Межфазная тензометрия. СПб.: Химия, 1994. 440 с.
6. Paradis P. F., Ishikawa T., Yoda S. Non-contact Measurements of the Thermophysical Properties of Hafnium – 3 mass % Zirconium at High Temperature // Jnt. J. of Thermophysics. 2003. Vol. 24. P. 239–258.
7. Попель С. И. Поверхностные явления в расплавах. М.: Металлургия, 1994. 440 с.
8. Дерягин Б. В., Чураев Н. В., Муллер В. М. Поверхностные силы. М.: Наука, 1985. 399 с.
9. Dussan V. E. B. On the Spreading of Liquids on Solid Surfaces: Static and Dynamic Contact Lines // Ann. Rev. Fluid Mech. 1979. Vol. 11. P. 371–400.
10. Романов А. С. О движении малой капли частично смачивающей жидкости под действием переменного электрического тока // Инж.-физ. журнал. 1989. Т. 56. №2. С. 262–266.
11. Ватажгин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах. М.: Наука, 1970. 672 с.
12. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.
13. Канчуков В. З., Шхануков М. Х. Краевые задачи для модифицированного уравнения влагопереноса и сеточные методы их решения // Дифференциальные уравнения. 1979. Т. 15. №1. С. 68–73.
14. А.с. 942917 СССР. 1982. МПК У 01726/00. Способ управления площадью растекания припоя по поверхности / Карамурзов Б.С., Хоконов Х.Б., Хатажуков А.С.
15. Алчагиров Б. Б., Хоконов Х. Б. Смачиваемость поверхностей твердых тел расплавами щелочных металлов и сплавов с их участием. Теория и методы исследований // Теплофизика высоких температур. 1994. Т. 32. №4. С. 590–626.

Статья поступила 24 июня 2007 г.

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, г. Нальчик

© Канчуков В. З., Карамурзов Б. С., Лесев В. Н., 2007