

УДК 539.3

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ЛОКАЛЬНЫМИ НАГРУЗКАМИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ¹

Старовойтов Э. И.², Доровская Е. П.³, Старовойтов С. А.⁴

CYLINDRICAL BENDING BY LOCAL LOADS OF A RECTANGULAR THREE-LAYER PLATE
ON THE ELASTIC BASE

Starovoitov E. I., Dorovskaya E. P., Starovoitov S. A.

Cylindrical bending by local loads of an elastic rectangular three-layer plate with rigid filler resting upon an elastic base is considered. To describe kinematics of a pack of the plate asymmetrical over thickness, the hypotheses of the broken normal are accepted. The reaction of the base is described by the Winkler model. A system of equilibrium equations has been derived and its accurate solution is given in terms of displacements. The solution has been verified numerically.

Введение. В последнее время значительное распространение получили трехслойные конструкции, которые состоят из двух несущих слоев и заполнителя, обеспечивающего их совместную работу. В условиях деформации изгиба трехслойные конструкции оказываются наиболее рациональными, то есть близкими к оптимальным с точки зрения обеспечения минимума весовых показателей при заданных ограничениях на прочность и жесткость.

Статическое и динамическое деформирование трехслойных элементов конструкций, не связанных с упругим основанием, исследовано в работах [1–7]. Краевая задача для трехслойной кольцевой пластины, покоящейся на упругом основании, решена в [8]. Вывод общих уравнений равновесия для несимметричной по толщине упругой трехслойной прямоугольной пластины с жестким заполнителем, покоящейся на упругом основании, приведен в [9], в настоящей работе рассмотрен ее цилиндрический изгиб локальными нагрузками.

Постановка задачи дается в прямоугольной системе координат x, y, z , связанной со срединной плоскостью заполнителя. В дальнейшем считаем пластину вытянутой

вдоль оси y . Действующие на пластину внешние распределенные поверхностные нагрузки $q(x)$, $p(x)$ и реакция основания $q_r(x)$ не зависят от координаты y (рис. 1, а, б). В этом случае прогибы пластины $w = w(x)$ образуют цилиндрическую поверхность. Через h_k ($k = 1, 2, 3$) обозначена толщина k -го слоя ($h_3 = 2c$), l — ширина пластины вдоль оси ox .

Для описания кинематики пакета приняты гипотезы ломаной нормали: в несущих слоях справедливы гипотезы Кирхгофа, в несжимаемом по толщине заполнителе нормаль остается прямолинейной, не изменяет своей длины, но поворачивается на некоторый дополнительный угол, составляющий с координатной осью x величину $\psi(x)$. Реакция основания q_r соответствует модели Винклера

$$q_r = -\kappa w, \quad (1)$$

где κ — коэффициент жесткости основания, знак минус указывает на то, что реакция направлена в сторону, противоположную прогибу w .

На контуре пластины располагается наличие жесткая диафрагма, препятствующая относительному сдвигу слоев. Деформации

¹Работа выполнена при поддержке БРФФИ (Ф07М–040).

²Старовойтов Эдуард Иванович, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой «Строительная механика» Белорусского государственного университета транспорта.

³Доровская Екатерина Петровна, аспирант кафедры «Строительная механика» Белорусского государственного университета транспорта.

⁴Старовойтов Сергей Анатольевич, канд. техн. наук, ассистент кафедры «Строительная механика» Белорусского государственного университета транспорта.

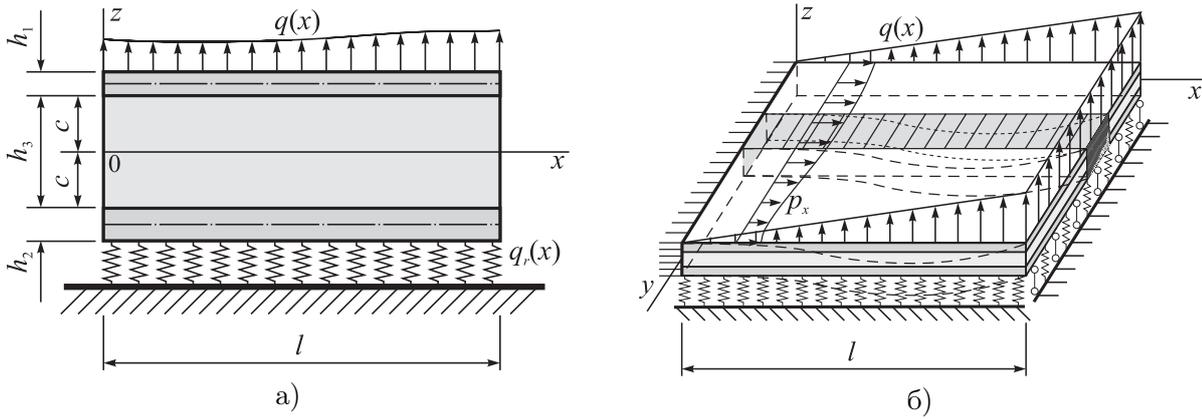


Рис. 1. Расчетная схема трехслойной прямоугольной пластины на упругом основании

предполагаются малыми. Используя введенные геометрические гипотезы, продольные перемещения в слоях $u^{(k)}$ можно выразить через три искомые функции u (относительное перемещение срединной поверхности заполнителя вдоль оси x), ψ , w :

$$\begin{aligned} u^{(1)} &= u + c\psi - zw_{,x}, & (c \leq z \leq c + h_1); \\ u^{(3)} &= u_x + z\psi - zw_{,x}, & (-c \leq z \leq c); \\ u^{(2)} &= u - c\psi - zw_{,x}, & (-c - h_2 \leq z \leq -c), \end{aligned} \quad (2)$$

где z — координата рассматриваемого волокна, запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Компоненты тензора деформаций выражаются через искомые функции с помощью выражений для перемещений в слоях (2) и соотношений Коши для малых деформаций.

Внутренние усилия и моменты в слоях вводятся соотношениями

$$\begin{aligned} N_{xx}^{(k)} &= \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} dz, \\ Q_x &= \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} dz, & M_{xx}^{(k)} &= \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} z dz, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\sigma_{xx}^{(k)}$, $\sigma_{xz}^{(3)}$ — компоненты тензора напряжений; интегралы берутся по толщине k -го слоя.

Уравнения и силовые граничные условия равновесия следуют из принципа возможных перемещений Лагранжа

$$\begin{aligned} \delta A + \delta W &= 0, & (4) \\ \delta A &= \iint_S (p_x \delta u_x + p_y \delta u_y + (q + q_r) \delta w) dS, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta W &= \iint_S \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} \delta \varepsilon_{xx}^{(k)} dz + \right. \\ &\quad \left. + \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \delta \psi dz \right] dx dy. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь δA — вариация работы внешней поверхностной нагрузки и реакции основания, δW — вариация работы внутренних напряжений.

Для связи напряжений и деформаций в слоях используем соотношения закона Гука в девиаторно-шаровой форме

$$\begin{aligned} s_{ij}^{(k)} &= 2G_k \varepsilon_{ij}^{(k)}, & \sigma^{(k)} &= 3K_k \varepsilon^{(k)}, & (6) \\ k &= 1, 2, 3; & i, j &= x, y, z, \end{aligned}$$

где G_k , K_k — модули сдвиговой и объемной деформации, $s_{ij}^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$ — девиаторная и шаровая части тензора напряжений, $\varepsilon_{ij}^{(k)}$, $\varepsilon^{(k)}$ — девиаторная и шаровая части тензора деформаций.

Выразив вариации деформаций в (5) через три искомые функции u , ψ , w и проведя интегрирование по толщине слоев, получим из (4) уравнения равновесия в усилиях при цилиндрическом изгибе прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании:

$$\begin{aligned} N_{xx,x} &= -p_x, & H_{xx,x} - Q_x &= 0, & (7) \\ M_{xx,xx} &= -(q + q_r), \end{aligned}$$

где обобщенные внутренние усилия и моменты выражаются через внутренние усилия (3)

$$\begin{aligned} N_{xx} &= \sum_{k=1}^3 N_{xx}^{(k)}, & M_{xx} &= \sum_{k=1}^3 M_{xx}^{(k)}, & (8) \\ H_{xx} &= c(N_{xx}^{(1)} - N_{xx}^{(2)}) + M_{xx}^{(3)}. \end{aligned}$$

Конкретные краевые задачи для рассматриваемой трехслойной пластины, связанной с упругим основанием, предполагается решать в перемещениях, поэтому преобразуем систему (7), выразив все входящие в нее внутренние усилия (8) и реакцию основания (1) через искомые перемещения u , ψ , w при помощи (6). В результате

$$\begin{aligned} a_1 u_{,xx} + a_2 \psi_{,xx} - a_3 w_{,xxx} &= p, \\ a_2 u_{,xx} + a_4 \psi_{,xx} - a_6 w_{,xxx} - a_5 \psi &= 0, \\ a_3 u_{,xxx} + a_6 \psi_{,xxx} - a_7 w_{,xxxx} + \kappa b w &= q, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\begin{aligned} a_1 &= h_1 \eta_1 + h_2 \eta_2 + 2c \eta_3, \\ a_2 &= c [h_1 \eta_1 - h_2 \eta_2]; \\ a_3 &= h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) \eta_1 - h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) \eta_2, \\ a_4 &= c^2 \left[h_1 \eta_1 + h_2 \eta_2 + \frac{2}{3} c \eta_3 \right], \quad a_5 = 2G_3 c; \\ a_6 &= c \left(h_1 \left(c + \frac{1}{2} h_1 \right) \eta_1 + \right. \\ &\quad \left. + h_2 \left(c + \frac{1}{2} h_2 \right) \eta_2 + \frac{2}{3} c^2 \eta_3 \right), \\ a_7 &= \eta_1 h_1 \left(c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) + \\ &\quad + \eta_2 h_2 \left(c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) + \frac{2}{3} c^3 \eta_3; \\ \eta_1 &= K_1 + \frac{4}{3} G_1, \quad \eta_2 = K_2 + \frac{4}{3} G_2, \\ \eta_3 &= K_3 + \frac{4}{3} G_3. \end{aligned}$$

Отметим, что система (9) следует из общей системы уравнений равновесия для трехслойной прямоугольной пластины на упругом основании, полученной в [6] при произвольной нагрузке, если считать решение не зависящее от координаты y . Она также описывает деформирование трехслойного стержня на упругом основании [10].

После стандартных преобразований из системы (9) можно выделить неоднородное линейное дифференциальное уравнение шестого

порядка с постоянными коэффициентами относительно прогиба пластины

$$w_{,xxxxx} + \alpha_1 w_{,xxxx} + \alpha_2 w_{,xx} + \alpha_3 w = f(x), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha_4 q + \alpha_5 q_{,xx} + \alpha_6 p_{,x} + \alpha_7 p_{,xxx}, \\ \alpha_1 &= a_1 a_5 \chi_3 / \chi_4, \quad \alpha_2 = -a_1 \kappa \chi_1 / \chi_4, \\ \alpha_3 &= a_1^2 a_5 \kappa / \chi_4, \quad \alpha_4 = \alpha_3 / \kappa, \\ \alpha_5 &= \alpha_2 / \kappa, \quad \alpha_6 = -a_3 \alpha_3 / a_1 \kappa, \\ \alpha_7 &= (a_3 \chi_1 - a_2 \chi_2) / \chi_4, \\ \chi_1 &= a_1 a_4 - a_2^2, \quad \chi_2 = (a_1 a_6 - a_2 a_3)^2, \\ \chi_3 &= a_1 a_7 - a_3^2, \quad \chi_4 = \chi_2 - \chi_1 \chi_3. \end{aligned}$$

Решение уравнения (10) можно представить в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения $w_0(x)$ и частного решения $w_p(x)$ неоднородного уравнения. Для нахождения $w_0(x)$ выпишем соответствующее характеристическое уравнение

$$\lambda^6 + \alpha_1 \lambda^4 + \alpha_2 \lambda^2 + \alpha_3 = 0. \quad (11)$$

Положим $\lambda^2 = \xi$. Тогда (11) примет вид

$$\xi^3 + \alpha_1 \xi^2 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 = 0. \quad (12)$$

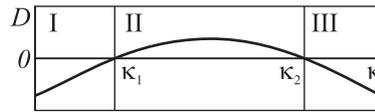
Дискриминантом уравнения (12) является

$$D = -4m_1^3 - 27m_2^2, \quad (13)$$

где $m_1 = \alpha_2 - \frac{1}{3} \alpha_1^2$; $m_2 = \frac{2}{27} \alpha_1^3 - \frac{1}{3} \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_3$.

Определить аналитическое значение дискриминанта в общем случае не представляется возможным. Поэтому в рамках принятой модели проведем численный анализ (13) для реальных геометрических и механических параметров материалов слоев в зависимости от жесткости упругого основания. Если принять в качестве материала несущих слоев дюралюминий (сплав Д16Т), наполнитель — политетрафторэтилен (ПТФЭ), положить относительные толщины несущих слоев и наполнителя равными $h_1/l = h_2/l = 0,02$; $h_3/l = 2c/l = 0,2$, то при $l = 1$ получим, что дискриминант (13) равен нулю при значениях коэффициента постели $\kappa_1 = 31$ и $\kappa_2 = 640$ (МПа/м). Соответствующий график показан на рис. 2.

Следовательно, в областях I и III дискриминант отрицателен и уравнение (11) имеет

Рис. 2. Изменение дискриминанта D в зависимости от коэффициента постели κ

два комплексно сопряженных корня и один действительный корень. Если значение дискриминанта находится в области II, то все три корня будут действительны.

Необходимо отметить, что границы областей зависят от толщин и материалов слоев пластины, однако наибольшее влияние на них оказывает жесткость упругого основания.

Выделим три типа оснований в зависимости от значения их жесткости:

I — при $0 < \kappa < \kappa_1$ — легкие основания;

II — при $\kappa_1 < \kappa < \kappa_2$ — основания средней жесткости;

III — при $\kappa > \kappa_2$ — жесткие основания (основания большой жесткости).

Таким образом, аналитический вид решений задач о деформировании рассматриваемой трехслойной пластины в указанных областях будет различаться, поэтому рассмотрим их в отдельности.

Решение краевой задачи. При основании малой или большой жесткости значения дискриминанта (13) находятся в области I или III (рис. 2). Корни кубического уравнения (12) можно определить по формуле Кардано

$$\xi = m_3 + m_4 - \frac{1}{3}\alpha_1, \quad (14)$$

$$m_3 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}m_2 + \sqrt{m_5}},$$

$$m_4 = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}m_2 - \sqrt{m_5}},$$

$$m_5 = \frac{1}{27}m_1^3 + \frac{1}{4}m_2^2.$$

В выражениях для m_3, m_4 каждый кубический корень дает три значения, однако произвольно комбинировать их нельзя: для заданного значения m_3 , необходимо выбирать значение m_4 так, чтобы удовлетворялось условие

$$m_3 m_4 = -m_1/3.$$

Под знаками квадратных радикалов, входящих в m_3, m_4 , находятся положительные числа. Каждый кубический корень даст два

комплексно-сопряженных и одно действительное значение. С учетом указанного, искомые корни (14) можно записать в виде

$$\xi_1 = m_3 + m_4 - \frac{1}{3}\alpha_1,$$

$$\xi_2 = -\frac{1}{2}(m_3 + m_4) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(m_3 - m_4) - \frac{1}{3}\alpha_1,$$

$$\xi_3 = -\frac{1}{2}(m_3 + m_4) - \frac{i\sqrt{3}}{2}(m_3 - m_4) - \frac{1}{3}\alpha_1.$$

Дальнейший численный анализ показал, что в рамках принятой модели трехслойной пластины первый корень $\xi_1 > 0$.

Для получения корней уравнения шестого порядка (11) перейдем к тригонометрической форме записи комплексных чисел и извлечем квадратные корни из ξ_1, ξ_2, ξ_3

$$\begin{aligned} \lambda_1 = -\lambda_2 &= \sqrt{\xi_{21}}, \\ \lambda_3 = -\lambda_4 &= \beta_1 + i\beta_2, \\ \lambda_5 = -\lambda_6 &= \beta_1 - i\beta_2, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$r_1 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}(m_3 + m_4) + \frac{1}{3}\alpha_1\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(m_3 - m_4)\right)^2},$$

$$\varphi_1 = \arctg(\beta_3),$$

$$\beta_1 = \sqrt{r_1} \cos(\varphi_1/2), \quad \beta_2 = \sqrt{r_1} \sin(\varphi_1/2),$$

$$\beta_3 = \sqrt{3}m_3 + m_4 + \frac{2}{3}\alpha_1/(3m_4 - 3m_3).$$

Тогда в случае основания малой или большой жесткости, общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению для прогиба (10), с учетом (15) принимает вид

$$w_0(x) = \sum_{k=1}^6 C_k w_k(x). \quad (16)$$

Здесь $w_k(x)$ — система фундаментальных решений

$$w_1(x) = e^{\lambda_1 x}, \quad w_2(x) = e^{-\lambda_1 x},$$

$$w_3(x) = e^{\beta_1 x} \cos(\beta_2 x), \quad w_4(x) = e^{\beta_1 x} \sin(\beta_2 x),$$

$$w_5(x) = e^{-\beta_1 x} \cos(\beta_2 x),$$

$$w_6(x) = -e^{-\beta_1 x} \sin(\beta_2 x). \quad (17)$$

Окончательно, общее решение (10) имеет вид

$$w(x) = w_0(x) + w_p(x).$$

Используя уравнения (9), находим

$$\begin{aligned} \psi(x) = & \gamma_1 C_1 w_1 - \gamma_1 C_2 w_2 + \\ & + C_3 (\gamma_2 w_3 + \gamma_3 w_4) + C_4 (\gamma_2 w_4 - \gamma_3 w_3) + \\ & + C_5 (-\gamma_2 w_5 - \gamma_3 w_6) + C_6 (-\gamma_2 w_6 + \gamma_3 w_5) + g_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x) = & \gamma_4 C_1 w_1 - \gamma_4 C_2 w_2 + \\ & + C_3 (\gamma_5 w_3 + \gamma_6 w_4) + C_4 (\gamma_5 w_4 - \gamma_6 w_3) + \\ & + C_5 (-\gamma_5 w_5 - \gamma_6 w_6) + C_6 (-\gamma_5 w_6 + \gamma_6 w_5) + \\ & + b_5 g_1 + g_2, \end{aligned} \quad (18)$$

где C_k — константы интегрирования, определяемые из граничных условий ($k = 1, 2, \dots, 9$); $w_k = w_k(x)$.

$$\gamma_1 = b_1 \lambda_1 + b_2 / \lambda_2;$$

$$\gamma_2 = b_1 (\beta_1^3 - 3\beta_1 \beta_2^2) + b_2 \beta_1 / \chi_6,$$

$$\gamma_3 = b_1 (\beta_2^3 - 3\beta_1^2 \beta_2) + b_2 \beta_2 / \chi_6;$$

$$\gamma_4 = b_5 \gamma_1 + b_5 \lambda_1; \quad \gamma_5 = b_5 \gamma_2 + b_6 \beta_1;$$

$$\gamma_6 = b_5 \gamma_3 - b_6 \beta_2;$$

$$b_1 = -\chi_4 / (a_1 a_5 \chi_5), \quad b_2 = \kappa \chi_1 / a_5 \chi_5,$$

$$b_3 = -b_2 / \kappa, \quad b_4 = a_3 b_2 / a_1 \kappa - a_2 / a_1 a_5,$$

$$b_5 = -a_2 / a_1; \quad b_6 = a_3 / a_1; \quad b_7 = 1 / a_1;$$

$$\chi_5 = a_1 a_6 - a_2 a_3; \quad \chi_6 = \beta_1^2 + \beta_2^2;$$

$$\begin{aligned} g_1 = & b_1 w_{p,xxx} + b_2 \int w_p dx + \\ & + b_3 \int q dx + b_4 p + C_7; \end{aligned}$$

$$g_2 = b_6 w_{p,x} + b_7 \iint p dx dx + C_8 x + C_9.$$

Краевая задача по определению перемещений $w(x)$, $\psi(x)$ и $u(x)$ замыкается присоединением граничных условий на торцах пластины. При шарнирном опирании обоих торцов пластины $x = 0, l$ имеем

$$w(x) = \psi(x) = u(x) = M(x) = 0. \quad (19)$$

Для заземленной по двум кромкам пластины граничными условиями являются

$$w(x) = \psi(x) = u(x) = H(x) = 0. \quad (20)$$

Для определения девяти констант интегрирования C_k во всех случаях имеем только восемь граничных условий (по четыре на каждом торце пластины). Однако при решении системы (9) дополнительно дифференцировалось ее второе уравнение, что могло привести к появлению лишних решений, не удовлетворяющих исходным уравнениям равновесия. Поэтому проведем проверку решений (18), подставив их в одну из исходных систем уравнений равновесия и потребовав тождественного удовлетворения полученных выражений. В результате имеем дополнительное условие для константы C_7

$$\begin{aligned} C_7 = & (b_1 w_{p,xxxx} + b_2 w_{p,x} + b_3 q_{,x} + b_4 p_{,xx}) \times \\ & \times \chi_1 / (a_1 a_5) - \chi_5 w_{p,xxx} / (a_1 a_5) - b_1 w_{p,xxx} - \\ & - b_2 \int w_p dx - b_3 \int q dx - b_4 p - a_2 p / (a_1 a_5). \end{aligned} \quad (21)$$

В дальнейшем ослабляем это требование и предполагаем его интегральное выполнение.

Частное решение $w_p(x)$ строится при помощи ядра Коши $K(x, s)$

$$w_p(x) = \int_0^x K(x, s) f(s) ds. \quad (22)$$

$$K(x, s) = \sum_{k=1}^6 C_k(s) w_k(x), \quad (23)$$

где $w_k(x)$ — система фундаментальных решений.

Функции $C_k(s)$ не являются константами интегрирования, а определяются из системы линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{k=1}^6 C_k(s) w_k^{(n)}(s) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, 5, \quad (24)$$

где $w_k^{(n)}$ — n -я производная k -го фундаментального решения (17) ($k = 1, \dots, 6$).

Подставляя производные фундаментальных решений в (24) и решая полученную систему уравнений, найдем

$$\begin{aligned} C_1(s) = & e^{-\lambda_1 s} / d_{11}, \quad C_2(s) = -e^{-\lambda_1 s} / d_{11}, \\ C_3(s) = & [\cos(\beta_2^2 s) d_{13} + \sin(\beta_2^2 s) d_{14}] f_1, \\ C_4(s) = & -[\cos(\beta_2 s) d_{15} + \sin(\beta_2 s) d_{16}] f_1, \\ C_5(s) = & [\cos(\beta_2 s) d_{16} + \sin(\beta_2 s) d_{15}] f_2, \\ C_6(s) = & [\cos(\beta_2 s) d_{14} + \sin(\beta_2 s) d_{13}] f_2, \end{aligned} \quad (25)$$

Здесь

$$d_{11} = 2((\beta_1^2 + \beta_2^2) + \lambda_1^2(\lambda_1^2 + 2(\beta_2^2 - \beta_1^2)))\lambda_1;$$

$$d_{12} = 4(\beta_2^6 + \beta_1^6 + \beta_1^4(3\beta_2^2 - 2\lambda_1^2) + \beta_1^2(3\beta_2^4 + \lambda_1^4) + \lambda_1^2(\lambda_1^2\beta_2^2 + 2\beta_2^4))\beta_1\beta_2;$$

$$d_{13} = \beta_2(\lambda_1^2 - 3\beta_1^2 + \beta_2^2);$$

$$d_{14} = \beta_1(\lambda_1^2 + 3\beta_2^2 - \beta_1^2);$$

$$d_{15} = \beta_1(3\beta_2^2 - \beta_1^2 - \lambda_1^2);$$

$$d_{16} = \beta_2(3\beta_1^2 - \beta_2^2 - \lambda_1^2);$$

$$f_1 = e^{-\beta_1 s}/d_{12}; \quad f_2 = e^{\beta_1 s}/d_{12}.$$

Подставив (17) и (25) в (23), определим ядро Коши для случая оснований малой или большой жесткости

$$\begin{aligned} K(x, s) = & e^{-\lambda_1 s} e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_1 s} e^{-\lambda_1 x} / d_{11} + \\ & + \left([\cos(\beta_2 s) d_{13} + \sin(\beta_2 s) d_{14}] f_1 e^{\beta_1 x} + \right. \\ & + [\cos(\beta_2 s) d_{16} + \sin(\beta_2 s) d_{15}] f_2 e^{-\beta_1 x} \left. \right) \times \\ & \times \cos(\beta_2 x) - ([\cos(\beta_2 s) d_{15} + \\ & + \sin(\beta_2 s) d_{16}] f_1 e^{\beta_1 x} + [\cos(\beta_2 s) d_{14} + \\ & + \sin(\beta_2 s) d_{13}] f_2 e^{-\beta_1 x}) \sin(\beta_2 x). \quad (26) \end{aligned}$$

Частное решение (22) и ядро Коши (26) удовлетворяют условиям

$$w_p^{(n)}(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 5,$$

$$K^{(n)}(s, s) = 0, \quad n = 0, 1, \dots, 4,$$

$$K^{(5)}(s, s) = 1. \quad (27)$$

Достоинством решения в виде (22) является то, что оно содержит определенный интеграл и включает нагрузку в явном виде, которая при этом не входит в ядро Коши (26). Следовательно, нагрузка может приниматься как непрерывной, так и локальной.

Для основания средней жесткости значения дискриминанта (13) находятся в области II (рис. 2). Корни уравнения (12) по-прежнему определяются формулой (14). В этом случае под знаками квадратных корней, входящих в m_3 , m_4 , находятся отрицательные числа, следовательно, выражения под кубическими корнями являются комплексно-сопряженными величинами. Представив в тригонометрической форме подкоренные выражения и используя

формулу Муавра для извлечения корней n -й степени из комплексных чисел, получим три возможные значения параметров m_3 и m_4

$$m_{31} = \sqrt[3]{r_2} [\cos(\varphi_2/3) + i \sin(\varphi_2/3)],$$

$$m_{32} = \sqrt[3]{r_2} [\cos(\frac{1}{3}(\varphi_2 + 2\pi)) + i \sin(\frac{1}{3}(\varphi_2 + 2\pi))],$$

$$m_{33} = \sqrt[3]{r_2} [\cos(\frac{1}{3}(\varphi_2 + 4\pi)) + i \sin(\frac{1}{3}(\varphi_2 + 4\pi))],$$

$$m_{41} = \sqrt[3]{r_2} [\cos(\varphi_2/3) - i \sin(\varphi_2/3)],$$

$$m_{42} = \sqrt[3]{r_2} [\cos(\frac{1}{3}(2\pi - \varphi_2)) + i \sin(\frac{1}{3}(2\pi - \varphi_2))],$$

$$m_{43} = \sqrt[3]{r_2} [\cos(\frac{1}{3}(4\pi - \varphi_2)) + i \sin(\frac{1}{3}(4\pi - \varphi_2))],$$

где

$$r_2 = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}m_2\right)^2 + \left(\sqrt{\left|\frac{1}{27}m_1^3 + \frac{1}{4}m_2^2\right|}\right)^2},$$

$$\varphi_2 = \arctg\left(-\frac{1}{2}m_2 / \left(\sqrt{\left|\frac{1}{27}m_1^3 + \frac{1}{4}m_2^2\right|}\right)\right).$$

В этом случае корни уравнения (12) будут вещественны:

$$\xi_1 = 2 \sqrt[3]{r_2} \cos(\varphi_2/3) - \alpha_1/3;$$

$$\xi_2 = -\sqrt[3]{r_2} \left(\cos(\varphi_2/3) + \sqrt{3} \sin(\varphi_2/3) \right) - \alpha_1/3;$$

$$\xi_3 = -\sqrt[3]{r_2} \left(\cos(\varphi_2/3) - \sqrt{3} \sin(\varphi_2/3) \right) - \alpha_1/3.$$

Численный анализ показал, что $\xi_1 > 0$, $\xi_2 > 0$, $\xi_3 > 0$ для реальных параметров системы «трехслойная пластина — упругое основание». Следовательно, корни характеристического уравнения (11) действительны и различны

$$\lambda_1 = -\lambda_2 = \sqrt{\xi_1}, \quad \lambda_3 = -\lambda_4 = \sqrt{\xi_2},$$

$$\lambda_5 = -\lambda_6 = \sqrt{\xi_3}.$$

В результате цилиндрический изгиб трехслойной пластины на упругом основании средней

жесткости описывается следующими перемещениями:

$$w(x) = \sum_{k=1}^6 C_k w_k + w_p(x),$$

$$\psi(x) = a_{11}(C_1 w_1 - C_2 w_2) + a_{12}(C_3 w_3 - C_4 w_4) + a_{13}(C_5 w_5 - C_6 w_6) + g_1,$$

$$u(x) = a_{21}(C_1 w_1 - C_2 w_2) + a_{22}(C_3 w_3 - C_4 w_4) + a_{23}(C_5 w_5 - C_6 w_6) + b_5 g_1 + g_2. \quad (28)$$

Фундаментальная система решений в этом случае будет

$$\begin{aligned} w_1(x) &= e^{\lambda_1 x}, & w_2(x) &= e^{-\lambda_1 x}, \\ w_3(x) &= e^{\lambda_3 x}, & w_4(x) &= e^{-\lambda_3 x}, \\ w_5(x) &= e^{\lambda_5 x}, & w_6(x) &= e^{-\lambda_5 x}. \end{aligned}$$

Принятые обозначения

$$\begin{aligned} a_{11} &= b_1 \lambda_1^3 + b_2 / \lambda_1, & a_{12} &= b_1 \lambda_3^3 + b_2 / \lambda_3, \\ a_{13} &= b_1 \lambda_5^3 + b_2 / \lambda_5, \\ a_{21} &= b_5 a_{11} + b_6 \lambda_1, & a_{22} &= b_5 a_{12} + b_6 \lambda_3, \\ a_{23} &= b_5 a_{13} + b_6 \lambda_5. \end{aligned}$$

Константы интегрирования $C_k(s)$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений типа (24)

Аналитический вид частного решения уравнения (10) принимается в виде (22).

В результате, с учетом (27) ядро Коши имеет вид

$$\begin{aligned} K(x, s) &= e^{-\lambda_1 s} e^{\lambda_1 x} / d_{17} - e^{\lambda_1 s} e^{-\lambda_1 x} / d_{17} - \\ &- e^{-\lambda_3 s} e^{\lambda_3 x} / d_{18} + e^{\lambda_3 s} e^{-\lambda_3 x} / d_{18} + \\ &+ e^{-\lambda_5 s} e^{\lambda_5 x} / d_{19} - e^{\lambda_5 s} e^{-\lambda_5 x} / d_{19}, \quad (29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{17} &= 2(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_1^2 - \lambda_5^2)\lambda_1, \\ d_{18} &= 2(\lambda_1^2 - \lambda_3^2)(\lambda_3^2 - \lambda_5^2)\lambda_3, \\ d_{19} &= 2(\lambda_1^2 - \lambda_5^2)(\lambda_3^2 - \lambda_5^2)\lambda_5. \end{aligned}$$

Таким образом, цилиндрический изгиб упругой трехслойной прямоугольной пластины на деформируемом основании *малой* или *высокой жесткости* описывается выражениями для перемещений (18) с частным решением

(22) и ядром Коши (26). При *средней жесткости* основания — выражениями (28) с частным решением (22), (29). Константы интегрирования определяются из условий (19)–(21).

Численные результаты. Рассмотрим изгиб пластины под действием *локально распределенной* поверхностной нагрузки

$$q(x) = q_0 H_0(a - x), \quad (30)$$

где q_0 — интенсивность нагрузки; $H_0(x)$ — функция Хевисайда нулевого порядка.

Тогда правая часть уравнения (10) в соответствии с (30) принимает вид

$$f(x) = \alpha_4 q(x) + \alpha_5 q_{,xx}(x). \quad (31)$$

Частное решение (22) представим в виде

$$\begin{aligned} w_p(x) &= \int_0^x K(x, s) \times \\ &\times (\alpha_4 q(s) + \alpha_5 q_{,xx}(s)) ds. \quad (32) \end{aligned}$$

Если использовать ядро Коши (29) и выражение для нагрузки (31), получим и частное решение w_p^{II} для пластины на основании *средней жесткости*

$$\begin{aligned} w_p^{\text{II}} &= -e^{\lambda_1 x} d_{21} \left((e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_1 a}) H_0(a - x) + \right. \\ &+ e^{-\lambda_1 a} - 1 \left. \right) - e^{-\lambda_1 x} d_{21} \left((e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_1 a}) H_0(a - x) + \right. \\ &+ e^{\lambda_1 a} - 1 \left. \right) + e^{\lambda_3 x} d_{22} \left((e^{-\lambda_3 x} - e^{-\lambda_3 a}) H_0(a - x) + \right. \\ &+ e^{-\lambda_3 a} - 1 \left. \right) + e^{-\lambda_3 x} d_{22} \left((e^{\lambda_3 x} - e^{\lambda_3 a}) H_0(a - x) + \right. \\ &+ e^{\lambda_3 a} - 1 \left. \right) - e^{\lambda_5 x} d_{23} \left((e^{-\lambda_5 x} - e^{-\lambda_5 a}) H_0(a - x) + \right. \\ &+ e^{-\lambda_5 a} - 1 \left. \right) - e^{-\lambda_5 x} d_{23} \left((e^{\lambda_5 x} - e^{\lambda_5 a}) H_0(a - x) + \right. \\ &\left. + e^{\lambda_5 a} - 1 \right), \quad (33) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} d_{21} &= \alpha_4 q_0 / d_{17} \lambda_1, & d_{22} &= \alpha_4 q_0 / d_{18} \lambda_3, \\ d_{23} &= \alpha_4 q_0 / d_{19} \lambda_5. \end{aligned}$$

Подставив в (32) ядро Коши (26) и функцию внешней нагрузки, получим частное решение в случае оснований *малой* или *большой жесткости*, которое здесь не приводится ввиду громоздкости.

Если нагрузка равномерно распределена внутри интервала $[a; b]$ на внешней поверхности трехслойной пластины

$$q(x) = q_0 (H_0(b - x) - H_0(a - x)), \quad (34)$$

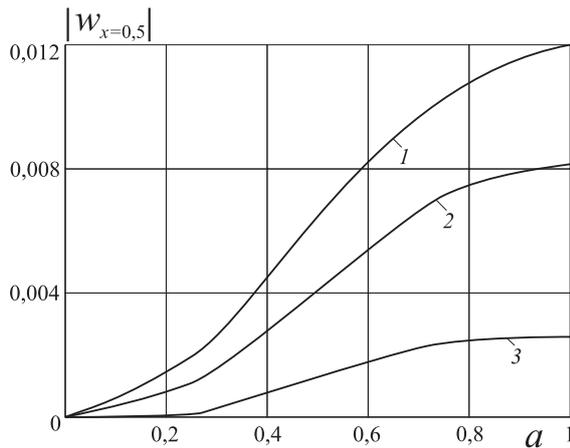


Рис. 3. Прогибы пластины в зависимости от длины интервала нагрузки a ($x = 0,5$) (значения прогибов в последнем случае увеличено в 100 раз)

то частные решения строятся как суперпозиция решений (33), соответствующих нагрузке (30).

Численная реализация решений при нагрузках (30), (34) проведена для трехслойной пластины с материалами слоев дюралюминий–фторопласт–дюралюминий (Д16Т–ПТФЭ–Д16Т), все перемещения и геометрические параметры которой отнесены к ее ширине l . Относительные толщины слоев принимались $h_1 = h_2 = 0,02$, $h_3 = 2c = 0,09$; интенсивность нагрузки $q_0 = 2$ МПа; коэффициент жесткости упругого основания $\kappa = 100$ МПа/м; характеристики материалов (МПа) $G_1 = G_2 = 0,267 \cdot 10^5$, $G_3 = 90$, $K_1 = K_2 = 0,8 \cdot 10^5$, $K_3 = 4700$; $l = 1$.

На рис. 3 приведены графики изменения относительных прогибов пластины в сечении $x = 0,5$ в зависимости от ширины полосы равномерно распределенной нагрузки (30) при различных жесткостях упругого основания: 1 — $\kappa = 1$; 2 — $\kappa = 100$; 3 — $\kappa = 10^5$ МПа/м. При $a = 1$ нагрузка распределена по всей поверхности пластины. Линеиное увеличение ширины полосы нагрузки вызывает нелинейный рост значений прогибов. При переходе от основания малой жесткости к средней коэффициент постели увеличивается в 100 раз, а прогиб уменьшается на 30%. Если основание высокой жесткости (коэффициент постели увеличивается в 10^5 раз), то максимальный прогиб пластины составляет 0,23% от первоначального прогиба (1).

Изменение продольных напряжений σ_x вдоль оси ox на границах слоев иллюстрирует рис. 4 в случае действия нагрузки, равно-

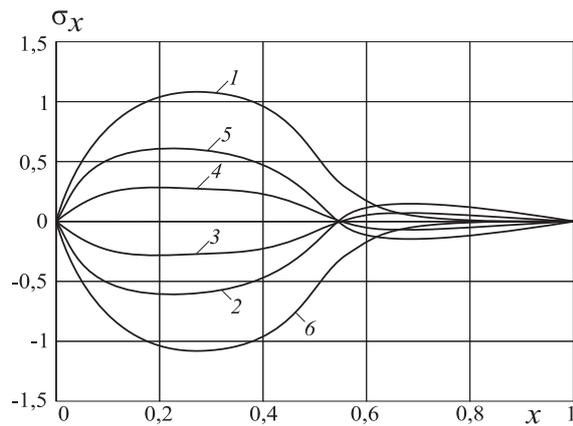


Рис. 4. Изменение напряжений σ_x вдоль оси ox на границах слоев (значения в несущих слоях отнесены к $q_1 = 10^8$ Па, в заполнителе — к $q_2 = 10^7$ Па)

мерно распределенной внутри полосы $[0; 0,5]$: 1 — $z = -c - h_2$; 2 — $z = -c$ (второй слой); 3 — $z = -c$ (заполнитель); 4 — $z = c$ (заполнитель); 5 — $z = c$ (первый слой); 6 — $z = c + h_1$. Напряжения во всех слоях пластины сконцентрированы в области приложения внешней нагрузки, на правом краю значения напряжений близки к нулю. Максимумы напряжений наблюдаются на внешних поверхностях пластины, которые сжаты у первого слоя и растянуты у второго. Здесь и далее рассматривается основание средней жесткости.

Рис. 5 иллюстрирует прогиб пластины в сечении с координатой $x = 0,5$ в зависимости от расположения a левого края полосы нагрузки (34) длиной $b - a = 0,25$ ($q_0 = 5$ МПа): 1 — $\kappa = 1$; 2 — $\kappa = 100$; 3 — $\kappa = 10^5$ МПа/м. По мере продвижения полосы нагрузки с левого конца пластины к правому прогибы растут, достигая максимальных значений при $a = 0,375$ (нагрузка распределена симметрично относительно торцов пластины), а затем убывают. Описанные выше соотношения между прогибами и жесткостью основания остаются справедливыми и здесь.

Изменение нормальных напряжений σ_x по толщине пластины ($x = 0,5$) показано на рис. 6 (значения в несущих слоях отнесены к $q_1 = 10^9$, в заполнителе — к $q_2 = 10^8$). Нагрузка, равномерно распределена на участке $0,5 \leq x \leq 0,75$. Ее интенсивность $q_0 = 5$ МПа. Максимумы напряжений наблюдаются на внешних поверхностях пластины: в первом слое они отрицательны, во втором — положительны. В склейках напряжения пре-

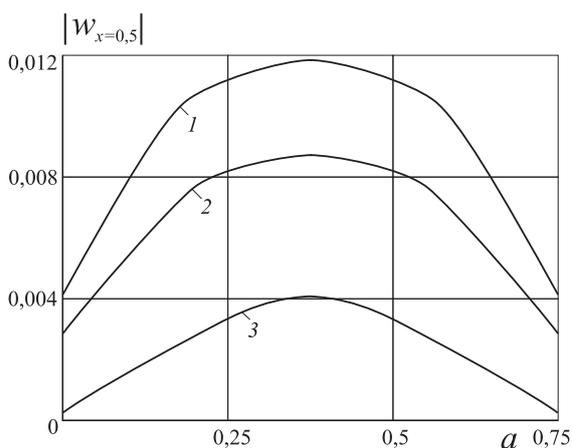


Рис. 5. Прогибы пластины в сечении $x = 0,5$ в зависимости от расположения левого края полосы нагрузки $b - a = 0,25$ (значение прогибов в последнем случае увеличено в 100 раз)

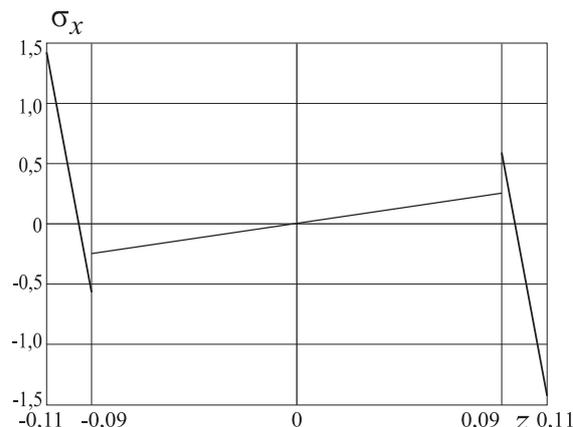


Рис. 6. Распределение напряжений σ_x в поперечном сечении пластины ($x = 0,5$) при действии нагрузки в интервале $[0; 0,5]$

терпевают разрыв, в несущих слоях и на поверхностях заполнителя они одного знака.

Выводы. Приведенные в работе общие решения (18), (28) с частным решением (22) полностью описывают случай цилиндрического изгиба локальными нагрузками упругой трехслойной прямоугольной пластины с жестким заполнителем на деформируемых основаниях различной жесткости, при разных граничных условиях.

Литература

1. Старовойтов Э. И. Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки. Гомель: БелГУТ, 2002. 344 с.
2. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 576 с.
3. Плескачевский Ю. М., Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Деформирование металлополимерных систем. Минск: Бел. наука. 2004. 386 с.
4. Плескачевский Ю. М., Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Динамика металлополимерных систем. Минск: Бел. наука. 2004. 342 с.
5. Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В. Локальные и импульсные нагрузки трехслойных элементов конструкций. Гомель: БелГУТ, 2003. 367 с.
6. Cheng Zhenqiang, Jemah A. K., Williams F. W. Theory for multilayered anisotropic plates with weakened interfaces // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1996. Vol. 63. N. 4. P. 1019–1026.
7. Ebsioglul J. K. On the theory on sandwich panels in the reference state // Internal. J. Eng-ng Sci. Issue 966. No. 6. P. 166–194.
8. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В., Сулейман М. Термоупругий изгиб кольцевой трехслойной пластины на упругом основании // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2006. № 4. С. 55–62.
9. Старовойтов Э. И., Доровская Е. П. Изгиб прямоугольной трехслойной пластины на упругом основании // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2006. № 3. С. 45–51.
10. Яровая А. В., Старовойтов С. А. Трехслойный стрержень на упругом основании // Материалы, технологии, инструменты. 2003. Т. 8. № 2. С. 9–12.

Статья поступила 26 августа 2007 г.

Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь

© Старовойтов Э. И., Доровская Е. П., Старовойтов С. А., 2007